УДК 372.851: 373.1

Школьний О.В.,
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

ПРО СИСТЕМУ ПІДГОТОВКИ ДО ЗОВНІШНЬОГО НЕЗАЛЕЖНОГО ОЦІНЮВАННЯ ЯКОСТІ ЗНАНЬ З МАТЕМАТИКИ

Дана робота присвячена системі якісної підготовки до ЗНО з математики учнів української старшої школи. Розглянуто особливості зовнішнього незалежного оцінювання якості знань з математики в порівнянні з іншими видами підсумкового оцінювання, наведено методичні рекомендації щодо підготовки учнів до даного виду тестування з усіх тем шкільного курсу математики.

Ключові слова. *Оцінювання навчальних досягнень з математики, учні старшої школи, державна підсумкова атестація, зовнішнє незалежне оцінювання.*

Постановка проблеми. На сьогодні в Україні існують дві основні форми загальнодержавного підсумкового оцінювання навчальних досягнень з математики учнів старшої школи: зовнішнє незалежне оцінювання якості знань (далі – ЗНО), яке проводить Український центр оцінювання якості освіти МОН України (далі – УЦОЯО), та державна підсумкова атестація (далі – ДПА), яку проводить безпосередньо МОН України.

Обидва наведених оцінювання проводяться у традиційному для світової практики вигляді стандартизованих тестувань. Принципова *організаційна* відмінність між ними полягає в тому, що ЗНО з математики проводиться окремою незалежною структурою в складі МОН України, тест розробляється із залученням вітчизняних та незалежних міжнародних експертів, а зміст цього тесту є невідомим для учасників тестування. Крім цього, результати ЗНО з математики, на відміну від ДПА, є відкритими для суспільства, оскільки підсумковий звіт, що містить психометричний аналіз усіх тестів ЗНО, а також повні статистичні дані про результати цих тестів, наявний у відкритому доступі на сайті УЦОЯО (адреса сайту: www.testportal.gov.ua).

Формально ЗНО з математики в Україні має діагностичну функцію і є інструментом для відбору майбутніх студентів до вишів, а ДПА з математики має контролюючу функцію і є основним засобом перевірки якості математичної підготовки випускників. Однак, насправді ЗНО з математики частково виконує і контролюючу функцію, оскільки за своєю змістовою, структурною, тематичною, когнітивною та іншими специфікаціями повністю дублює ДПА з математики. На нашу думку, ця подвійна функція ЗНО є навіть корисною в умовах недостатньої прозорості для суспільства, характерної для ДПА.

Виходячи з вищесказаного, можна стверджувати, що результати ЗНО можна сприймати також не лише як ранжований ряд претендентів на місця в українських вишах (своєрідну «лінійку» для відбору майбутніх студентів), а і як чисельну оцінку рівня реальної математичної підготовки учнів старшої школи.

Підготовка учнів до ЗНО та ДПА з математики подібні за кінцевою метою, але суттєво відрізняються за формою. Дійсно, підготовка до ДПА з математики, фактично, здійснюється впродовж навчального року під час основного курсу математики, вона закладена в програми, а отже, і в діючі підручники та посібники з математики. Крім того, традиційно всі завдання ДПА з математики в Україні відомі наперед, що, безумовно, полегшує роботу вчителів по підготовці до цього виду оцінювання.

Під час підготовки до ЗНО з математики вчителі змушені орієнтуватися не на конкретні завдання, а лише на тематичну програму та структуру тесту за формами тестових завдань. Ні рівень складності окремих завдань тесту ЗНО, ні конкретні типи цих завдань наперед не відомі. Іншими словами, при підготовці до незалежного оцінювання вчителям та репетиторам потрібно вчити дітей «математиці взагалі», тобто здійснювати систематичне повторення всього шкільного курсу математики з п'ятого по одинадцятий клас. Тому, на нашу думку, організаційні та методичні поради щодо системи підготовки до ЗНО з математики на сьогодні є надзвичайно актуальними і корисними для практикуючих учителів.

Аналіз актуальних досліджень. На сьогодні в Україні немає єдиної загальнодержавної схеми підготовки до ЗНО з математики. Більшість практикуючих учителів здійснюють її на власний розсуд, користуючись наявною на ринку комерційною літературою з даної тематики. На жаль, далеко не всі наявні на ринку посібники по підготовці до ЗНО мають належний рівень затвердження (гриф методичної комісії з математики науково-методичної ради МОН України) та задовільний рівень якості.

У кожному зі згаданих посібників запропоновано власний підхід до підготовки до ЗНО з математики. Однак, доволі часто цей підхід є калькою з посібників по підготовці до вступних іспитів ще радянських часів, у яких формі подання тестових завдань приділяється досить мало уваги. Вважається, що «коли учень добре знає математику, то форма тестового завдання є непринциповою». На нашу думку, подібний підхід до підготовки до ЗНО з математики є принципово хибним, оскільки за статистикою навіть «сильні» учні найбільше помилок допускають у нібито «простих» завданнях із альтернативами, які мають специфічні «пастки». Тому не враховувати специфіку проведення незалежного тестування з математики при підготовці до нього, на нашу думку, принаймні недалекоглядно.

Аналізуючи наявні на ринку посібники по підготовці до ЗНО, можна помітити дві крайності. Окремі посібники грішать надмірною схематичністю та сухістю викладу теоретичного матеріалу, не містячи при цьому ніяких структурних блок-схем чи опорних конспектів. На противагу цьому окремі інші посібники містять занадто детальний виклад теоретичного матеріалу, в якому наводяться рідко застосовні формули та твердження, які відволікають від сприйняття основного матеріалу. Ні перша, ні друга категорія посібників не підходить для учнів зі слабким та середнім рівнем математичної підготовки, оскільки їм важко виділити головне і водночас добре розібратися в непростому для них матеріалі.

Зрозуміло, що вибір доречного посібника по підготовці до ЗНО з математики є суб'єктивним і залежить від стилю викладання вчителя чи репетитора, а також від рівня математичної підготовки учня. Крім того, щороку на українському ринку друкованих видань по підготовці до ЗНО з математики з'являються нові посібники, а відомі раніше зазнають суттєвих структурних змін та редагуються, а тому процедура проведення моніторингу їх якості є непростою справою. Саме тому в цьому підпункті ми й не наводимо конкретних рекомендацій щодо якості тих чи інших посібників по підготовці до ЗНО з математики.

Протягом тривалого часу ми займаємося підготовкою учнів до ЗНО з математики і накопичили в цьому напрямку певний досвід, яким хочемо поділитися з читачами. Пропоновані в цій статті підходи до підготовки до ЗНО з математики апробовані нами під час роботи в системі доуніверситетської підготовки НаУКМА з 2004 по 2014 рік на денному, вечірньому та інтенсивному відділеннях. Згадані підходи знайшли своє відображення у наших посібниках [1]-[4] та численних публікаціях у фахових науково-методичних виданнях, зокрема і в цьому журналі (див., наприклад, [5]-[9]).

Мета статті. Метою даної роботи є опис авторської системи підготовки до ЗНО з математики, а також наведення методичних рекомендацій для вчителів щодо особливостей розв'язування тестових завдань з математики, які стосуються всіх тем шкільного курсу математики.

Виклад основного матеріалу.

Загальні підходи до підготовки до ЗНО з математики. Зрозуміло, що існує багато альтернативних схем якісної підготовки до ЗНО з математики, а тому наведена нижче схема, що природно, не претендуватиме на універсальність. Однак, як уже зазначалося, протягом останнього десятиріччя ми з успіхом застосовували цю схему під час 6-місячних, 3-місячних та інтенсивних курсів підготовки до ЗНО з математики в НаУКМА, а тому хотіли б поділитися з читачами своїм досвідом у цій сфері.

Суть авторської системи підготовки до ЗНО полягає в розбитті курсу систематизації та повторення теоретичного матеріалу з математики на 10 тематичних блоків: «Числа і вирази», «Функції та їх графіки», «Рівняння та системи рівнянь», «Нерівності та системи нерівностей», «Текстові задачі», «Елементи математичного аналізу», «Планіметрія», «Стереометрія», «Координати і вектори» та «Елементи стохастики». Після проведення тематичної підготовки здійснюється написання кількох комплексних тестів у форматі ЗНО з наступним їх аналізом та здійсненням корекції навчальної діяльності учнів.

Повторювальний курс передбачає висвітлення на заняттях основних теоретичних відомостей, що стосуються кожної з наведених тем (деталізацію теоретичного матеріалу для перших двох тем буде наведено дещо пізніше), разом із розглядом належної кількості прикладів конкретних тестових завдань різних форм – із альтернативами, із короткою відповіддю, на встановлення відповідностей (відшукання логічних пар). У залежності від інтенсивності курсу кількість теоретичного матеріалу та конкретних прикладів тестових завдань варіюється. Для курсів із довшим терміном матеріал подається більш детально, а для курсів із коротшим терміном більше матеріалу виноситься на самостійну роботу слухачів.

На нашу думку, хибним є підхід, за яким під час проведення підготовчих курсів немає належного «зворотного зв'язку» викладача та слухачів, а самі курси, фактично, перетворюються в «театр одного актора», який, читаючи лекції (навіть дуже якісно), лише створює в учнів ілюзію простоти розв'язування тестових завдань ЗНО з математики. На нашу думку, саме *самостійна робота слухачів курсів є головною під час їх проведення*.

Однак, для того, *щоб самостійна робота давала потрібний ефект, вона має бути належним чином організована*. По-перше, слухачі мають бути забезпечені навчальнометодичними посібниками. При цьому важливо, щоб окремо був у наявності посібник, що містить необхідні теоретичні відомості, а окремо – великий збірник тестових завдань з математики. Посібник із теорією дає можливість слухачам додатково переусвідомити той матеріал, який вони прослухали на занятті або ж опанувати його самостійно у випадку пропуску заняття (з різних причин). А великий задачник дає можливість учням із різним рівнем підготовки розв'язувати ту кількість тестових завдань і того рівня складності, яка відповідає рівню підготовки конкретного учня. У своїй роботі ми використовуємо посібники [1] (із теорією) та [3] (задачник). Після завершення тематичного повторення курсу математики для написання комбінованих тестів у форматі ЗНО ми використовуємо посібник [2] (збірник тренувальних тестів).

По-друге, для забезпечення «зворотного зв'язку» та корекції навчальної діяльності учнів ми проводимо серію тематичних тестів (контрольних робіт), які дають можливість як викладачу, так і учням усвідомити, наскільки вони якісно опанували відповідний матеріал. При цьому *основна* функція тематичних тестів не контролююча, а навчальна. Це означає, що оцінки за тематичний тест не є визначальними для формування загального враження про роботу слухача, оскільки є проміжними і виступають лише одним із етапів головної мети – належної підготовки до незалежного тестування.

Однак, надмірно знижувати роль оцінок за тематичні тести, на нашу думку, не зовсім правильно, оскільки далеко не в кожного учня вже сформований достатній рівень самосвідомості та самоорганізації. Особливо актуальним це є для випадку, коли слухачі підготовчих курсів отримують додаткові бали при вступі на технічні спеціальності. Тоді доцільно враховувати результати тематичних тестів під час виставлення підсумкової оцінки з математики за результатом навчання на підготовчих курсах.

Наприклад, на 6-місячних курсах ми проводимо 5 тематичних тестів, згрупувавши попарно наведені вище теми. За кожен із таких тестів учень отримує 34 бали (зразок тесту буде наведено нижче), результати 5 тематичних тестів усереднюються, а підсумковий тест дає можливість учневі заробити ще 66 балів. У підсумку слухач може набрати максимум 100 балів за весь курс підготовки до ЗНО з математики. Таким чином, для зацікавлених у додаткових балах слухачів тематичні тести мають певну цінність, хоч їх значення й не є визначальним. Це сприяє підвищенню рівня відповідальності учнів, але не веде до їх надмірного психологічного напруження.

Окремо слід відзначити важливість психологічної підготовки слухачів курсів до незалежного оцінювання. Недооцінка цієї підготовки може призвести до прикрих помилок під час тестування. Звісно, що є об'єктивні та суб'єктивні фактори наявності психологічної стійкості слухача. До об'єктивних можна віднести наявність належної базової теоретичної підготовки та достатньої практики самостійного розв'язування тестових завдань, а до суб'єктивних – індивідуальні психічні та фізіологічні особливості кожного окремого слухача. Забезпечення об'єктивних факторів є природним наслідком запропонованої нами системи, а вплив на суб'єктивні досягається за рахунок індивідуальної педагогічної майстерності викладача під час проведення курсів.

Особливості вивчення теми «Числа і вирази». Завдання на перетворення цілих, дробових раціональних, тригонометричних, ірраціональних та логарифмічних виразів є обов’язковою частиною тесту ЗНО. У тесті ЗНО-2014 завдання, що стосуються цієї теми, склали 17,65% від загальної кількості завдань (4 завдання з альтернативами, 1 завдання на встановлення відповідностей і 1 завдання з короткою відповіддю).

Дана тема природним чином розбивається на наступні підтеми: «Цілі та дробові раціональні вирази», «Ірраціональні вирази», «Тригонометричні та обернені тригонометричні вирази» та «Логарифмічні вирази». При повторенні теми «Числа і вирази» під час підготовки до незалежного тестування, на нашу думку, варто зробити такі акценти.

1. Треба розрізняти множину цілих та натуральних чисел, оскільки доволі часто учні плутають їх і, наприклад, відносять число нуль до натуральних. У завданнях із короткою відповіддю на розв’язування нерівностей часто вимагається знайти суму чи добуток усіх натуральних чи цілих її розв’язків. У випадку, якщо учень погано розрізняє числові множини, це може призвести до неправильної відповіді навіть у випадку, коли сама нерівність розв’язана правильно.
2. Формули скороченого множення є надзвичайно важливими не лише під час перетворення виразів, а й у майбутньому, наприклад, при розв’язуванні, рівнянь та нерівностей, дослідженні функції на монотонність та екстремуми тощо.
3. Поняття модуля числа традиційно викликає труднощі в учнів зі слабким та середнім рівнем підготовки, а тому цій темі варто приділити належну увагу, зокрема, важливим для подальшого повторення є геометричний зміст модуля.
4. Варто витратити час на формування в учнів розуміння суті поняття тригонометричних функцій довільного кута на одиничному колі. Значна кількість тестових завдань на тригонометричні вирази значно простіше розв’язується, якщо це розуміння сформоване. Крім того, найпростіші властивості (парність, періодичність, значення для кутів 0, 90, 180, 270, 360 градусів тощо) при розумінні суті поняття тригонометричних функцій не потребують механічного зазубрювання.
5. Не варто перевантажувати учнів надмірною кількістю тригонометричних формул, але слід добитися того, щоб основні з них були засвоєні дуже добре. До основних ми відносимо формули, що пов’язують тригонометричні функції одного кута, формули суми аргументів та формули зведення.
6. Поняття оберненої тригонометричної функції традиційно є непростим для сприйняття учнів. Особливо це стосується перетворень обернених тригонометричних виразів. На нашу думку слід підкреслювати, що будь-який «аркус» – це кут, причому в багатьох випадках він або гострий, або ж його можна звести до гострого (наприклад, за допомогою формул $\arcsin(-A) = -\arcsin A$, $\arccos(-A) = \pi - \arccos A$ тощо). Тому корисними при розв’язуванні завдань на перетворення «аркусів» є використання прямокутних трикутників.
7. Не варто перевантажувати слухачів надмірною кількістю логарифмічних формул, досить обмежитися означенням логарифма (основною тригонометричною тотожністю), властивостями суми та різниці логарифмів, логарифма степеня та властивістю про перехід до нової основи. Майже всі інші логарифмічні формули є наслідками вищезгаданих.

Особливості вивчення теми «Функції та їх графіки». Оскільки функціональна змістова лінія є однією з найважливіших у шкільному курсі математики, то під час проведення ЗНО цій темі також приділяється значна увага. У 2014 році завдання, які стосувалися функцій та їх властивостей і графіків, склали 11,76% від усіх завдань тесту ЗНО з математики (2 завдання з альтернативами, 1 завдання на встановлення відповідностей і 1 завдання з короткою відповіддю).

Дана тема природним чином розбивається на наступні підтеми: «Означення функції, основні властивості функцій», «Основні елементарні функції (лінійна, квадратична, степенева, показникова, тригонометричні, обернені тригонометричні, логарифмічна)», «Побудова графіків функцій методом геометричних перетворень» та «Окремі множини площини, які не є графіками функцій». При повторенні теми «Функції та їх властивості» під час підготовки до незалежного тестування, на нашу думку, варто зробити такі акценти.

1. При вивченні основних властивостей функцій (до таких ми відносимо область визначення, множину значень, парність/непарність, періодичність, монотонність та екстремуми) слід дуже акуратно формулювати означення, звертаючи увагу на «тонкі моменти» цих означень. Річ у тім, що в тестах ЗНО з математики останніх років зустрічається досить багато завдань теоретичного характеру, суть розв'язання яких якраз і зводиться до розуміння чи нерозуміння учасниками тестування цих «тонких моментів». Наприклад, окремі учні впевнені, що функція $y = \operatorname{tg} x$ є зростаючою на своїй області визначення, що, звісно, неправильно. Тому наведення доречних контр прикладів, які б висвітлювали подібні речі, є дуже доречним під час вивчення основних властивостей функцій.
2. Варто звернути увагу учнів на геометричний зміст параметрів лінійної ($y = kx + b$) та квадратичної ($y = ax^2 + bx + c$) функцій, оскільки окремі тестові завдання по суті зводяться до перевірки розуміння цього геометричного змісту. Особливу увагу слід звернути на геометричний зміст кутового коефіцієнта лінійної функції, який буде далі використовуватися при вивченні теми «Похідна».
3. Не варто розглядати з учнями всі можливі класи значень параметра α загальної степеневої функції $y = x^{\alpha}$. Досить обмежитися такими випадками: а) $\alpha \in N$; б) $-\alpha \in N$; в) $\frac{1}{\alpha} \in N$. Саме ці функції найчастіше зустрічаються в тестах ЗНО, а щодо інших класів значень α, то досі серед методистів точаться суперечки, яку множину слід вважати областю визначення функції $y = x^{\frac{5}{3}}$: $[0;+\infty)$ чи $(-\infty;+\infty)$?
4. Перед вивченням логарифмічної та обернених тригонометричних функцій слід приділити увагу загальному означенню оберненої функції та правилу її знаходження. Зокрема, досить ефективним є методичний прийом із перевертанням і поворотом аркуша на кут $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ для демонстрації графіка оберненої функції. Він дозволяє вчителеві зробити емоційний акцент на суттєвій властивості графіка оберненої функції – симетричність із графіком початкової функції відносно прямої $y = x$.

5. Оскільки показникова функція є монотонною на $(-\infty;+\infty)$, то вона має на цьому проміжку єдину обернену функцію – логарифмічну. Для тригонометричних функцій це не так, тому побудова графіків функцій-«аркусів» є складнішою, ніж побудова логарифмічної функції. Тому природно спочатку вивчати показникову та логарифмічну функції, а вже потім – тригонометричні та обернені тригонометричні.
6. Перед вивченням побудови графіків методом геометричних перетворень слід приділити час коректним означенням самих геометричних перетворень (паралельного перенесення, симетрії, «стиску» та «розтягу» вздовж осей координат). Особливо це стосується так званих «стисків» та «розтягів». Далеко не кожен учень зможе пояснити, в яку точку перейде точка графіка функції, наприклад, при розтягу в 2 рази вздовж осі ординат.
7. Під час вивчення окремих множин площини, що не є графіками функцій, особливу увагу слід приділити колу та його рівнянню, бо коло часто використовується під час розв'язування традиційних для тесту ЗНО систем рівнянь з параметром, а також у інших темах шкільного курсу математики.

Особливості вивчення теми «Рівняння та системи рівнянь». Оскільки рівняння мають численні практичні застосування, зокрема, є одним із основних засобів розв'язування прикладних задач, то під час незалежного тестування методам їх розв'язування приділяється значна увага. У тесті ЗНО-2014 завдання на розв'язування рівнянь та систем рівнянь склали 14,71% від загальної кількості завдань (3 завдання з альтернативами і 2 завдання з короткою відповіддю).

Дана тема природним чином розбивається на наступні підтеми: «Цілі та дробові раціональні рівняння», «Ірраціональні рівняння», «Тригонометричні рівняння», «Показникові та логарифмічні рівняння», «Комбіновані типи рівнянь». При повторенні теми «Рівняння та системи рівнянь» під час підготовки до незалежного тестування, на нашу думку, варто зробити такі акценти.

1. Значна частина учнів із певним острахом сприймає навіть саме слово «параметр». Для виправлення цієї ситуації варто розглядати найпростіші (лінійні та квадратні) рівняння з параметром уже на перших заняттях теми, підкреслюючи, що параметр це лише число, а більшість випускників уміють розв'язувати в загальному вигляді рівняння $ax^2+bx+c=0$, яке є рівнянням аж із трьома параметрами!
2. Ми не виділяємо рівняння, що містять знак модуля, у окрему підтему, однак такі рівняння варто розглядати у кожній із наведених підтем, оскільки під час ЗНО складні завдання (останні завдання тесту) здебільшого містять модуль.
3. Варто акцентувати увагу учнів на графічному способі розв'язування рівнянь та систем рівнянь, бо доволі часто якщо в тестовому завданні йде мова про кількість коренів рівняння чи розв'язків системи рівнянь, саме графічний спосіб є найпростішим. Зокрема, графічний спосіб часто стає в пригоді при розв'язуванні рівнянь та систем рівнянь із параметром.
4. Оскільки тест ЗНО з математики практично не містить завдань «олімпіадного типу» (таких завдань традиційно 2-3 на весь тест), то під час підготовки більшості

учнів до цього виду тестування приділяти надто багато часу нестандартним типам рівнянь не варто. На противагу цьому, стандартні типи рівнянь з більшістю учнів слід відпрацювати дуже ретельно, оскільки майже всі вони можуть бути присутні в тесті ЗНО. Однак, для тих учнів, які демонструють високий рівень математичної підготовки і претендують під час незалежного оцінювання на максимальний бал, саме на завданнях підвищеної складності слід зосередити особливу увагу.

5. Доволі часто під час розв'язування тестових завдань із короткою відповіддю на розв'язування рівнянь та систем рівнянь після розв'язання вимагається записати у відповідь суму коренів, добуток коренів, найменший корінь тощо. Саме на цьому етапі можна допустити прикру помилку, яка не дозволить учневі, який правильно розв'язав рівняння, набрати за нього заслужені бали. Іноді після успішного розв'язання рівняння учень мимоволі розслабляється, помилково вважаючи, що «все найважче вже позаду». Подібне розслаблення під час тестування може призвести до втрати балів і зниження підсумкового результату. Варто звертати увагу учнів на те, що до отримання остаточної відповіді тестове завдання слід вважати абсолютно нерозв'язаним. Аналогічна рекомендація стосується і вивчення наступної теми – «Нерівності та системи нерівностей».

Особливості вивчення теми «Нерівності та системи нерівностей». На відміну від рівнянь, нерівності є більш поширеним інструментом опису явищ і процесів реального світу, але й методи їх розв'язування є дещо складнішими, ніж методи розв'язування рівнянь. Тому нерівності є важливою, але досить непростою для опанування темою курсу математики. За статистикою саме під час розв'язування нерівностей виникає найбільша кількість технічних помилок. Можливо тому в тесті ЗНО-2014 завдання на розв'язування нерівностей та систем нерівностей, склали лише 5,88% від загальної кількості завдань (1 завдання з альтернативами і 1 завдання з короткою відповіддю).

Дана тема природним чином розбивається на наступні підтеми: «Загальний метод інтервалів, властивості числових нерівностей», «Цілі та дробові раціональні нерівності», «Ірраціональні нерівності», «Тригонометричні нерівності», «Показникові та логарифмічні нерівності», «Комбіновані типи нерівностей». При повторенні теми «Нерівності та системи нерівностей» під час підготовки до незалежного тестування, на нашу думку, варто зробити такі акценти.

1. Із самого початку вивчення теми слід звернути увагу учнів, що рівняння та нерівності – принципово різні математичні об'єкти і те, що «проходило» для рівнянь, у багатьох випадках для нерівностей «не проходить». Наприклад, рівняння $\sin x = 3$ не має коренів, а нерівність $\sin x \leq 3$ має безліч розв'язків тощо.
2. Важливо не оминати під час повторення нерівностей та систем нерівностей акуратного означення розв'язку нерівності та системи нерівностей. Крім того, важливо розглянути різні види числових проміжків, оскільки доволі часто від того, «входить» чи «не входить» дана точка (число) до даного проміжку, суттєво залежить відповідь до тестового завдання.
3. На відміну від рівнянь, для нерівностей існує універсальний метод, який дозволяє розв'язання будь-якої з них звести до розв'язання рівняння – загальний метод

інтервалів. Суть цього методу ґрунтується на властивості неперервної функції зберігати знак між двома своїми нулями. Обґрунтування даної властивості не входить до шкільного курсу математики, але ознайомити учнів і з самою властивістю, і з загальним методом інтервалів, безумовно, корисно.

4. Загальний метод інтервалів є універсальним для розв'язування будь-якої нерівності, але користуватися ним при розв'язуванні найпростіших нерівностей і незручно, і недоцільно. Тому, розглянувши загальний метод інтервалів на початку теми, слід зробити це зауваження і переходити до розгляду специфічних для кожного типу нерівностей методів розв'язання.
5. Не слід під час повторення курсу математики оминати підтему «Властивості числових нерівностей», яка, з одного боку, має самостійну цінність і численні практичні застосування, які можуть відображатися в завданнях тесту ЗНО, а з іншого – є основою для розв'язання лінійних нерівностей та їх систем.
6. При розв'язуванні цілих (крім лінійних), квадратичних, дробових раціональних, ірраціональних, показникових, логарифмічних та комбінованих нерівностей слід показати, що всі вони, фактично, розв'язуються за допомогою одного й того самого загального методу інтервалів, але для кожного з цих типів рівнянь даний метод може зазнавати певних спрощень (наприклад, модифікується до методу «змійки»). Крім того, окремі найпростіші підтипи наведених типів нерівностей мають альтернативні способи розв'язування, які не використовують метод інтервалів.
7. Під час розв'язування нерівностей із модулем слід звернути увагу не лише на аналітичний спосіб, а й на спосіб, який ґрунтується на використанні геометричного означення модуля. У окремих випадках застосування геометричного змісту модуля може зекономити час, що дуже важливо для успішного проходження тестування.

Особливості вивчення теми «Текстові задачі». Зауважимо, що дана тема не дублює змістову лінію шкільного курсу математики, але, на нашу думку, її виокремлення є природним, оскільки розв'язування будь-яких текстових задач пов'язане з поняттям математичної моделі та способами її побудови. Фактично, саме текстові задачі є для учнів першими прикладами застосування математики в реальному житті, а отже, є надзвичайно важливими для формування їх адекватного світосприйняття.

У тесті ЗНО-2014 текстові задачі склали 5,88% від загальної кількості завдань (2 завдання з короткою відповіддю).

Для теми «Текстові задачі» розбиття на підтеми є умовним, бо є досить багато різних основ класифікації текстових задач за змістом чи за способом розв'язування. Ми пропонуємо виокремити наступні підтеми: «Задачі на арифметичні співвідношення між об'єктами», «Задачі на рух і на роботу», «Задачі на відсотки», «Задачі на подільність цілих чисел». При повторенні теми «Текстові задачі» під час підготовки до незалежного тестування, на нашу думку, варто зробити такі акценти.

1. Перед початком розгляду конкретних типів текстових задач варто роз'яснити учням суть поняття математичної моделі та навести основні етапи її побудови, проілюструвавши цю побудову на простих конкретних прикладах.

2. Досвід показує, що однією з найбільших проблем при розв'язуванні текстових задач є вміння відокремити в умові задачі суттєву інформацію від несуттєвої. Тому ми радимо починати розв'язування задач кожної з підтем із максимально формалізованих або типових задач, сприйняття умови яких здебільшого не викликає труднощів. Після засвоєння стандартних методів розв'язування задач кожного типу можна (і потрібно) ускладнювати умови задач, прагнучи максимально наблизити їх до задач, що описують явища і процеси реального світу.
3. Корисним при розв'язуванні текстових задач ми вважаємо використання гумористичної форми їх формулювання. Однак, використання гумору слід дозувати і адаптувати як для кожного окремого вчителя, так і для кожної окремої учнівської аудиторії. Корисно використовувати гумористичну форму для формування пізнавальної активності учнів на початковому етапі (мотиваційні задачі), а також на завершальному етапі, коли основні вміння і навички щодо розв'язування тих чи інших текстових задач вже сформовано.
4. Ми радимо під час повторення не уникати арифметичних способів розв'язування текстових задач. У ситуаціях, коли можна застосувати алгебраїчний спосіб розв'язування, але існує альтернативний йому арифметичний, варто показати учням обидва ці способи. Окремі учні (особливо «сильні») схильні до пошуку уніфікації способів розв'язування текстових задач і можуть ускладнювати спосіб розв'язання, шукаючи рівняння чи систему рівнянь, в той час як арифметичним способом задача часто розв'язується значно простіше.
5. Корисним під час розв'язування текстових задач є використання таблиць, малюнків, діаграм, схем тощо. Однак, варто наголошувати, що всі ці засоби є допоміжними, не можуть претендувати на універсальність, а їх використання спрямовано лише на досягнення однієї мети – адекватне і коректне розуміння умови задачі, яке в підсумку призведе до правильного її розв'язання.
6. До задач «на арифметичні співвідношення між об'єктами» ми відносимо текстові задачі, у яких здійснюється порівняння кількісних характеристик об'єктів реального світу, але які не можна віднести до задач на рух, роботу, проценти та подільність. Ключовим під час розв'язування цих і інших текстових задач є знаходження так званого «основного співвідношення», яке розкриває суть задачі. На основі цього співвідношення будується математична модель задачі – числовий вираз, рівняння, система рівнянь тощо.
7. Під час розв'язування задач на рух і роботу варто звернути увагу учнів, що задачі на спільний рух і спільну роботу, по суті, є однаковими (кількість роботи є аналогом шляху, а продуктивність – аналогом швидкості). Ми вважаємо, що подібний підхід полегшує сприйняття способів розв'язування таких задач.
8. Досвід показує, що під час розв'язування задач на відсотки використання пропорцій у більшості випадків лише шкодить. У 5-6 класах їх використання було виправданим, оскільки складні задачі на відсотки тоді практично не розглядалися, а для найпростіших задач на відсотки пропорції є досить ефективними. Однак, при розв'язуванні складних і багатоетапних задач на відсотки (особливо при

розв’язування задач на суміші та сплави) використання пропорцій найчастіше бажаного ефекту не дає, а лише заплутує учнів. Тому варто при розгляді трьох найпростіших задач на відсотки (знаходження відсотка від числа, числа за його відсотком, відсоткове порівняння двох чисел) детально розглядати їх розв’язування за допомогою формул, а не лише пропорцій.

9. Задачі на подільність цілих чисел не завжди формулюються саме у формі текстових задач, але їх розгляд у цій темі є досить природним, зважаючи на методи їх розв’язування, певною мірою аналогічні до методів розв’язування задач інших типів. Особливо важливим для учнів є застосування для розв’язання задач на подільність невизначених систем рівнянь, які за рахунок цілочислового обмеження мають скінченну кількість розв’язків.

Особливості вивчення теми «Елементи математичного аналізу». Слід зауважити, що «глибина» знань учнів у межах даної теми суттєво залежить від того, чи навчаються вони в класах чи школах фізико-математичного профілю. На жаль, доволі часто поглиблення в таких профільних класах та школах відбувається за рахунок розширення змісту.

Досвід показує, що окремі учні вміють обчислювати досить складні границі послідовностей і функцій, а також інтегрувати класи функцій, які не заплановані навіть програмами шкіл із поглибленим вивченням математики, використовуючи при цьому способи, притаманні студентам перших курсів технічних вишів. Водночас учні загальноосвітніх шкіл, де подібного поглиблення за рахунок розширення змісту не відбулося, мають досить поверхове та інтуїтивне уявлення навіть про границю послідовності. Подібний контраст призводить до того, що вчителеві, який готує учнів до ЗНО з математики, потрібно робити суттєву корекцію методики повторення теми «Елементи математичного аналізу» в залежності від аудиторії. Нижче ми будемо подавати методичні рекомендації для вчителів, які працюють із учнями загальноосвітніх шкіл.

У тесті ЗНО-2014 завдання з математичного аналізу склали 8,82% від загальної кількості завдань (2 завдання з альтернативами і 1 завдання з короткою відповіддю).

Дана тема природним чином розбивається на наступні підтеми: «Послідовності, арифметична і геометрична прогресії», «Похідна та її застосування», «Первісна й інтеграл та їх застосування». При повторенні теми «Елементи математичного аналізу» під час підготовки до незалежного тестування, на нашу думку, варто зробити такі акценти.

1. Ми вважаємо, що в шкільному курсі математики природніше вивчати послідовності не як функції, визначені на множині натуральних чисел (традиційне для класичного курсу математичного аналізу означення), а як впорядковані дискретні підмножини множини дійсних чисел. Внаслідок цього, природним є вживання множинної термінології та використання множинної символіки щодо послідовностей. Ми пропонуємо записувати послідовності в фігурних дужках, вживати терміни «елемент послідовності», «сума n перших елементів послідовності», «формула n-го елемента послідовності» тощо.
2. Природність вивчення послідовностей, зокрема, арифметичної та геометричної прогресій, окремо від теми «Функції», а також використання множинної символіки та термінології, можна пояснити ще й тим, що для послідовностей не

розглядаються типові для функцій властивості (область визначення, множина значень, парність/непарність, періодичність тощо), але розглядаються типові для множин властивості (скінченність, обмеженість тощо).

3. Здавалося б, матеріал, що стосується границі числової послідовності, на ЗНО з математики не виноситься, а тому під час повторення його можна обійти. Однак, під час вивчення геометричної прогресії зустрічаються завдання на застосування формули суми всіх елементів нескінченно спадної геометричної прогресії, а адекватне розуміння цієї формули, як і самого поняття суми нескінченної кількості доданків, без поняття границі послідовності майже неможливе. Тому варто розглянути це поняття принаймні на інтуїтивному рівні, обмежившись обчисленнями найпростіших границь послідовностей.
4. Під час вивчення арифметичної та геометричної прогресій варто звернути увагу на ознаки цих прогресій, які дозволяють їх «упізнавати». Досвід показує, що значна кількість учнів ці ознаки просто не пам'ятає, хоч завдання на «впізнавання» арифметичної те геометричної прогресій є досить популярними в тесті ЗНО.
5. Під час вивчення похідної *можна* виділити два підходи до її вивчення – так звані «формальний» та «сутнісний» підходи. З позицій «формального» підходу похідна – це своєрідний оператор (штрих), який перетворює функції за певними «аксіомами» (таблиця похідних, правила диференціювання), а з позицій «сутнісного» підходу похідна є границею відношення приросту функції до приросту аргументу за умови прямування до нуля останнього. «Формальний» підхід дозволяє розв'язувати більшість завдань технічного характеру (обчислення похідних, знаходження проміжків монотонності та екстремумів функцій тощо), але не дає можливості обґрунтувати «аксіоми» дії оператора (штриха) на функції та алгоритми його використання до вивчення властивостей функцій. Ми радимо для учнів з невисоким рівнем підготовки спочатку розглянути «формальний» підхід до сприйняття поняття похідної, а потім «сутнісний», а для «сильних» учнів починати з «сутнісного» підходу, завершуючи «формальним».
6. У тесті ЗНО з математики останні роки популярними є завдання саме на розуміння суті поняття похідної, зокрема, механічного та геометричного змісту похідної. Тому незалежно від способу подачі теоретичного матеріалу замінювати «сутнісний» підхід «формальним» не варто. Більше того, досвід показує, що навички обчислення похідних у більшості випускників сформовані на належному рівні, а от розуміння суті поняття похідної далеко не завжди присутнє.
7. Оскільки далеко не всі випускники знайомі з поняттям невизначеного інтеграла як множини всіх первісних даної функції, то при повторенні цієї теми можливі термінологічні непорозуміння. Особливо це стосується неоднорідної учнівської аудиторії, частина якої знайома з цим терміном, а частина – ні. Ми вважаємо, що для подолання цієї неоднорідності варто дати означення невизначеного інтеграла і показати еквівалентність способу запису властивостей первісних у вигляді властивостей невизначеного інтеграла.

8. Для значної частини учнівської аудиторії означення визначеного інтеграла як границі інтегральної суми є складним. Тому при розгляді цього поняття можна обмежитись його спрощеним розумінням як числа, що обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца. Якщо учнівська аудиторія дозволяє, то можна ввести поняття визначеного інтеграла і більш строго, навівши формулу Ньютона-Лейбніца як теорему. При цьому зауважимо, що абсолютної строгості все одно досягнути не вдасться, оскільки повне і коректне доведення теореми Ньютона-Лейбніца учням старших класів недоступне.
9. У тестах ЗНО з математики досить популярними є завдання на використання геометричного змісту визначеного інтеграла, зокрема, на обчислення окремих інтегралів через площу криволінійної трапеції. Внаслідок цього в частини учнів формується хибне уявлення про те, що визначений інтеграл завжди є додатним числом. Варто за допомогою вдалих прикладів звернути на це увагу випускників.

Особливості вивчення теми «Планіметрія». Нерідко під час підготовки до ЗНО повторення геометрії взагалі і планіметрії зокрема зводиться до розв'язування задач на обчислення, а при розгляді теоретичного матеріалу обираються, в основному, ті відомості, які дозволяють розв'язувати саме такі задачі. При цьому геометричній аксіоматиці, означенням основних геометричних понять, формулюванням теорем, а також задачам на доведення відводиться другорядна роль.

Ми вважаємо такий підхід принципово хибним. Дійсно, по-перше, основна мета вивчення геометрії в школі полягає у формуванні в учнів навичок абстрактного мислення та вміння з правильних посилок шляхом логічних міркувань вивести правильні висновки. Реалізація цієї мети призводить до формування в учнів адекватного світосприйняття, вона є корисною не лише для випускників, що прагнуть реалізувати себе в природничо-математичній сфері, а й для гуманітаріїв. Підготовка до ЗНО також є частиною навчального процесу, а тому має не лише навчальну мету, а також і виховну, і розвиваючу.

По-друге, «натаскування» учнів виключно на задачі обчислювального характеру призводить до того, що учні перестають міркувати, шукаючи в завданнях тесту ЗНО з математики стандартні формулювання, які ведуть до застосування стандартних алгоритмів. Зрозуміло, що ці учні доволі часто потрапляють у «пастки», спеціально розставлені авторами тесту з метою відокремлення «натасканих» учасників тестування від тих, хто вміє міркувати.

Нарешті, по-третє, серед геометричних завдань тесту ЗНО з математики останніх років значну частину складають завдання теоретичного характеру, які перевіряють не лише вміння знаходити правильну числову відповідь, а й знання основних означень і теорем.

У тесті ЗНО-2014 завдання з планіметрії склали 14,71 % від загальної кількості завдань (2 завдання з альтернативами, 1 завдання на встановлення відповідностей і 2 завдання з короткою відповіддю).

Дана тема природним чином розбивається на наступні підтеми: «Найпростіші геометричні фігури на площині», «Трикутники», «Многокутники», «Коло, круг та їх елементи». При повторенні теми «Планіметрія» під час підготовки до незалежного тестування, на нашу думку, варто зробити такі акценти.

1. Вивчення аксіом планіметрії відіграє надзвичайно важливу світоглядну функцію, а тому ми радимо не оминати їх при підготовці до ЗНО з математики. При цьому корисно не лише формально викладати самі аксіоми, а наголошувати на тому, що системи формальних аксіом моделюють, наприклад, юридичну систему законів держави, тобто є набором домовленостей, які мають задовольняти певні вимоги (несуперечливість, повноту, категоричність). Не зайвим буде також короткий огляд «паралельних» неевклідових геометрій, що ще раз підкреслюють висловлену вище тезу про аксіоматику як про систему домовленостей.
2. Під час розгляду теоретичного матеріалу, який стосується геометричних фігур, ми радимо починати повторення з відомостей щодо найбільш загального виду тієї чи іншої геометричної фігури. Наприклад, для трикутників варто спочатку розглянути властивості і твердження, що стосуються довільного трикутника, а вже потім розглядати його часткові випадки: рівнобедрений трикутник, прямокутний трикутник, правильний трикутник тощо. При такому способі подачі матеріалу всі твердження, що стосуються більш загального об'єкта, є справедливими для його часткових випадків, а нові властивості відображають ті обмеження, які накладаються на більш загальний об'єкт.
3. Якщо дозволяє час, то дуже добре було би подавати *основні* теореми та формули планіметрії з доведеннями, це сприяє їх кращому засвоєнню. Дійсно, велику кількість інформації легше запам'ятати, коли вона має певну логічну структуру. Доведення природним чином створюють цю логічну структуру, причому в багатьох випадках простіше згадати чи вивести забуту формулу, пам'ятаючи ідею її виведення, ніж напружувати свою пам'ять у надії, що вона сама «спливе» там.
4. Ми радимо повторювати лише основні формули та твердження планіметрії, не перевантажуючи учнів надмірною їх кількістю. Краще зосередити більше уваги і витратити більше часу на формування в учнів уміння міркувати при розв'язуванні геометричних задач, ніж «натаскувати» їх на конкретні типи цих задач. Досвід показує, що «типових» і «стандартних» геометричних задач настільки багато, що учень зі слабкою базовою підготовкою не здатен їх запам'ятати, а для учнів із кращою базовою підготовкою подібне запам'ятовування просто непотрібне.
5. Корисними при повторенні геометрії (зокрема, планіметрії) є опорні конспекти, своєрідні «досьє» на геометричні фігури. Варто дати учням зразок подібного «досьє» для однієї з геометричної фігури (наприклад, для довільного трикутника і довільного чотирикутника) і запропонувати зробити такі «досьє» для всіх інших геометричних фігур (прямокутного трикутника, трапеції, паралелограма, тощо).
6. При вивченні правильних многокутників формули, що пов'язують довжину сторони многокутника з радіусами вписаного та описаного кіл, краще запам'ятовуються, якщо розглянути так званий «золотий прямокутний трикутник правильного многокутника», утворений центром його симетрії, однією з вершин і основою висоти, проведеної з центра многокутника до його сторони. Катетами цього трикутника є половина сторони та радіус вписаного кола, а гіпотенузою – радіус описаного кола. Гострий кут при центрові многокутника обчислюється за

формулою $\varphi = \frac{\pi}{n}$, де n-кількість сторін многокутника. Таким чином, усі потрібні формули, фактично, є наслідками означень тригонометричних функцій кута φ.

7. Коло в планіметричних задачах фігурує частіше, ніж круг, бо воно неявно зустрічається вже під час систематизації відомостей про многокутники (формули радіусів вписаного та описаного кіл тощо). Тому окремі учні можуть плутати круг та його елементи із колом та його елементами. Ми радимо акцентувати увагу на принциповій відмінності між колом і кругом та акуратно вивести формули довжини дуги та площі сектора, це, зокрема, сприятиме кращому сприйняттю матеріалу про розгортку бічної поверхні конуса під час повторення стереометрії.

Особливості вивчення теми «Стереометрія». Додатково до вже згаданої основної мети вивчення геометрії в школі на стереометрію покладено завдання формування просторової уяви учнів. У тесті ЗНО-2014 завдання зі стереометрії склали 11,76 % від загальної кількості завдань (3 завдання з альтернативами і 1 завдання з короткою відповіддю).

Дана тема природним чином розбивається на наступні підтеми: «Прямі та площини в просторі», «Призми та паралелепіпеди», «Піраміди і зрізані піраміди», «Тіла обертання», «Комбінації геометричних тіл». При повторенні теми «Стереометрія» під час підготовки до незалежного тестування, на нашу думку, варто зробити такі акценти.

1. Як показує досвід, формування просторової уяви є непростим завданням. Тому під час повторення стереометрії для цього можна використовувати просторові моделі, а за їх відсутності – будь-які підручні засоби: ручки, олівці, аркуші паперу тощо.
2. Під час повторення взаємного розташування прямих та площин у просторі зручно використовувати зображення або модель куба. Досвід показує, що практично всі поняття і твердження підтеми «Прямі та площини в просторі» можна проілюструвати на кубі.
3. При повторенні підтеми «Призми та паралелепіпеди» варто зауважити, що паралелепіпеди бувають не лише прямокутні, оскільки в багатьох учнів складається саме така ілюзія. Крім того, важливо не пропускати під час повторення даної підтеми методи побудови перерізів призм, оскільки в окремих завданнях тесту ЗНО з математики саме встановлення виду многокутника, яким є переріз призми, є ключовим етапом розв’язання. Перерізи пірамід зустрічаються в тестових завданнях незалежного оцінювання з математики значно рідше.
4. Варто звернути увагу учнів на те, що зрізана піраміда не є частковим випадком піраміди, а зрізаний конус не є частковим випадком конуса. Тому зрізана піраміда та зрізаний конус не наслідують властивостей піраміди та конуса відповідно.
5. При вивченні тіл обертання варто дати два альтернативних означення циліндра, конуса, сфери та кулі: конструктивне та через обертання плоскої геометричної фігури. Перше означення зручне для адекватного сприйняття елементів циліндра і конуса (основи, бічної поверхні, висоти), а також для розуміння того, що прямий круговий циліндр і прямий круговий конус, які й вивчаються в школі, є частковим випадком більш загального поняття циліндра та конуса. Друге означення зручне

для розуміння способу утворення реальних об'єктів конічної, циліндричної і сферичної форми та практичного їх застосування в реальному житті.

6. Як показує досвід, під час вивчення комбінацій тіл найбільші труднощі в учнів викликають комбінації кулі чи сфери з многогранниками. Коректне зображення, наприклад, піраміди, вписаної в кулю, є досить непростим. Однак, доволі часто для розв'язування задачі саму кулю зображати не потрібно, а досить вказати її центр та відрізок, що є її радіусом.
7. При розв'язуванні задач на комбінації двох тіл обертання часто можна знайти такий плоский переріз, обертання якого навколо деякої прямої відповідає умові задачі. Таким чином, стереометрична задача, по суті, зводиться до планіметричної.

Особливості вивчення теми «Координати і вектори». Векторно-координатний метод у багатьох випадках значно спрощує розв'язування геометричних задач, а тому, безумовно, заслуговує на окрему увагу. Саме тому ми виділяємо під час повторення цей матеріал окремою темою, розглядаючи його одразу після планіметрії та стереометрії. На нашу думку, корисно під час розгляду даної теми повертатися до окремих вивчених раніше теорем і задач геометрії, демонструючи переваги і недоліки векторно-координатного методу.

У тесті ЗНО-2014 завдання, що стосуються теми «Координати і вектори», склали 5,88% від загальної кількості завдань (2 завдання з альтернативами).

Дана тема природним чином розбивається на наступні підтеми: «Системи координат на площині та в просторі», «Вектори та дії над ними», «Застосування векторно-координатного методу до задач геометрії». При повторенні теми «Координати і вектори» під час підготовки до незалежного тестування, на нашу думку, варто зробити такі акценти.

1. У шкільному курсі математики, на відміну від класичних університетських курсів, спочатку вивчаються координати (послідовно: на прямій, на площині, у просторі), а потім вектори. Тому доведення окремих тверджень, які з використанням векторного змісту координат, є елементарними, без використання векторів є досить складними для сприйняття учнями. Наприклад, для доведення формули координат точки, що ділить відрізок у даному відношенні, потрібно використовувати узагальнену теорему Фалеса, яка сама по собі є непростою для сприйняття. Тому ми радимо для підготовленої учнівської аудиторії починати вивчення даної теми з векторів та лінійних операцій над ними, далі розглянути геометричний зміст координат вектора і точки, а лише потім переходити до вивчення систем координат. Якщо ж рівень аудиторії не дозволяє, то варто, притримуючись традиційної схеми розгляду даної теми, просто опустити при повторенні обґрунтування окремих тверджень.
2. У традиційному шкільному курсі геометрії вивченню векторів приділяється не дуже багато часу, а тому варто «рекламувати» векторно-координатний метод, демонструючи, наскільки простими стають розв'язання окремих задач із використанням цього методу. Досвід показує, що особливо добре учні сприймають доведення теореми Піфагора в три рядки через скалярний добуток, аналогічне за довжиною доведення перпендикулярності діагоналей паралелограма, доведення

властивості середньої лінії трапеції, а також задачі на знаходження кутів, особливо між мимобіжними прямими в просторі.

3. Ми радимо при повторенні розглядати вектори і координати на площині та в просторі паралельно, оскільки послідовний розгляд не вносить принципової новизни в матеріал, але забирає значно більше часу.
4. Під час розгляду даної теми природним є повторення основних геометричних перетворень площини та простору: паралельного перенесення, симетрій відносно точки, прямої та площини, гомотетії тощо. Особливо варто звернути увагу на аналітичне задання паралельного перенесення, оскільки воно є досить незвичним для учнів та не вивчається для інших перетворень. Однак, якщо час і учнівська аудиторія дозволяють, то можна навести і формули, які задають симетрії відносно осей координат, координатних площин та початку координат.
5. Традиційно непросто для учнів зі слабкою просторовою уявою даються завдання на побудову точок у просторовій системі координат, на знаходження їх проекцій на координатні осі та площини, а також на знаходження точок, симетричних даній точці відносно координатних осей і площин. Розгляд аналітичного задання цих симетрій та проекцій на координатні площини та осі значно спрощує розв’язання подібних завдань.

Особливості вивчення теми «Елементи стохастики». Стохастика (об’єднувальний термін для комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики) відіграє в практичній діяльності людини надзвичайно важливу роль, оскільки більшість явищ і процесів реального світу є стохастичними. Не випадково, перші задачі на обчислення ймовірностей за класичним означенням, статистичні діаграми та графіки починають вивчатися вже у 5-9 класах. Більш системне вивчення стохастики здійснюється в старшій школі після опанування необхідних для цього знань із алгебри, геометрії та початків аналізу.

У тесті ЗНО-2014 завдання, що стосуються комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики (стохастики), склали 5,88% від загальної кількості завдань (1 завдання з альтернативами і 1 завдання на встановлення відповідностей).

Дана тема природним чином розбивається на наступні підтеми: «Комбінаторика», «Різні означення ймовірності», «Основні теореми теорії ймовірностей», «Елементи математичної статистики». При повторенні теми «Елементи стохастики» під час підготовки до незалежного тестування, на нашу думку, варто зробити такі акценти.

1. Ми радимо починати повторення даної теми не з комбінаторики, як традиційно робиться в підручниках, а з введення поняття ймовірності випадкової події за класичним, геометричним та статистичним означеннями. Це дозволить, уникаючи громіздких обчислень за комбінаторними формулами, зрозуміти суть поняття ймовірності. Крім того, окремі задачі на обчислення ймовірностей можуть мотивувати вивчення комбінаторики, що, безумовно, є корисним.
2. Варто наголосити, що комбінаторика і теорія ймовірностей є двома самостійними розділами математики, оскільки в окремих учнів через традиційне вивчення ймовірності після комбінаторики може скластися враження, що теорія ймовірностей є підрозділом комбінаторики. З іншого боку,вивчення комбінаторики

після розгляду поняття ймовірності може призвести до формування протилежної думки – що комбінаторика є підрозділом теорії ймовірностей. Дуже вдалим для «розділення» цих двох розділів математики є розгляд формули бінома Ньютона.

3. Варто наголосити, що на практиці вибір навмання здійснюється нечасто, а тому в багатьох випадках із реального життя застосування класичного та геометричного означень некоректне. У цьому випадку найчастіше звертаються до статистичного означення, яке здебільшого і є джерелом всіх застосовних на практиці значень ймовірностей випадкових подій.
4. Ми радимо під час вивчення комбінаторики звернути особливу увагу не лише на комбінаторні формули кількості сполук того чи іншого виду, а й на правила додавання та множення, за допомогою яких і обґрунтовуються всі ці формули. Доволі часто комбінаторну задачу можна розв’язати і без застосування сполук, обмежившись лише цими правилами.
5. Дуже важливими поняттями в теорії ймовірностей є поняття несумісних і незалежних подій, які нерідко учні плутають. Ми радимо за допомогою простих життєвих прикладів показати, що існують сумісні залежні, несумісні залежні, сумісні незалежні і несумісні незалежні події.
6. Досить неприродним на нашу думку є розгляд у традиційному курсі елементів стохастики теорем для незалежних подій (в тому числі й для повторних незалежних подій), але відсутність розгляду теорем для залежних подій. Якщо час і учнівська аудиторія дозволяє, ми радимо «для симетрії» ввести поняття умовної ймовірності та навести принаймні теорему множення для залежних подій, а теореми про формулу повної ймовірності та формулу Байєса можна опустити.
7. Після вивчення елементів математичної статистики за традиційною схемою у окремих учнів може скластися враження, що поняття середнього значення тотожне поняттю середнього арифметичного значення. Насправді ж існує досить багато простих прикладів, які показують, що середнє значення статистичної сукупності далеко не завжди можна обчислити як середнє арифметичне. Ми радимо, якщо дозволяє час, навести ці приклади інших середніх (середнього геометричного, середнього гармонійного, середнього квадратичного тощо), не заглиблюючись у технічні деталі та властивості.

Висновки. Проблема належної підготовки українських випускників до незалежного оцінювання якості знань з математики на сьогодні є надзвичайно актуальною. Важливими кроками до розв’язання цієї проблеми, на нашу думку, є створення якісної навчально-методичної літератури та розробка системи (чи кількох альтернативних систем) підготовки до ЗНО з математики з належною їх апробацією на підготовчих курсах різних термінів, індивідуальних заняттях тощо.

Нами створено навчально-методичну літературу, розроблено і апробовано систему підготовки до ЗНО з математики, досвідом реалізації якої ми хочемо поділитися з читачами журналу в даній серії публікацій. Однак, ми розуміємо, що будь-яка система підготовки потребує постійної корекції та модернізації, а тому будемо раді будь-яким конструктивним зауваженням з боку фахівців та плідній дискусії в даному напрямку. Усі зауваження та пропозиції щодо тематики даної публікації можна надсилати або на адресу збірника, або безпосередньо на електронну пошту автора shkolnyi@ukr.net.

Зичимо успіху всім учителям та репетиторам, які здійснюють підготовку українських випускників до зовнішнього незалежного оцінювання якості знань з математики!

Список використаної літератури

1. Захарійченко Ю.О., Школьний О.В. Твій репетитор. Математика: навчальний посібник для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання – К.: Ґенеза, 2013.– 264с.
2. Захарійченко Ю.О., Школьний О.В. Математика. Тренувальні тести: навчальний посібник для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання.– К.: Ґенеза, 2013.– 96с.
3. Захарійченко Ю.О., Школьний О.В., Захарійченко Л.І., Школьна О.В. Повний курс математики в тестах. Енциклопеція тестових завдань. 3-тє вид. – Х.: Ранок, 2013.– 496с.
4. Гальперіна А.Р., Захарійченко Ю.О., Школьний О.В. Математика. Збірник типових тестових завдань.— Х.: Веста, 2012.— 216с.
5. Захарійченко Ю.О., Школьний О.В. Типи тестових завдань з математики та особливості їх побудови // Математика в школі.– 2008, №10.– С.15-24.
6. Школьний О.В. Захарійченко Ю.О. Про завдання з математики на перевірку здібностей // Математика в школі.– 2010, №11.– С.5-12.
7. Школьний О.В., Захарійченко Ю.О. Особливості розв’язування тестових завдань із математики (частина 1) // Математика в рідній школі.– 2014, №1.– С.8-12.
8. Школьний О.В., Захарійченко Ю.О. Особливості розв’язування тестових завдань із математики (частина 2) // Математика в рідній школі.– 2014, №2.– С.2-7.
9. Школьний О.В., Захарійченко Ю.О. Особливості розв’язування тестових завдань із математики (частина 3) // Математика в рідній школі.– 2014, №3.– С.5-10.

Школьный А.В. О системе подготовки в внешнему независимому оцениванию качества знаний по математике.

Данная работа посвящена системе качественной подготовки к ВНО по математике учеников украинской старшей школы. Рассмотрены особенности внешнего независимого оценивания качества знаний по математике по сравнению с другими видами итогового оценивания, приведены методические рекомендации по подготовке учащихся к данному виду тестирования, касающиеся всех тем школьного курса математики.

На сегодня в Украине нет единой общегосударственной схемы подготовки к ВНО по математике, большинство практикующих учителей осуществляют ее по своему усмотрению. К сожалению, далеко не все имеющиеся пособия по подготовке к ВНО имеют надлежащий уровень утверждения и удовлетворительный уровень качества. В каждом

отдельном пособии, как правило, предложен собственный подход к подготовке к ВНО по математике, причём довольно часто этот подход является калькой с пособий по подготовке к вступительным экзаменам еще советских времен, в которых форме представления тестовых заданий уделяется мало внимания.

Считается, что «когда ученик хорошо знает математику, то форма тестового задания является непринципиальной». Мы считаем подобный подход к подготовке к ВНО по математике принципиально ошибочным, поскольку по статистике даже «сильные» ученики больше ошибок допускают в якобы «простых» задачах с альтернативами, которые имеют специфические «ловушки». По нашему мнению, не учитывать специфику проведения тестирования по математике при подготовке к нему, по крайней мере, недальновидно.

В течение длительного времени мы занимаемся подготовкой учащихся к ВНО по математике и накопили в этом направлении определенный опыт, которым хотим поделиться с читателями. Предлагаемые в данной статье подходы к подготовке к тестированию по математике апробированы нами во время работы в системе довузовской подготовки Национального университета «Киево-Могилянская академия» с 2004 по 2014 год на дневном, вечернем и интенсивном отделениях. Упомянутые подходы также нашли свое отражение в наших многочисленных пособиях по подготовке к ВНО по математике и публикациях в профессиональных научно-методических изданиях.

Ключевые слова. *Оценивание учебных достижений по математике, ученики старшей школы, государственная итоговая аттестация, внешнее независимое оценивание.*

Shkolnyi. O. On the system of preparation to external independent assessment of knowledge quality in mathematics.

This paper is dedicated to qualitative preparation to math EIA for Ukrainian senior school pupils. We consider the features of independent external assessment of quality of knowledge in math compared with other types of final assessment and put methodical recommendations for preparing pupils to this type of testing related to all topics of school mathematics.

Keywords. *Math achievements assessment, senior school pupils, state final attestation, independent external assessment.*