Keywords: *elementary mathematics, practical solution of mathematical problems, intending teachers of mathematics, teachers training universities, curriculum, work program, educational and professional program of M. Dragomanov National Pedagogical University.*

УДК 378.147:51

Томащук О. П., Репета В. К., Лещинський О. Л.

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ ПРОБЛЕМНОГО НАВЧАННЯ В ПРОЦЕСІ ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН У ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ

У статті розкрито зміст методів проблемного навчання та надано рекомендації щодо використання цих методів на лекціях і практичних заняттях з математичних дисциплін. Наведено фрагмент лекції з використанням методів проблемного навчання.

Ключові слова: *математична дисципліна, проблемне навчання, частково-пошуковий метод, евристична бесіда, дослідницький метод, проблемна лекція, похідна, критична точка функції, точка локального екстремуму функції.*

Одним із основних завдань вищого навчального закладу є підготовка фахівців, здатних самостійно здобувати нові знання, розв'язувати проблеми, які виникають як у професійній діяльності, так і в повсякденному житті. Одним із шляхів розв'язування цього завдання є впровадження у навчальний процес прогресивних методів навчання, зокрема, методів проблемного навчання. Важливою особливістю проблемного навчання є те, що воно сприяє формуванню у студентів пізнавального інтересу до вивчення навчальної дисципліни, а, отже, забезпечує міцне засвоєння навчального матеріалу. Крім цього, участь у розв'язуванні проблем, створених викладачем в процесі викладання навчальної дисципліни, розвиває мислення студентів, формує у них інтелектуальні і творчі здібності.

Організація проблемного навчання передбачає створення викладачем проблемних ситуацій та необхідних умов для розв'язування проблем. Можна виділити такі основні способи створення проблемних ситуацій в процесі навчання математичних дисциплін:

1. Постановка перед студентами теоретичної проблеми пояснення зовнішніх суперечностей у спостережуваних фактах, явищах, процесах; доведення твердження, встановленого на основі спостережень або в результаті вимірювань, обчислень, виведення формули, правила тощо.

2. Створення проблемної ситуації шляхом розгляду історії виникнення і розвитку якого-небудь математичного поняття або практичного його застосування в сучасних умовах.

3. Постановка перед студентами проблеми аналізу і узагальнення засвоєних раніше знань і умінь.

4. Постановка перед студентами проблеми знаходження шляхів і способів розв'язування задач нового або зміненого вигляду [3, с. 126-127].

Проблемне навчання здійснюється за допомогою трьох методів: методу проблемного викладення навчального матеріалу, частково-пошукового або евристичного методу, дослідницького методу.

Спільне у всіх цих методів – навчання шляхом розв'язування пізнавальних проблем, а відрізняються вони за рівнем самостійності пошукової діяльності студентів.

Метод проблемного викладення навчального матеріалу передбачає залучення студентів у пізнавальну діяльність в умовах, коли викладач сам ставить проблему, сам показує шляхи її розв'язування наукою, а студенти слідкують за ходом думки викладача, разом з ним розмірковують, тим самим включаючись в атмосферу наукового пошуку. При використанні цього методу студенти вчаться логічно міркувати під час розв'язування проблем, глибше засвоюють матеріал.

Суть **частково-пошукового (евристичного) методу** навчання полягає в тому, що викладач (як і при методі проблемного викладення навчального матеріалу) сам планує етапи розв'язування проблеми, а студент сприймає та осмислює проблему і за пропозицією викладача самостійно бере участь у виконанні окремих етапів її розв'язування. Таким чином, студент не тільки відтворює знання, а й, що найголовніше, здійснює невеликий пошук. Наприклад, він може сформулювати проблему або зробити висновок з наведених даних, висловити гіпотезу або запропонувати спосіб її доведення (спростування). Істотним тут є те, що студенти розв'язують проблему не повністю від початку і до завершення, а лише частково, на окремих етапах. Звідси і назва методу – частково-пошуковий.

Найбільш поширеною формою частково-пошукового методу є евристична бесіда. В процесі її проведення викладач не повідомляє студентам готових знань, а вміло поставленими запитаннями змушує студентів актуалізувати раніше набуті знання, власний життєвий досвід і на цій основі підводить їх до самостійного формулювання нових правил, тверджень, висновків.

Дослідницький метод означається як спосіб організації пошукової діяльності студентів, спрямований на розв'язування нових для них пізнавальних проблем. Важливо чітко відрізняти частково-пошуковий метод від дослідницького, суть якого на відміну від першого, полягає в пошуку розв'язання не часткової, а цілісної проблеми.

У процесі навчання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах традиційно використовують два види занять: лекції та практичні заняття. Розкриємо особливості проблемної організації лекцій і практичних занять з математичних дисциплін та дамо деякі рекомендації щодо їх організації та проведення.

Проблемна лекція з математичної дисципліни. Для розвитку інтелекту студентам важливо бачити еталон культури мислення. Проблемна лекція з математичної дисципліни якраз і покликана показати студентам зразки ефективної розумової діяльності, зразки прояву творчої думки.

Оскільки лекція є головною інформаційною магістраллю в навчальному процесі вищої школи, то вона покликана забезпечувати максимальну передачу і засвоєння навчального матеріалу. Ця вимога до лекції визначає методи, які можуть бути застосовні на проблемних лекціях. Переважаючим на них повинен бути *метод проблемного викладення навчального матеріалу*, іноді – *частково-пошуковий метод*.

Проблемні практичні заняття з математичних дисциплін. На практичних заняттях частка самостійності студентів у розв'язуванні проблем більша, ніж на лекціях. На цих заняттях викладач створює проблемну ситуацію і частіше всього формулює проблему. Надалі його роль зводиться до керування і контролю за розв'язуванням проблеми. Названі завдання не менш складні, ніж формулювання і показ зразка розв'язування проблем, які переважають на лекціях. Тому потрібна завчасна і ґрунтовна підготовка до проведення проблемного практичного заняття. При цьому слід виходити із врахування принаймні двох умов.

По-перше, на практичних заняттях відбувається поглиблене повторення теоретичного матеріалу, який студенти вивчали на лекціях. Це означає, що один із важливих елементів проблемного навчання – елемент новизни для виникнення проблемної ситуації – для студентів вже розкритий на лекції. Тому вимагається таким чином ставити студентам запитання, щоб в них містився елемент новизни.

По-друге, задачі і приклади, які розв’язуватимуться після актуалізації теоретичних знань, повинні як розширювати і поглиблювати теоретичні знання, показувати їх практичне значення, так і містити елемент проблемності.

На проблемних практичних заняттях з математичних дисциплін переважаючим повинен бути *частково-пошуковий (евристичний) метод*. Цей метод найбільш повно відповідає завданням, які стоять перед практичними заняттями і відповідає їх дидактичній структурі.

На практичних заняттях з математичних дисциплін можливе використання також дослідницького методу навчання. Оскільки цей метод передбачає максимальну самостійність студентів при розв’язуванні проблем (задач), то найчастіше він повинен використовуватися при проведенні самостійних і контрольних робіт, при розв’язуванні домашніх завдань.

Як приклад, наведемо фрагмент лекції з вищої математики з теми “Застосування похідної до знаходження точок локального екстремуму функції”, побудованої проблемно.

Лекцію потрібно розпочати із введення понять точок локального максимуму і точок локального мінімуму функції. Для цього доцільно використати відповідні графічні ілюстрації. Побудувавши рисунок 1, поставити запитання: якою властивістю володіє точка x_0? Студенти без особливих труднощів зазначають, що значення функції f у точці x_0 є більшим за значення цієї функції у точках x з деякого околу точки x_0 за умови, що $x \neq x_0$. Відповідний висновок студенти самостійно роблять щодо точки x_0, зображеної на рисунку 2. Після цього викладач формулює означення точок локального максимуму і точок локального мінімуму функції.

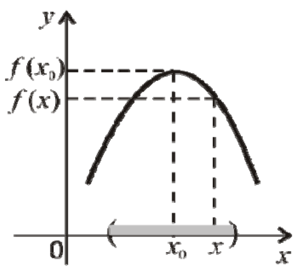

Рис. 1

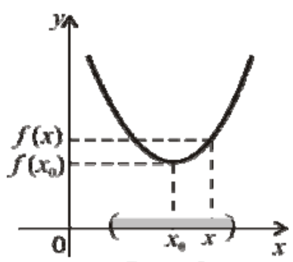

Рис. 2

Озн. Точку x_0 називають **точкою локального максимуму (точкою локального мінімуму) функції *y*=*f*(*x*)**, якщо існує окіл цієї точки такий, що для всіх *x* з цього околу, крім $x = x_0$, виконується нерівність $f\left(x_0\right) > f\left(x\right)$ ($f\left(x_0\right) < f\left(x\right)$).

Студентам потрібно пояснити, що слово “локальний” (місцевий) означає, що значення функції f у точці x_0 є найбільшим (найменшим) порівняно не з усіма значеннями цієї функції в області її визначення, а з тими її значеннями, яких вона набуває в точках деякого околу точки x_0.

Також студентам слід зауважити, що:

1) з наведеного означення випливає, що точками локального максимуму чи локального мінімуму можуть бути лише *внутрішні точки* області визначення функції;

2) функція може мати декілька точок локального максимуму і локального мінімуму, а може не мати жодної (навести відповідні графічні ілюстрації).

Далі викладач формулює означення точок локального екстремуму функції та локальних екстремумів функції. Після цього викладач зазначає студентам, що надалі слово “локальний” будемо опускати.

Викладач: Якщо функція задана графічно, то знаходити точки екстремуму дуже просто.

Формулюється проблема: як знайти точки максимуму і мінімуму функції, якщо вона задана аналітично? До розв’язування цієї проблеми викладач залучає студентів.

На дошці викладач малює графіки таких функцій: $f(x)=x^2$, $f(x)=-x^2+4$, $f(x)=|x|$, $f(x)=-|x|+3$ (рисунки 3-6). Студенти встановлюють, що для функцій $f(x)=x^2$ і $f(x)=|x|$ точка $x_0=0$ є точкою мінімуму, а для функцій $f(x)=-x^2+4$ і $f(x)=-|x|+3$ точка $x_0=0$ є точкою максимуму функції.

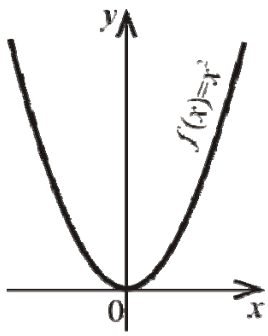

Рис. 3

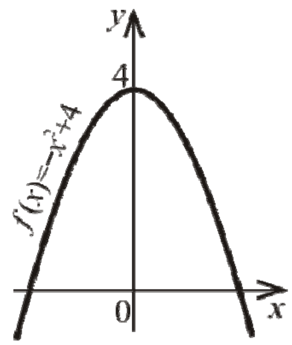

Рис. 4

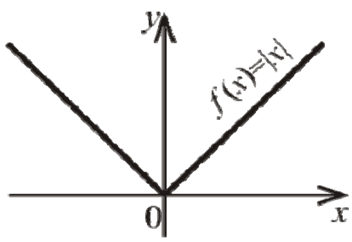

Рис. 5

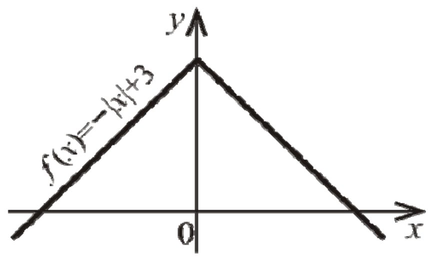

Рис. 6

Викладач: Що можна сказати про існування похідної кожної із заданих функцій у точці $x_0=0$?

Студенти: У точці $x_0=0$ похідна кожної із функцій $f(x)=x^2$ і $f(x)=-x^2+4$ існує, а похідна кожної із функцій $f(x)=|x|$ і $f(x)=-|x|+3$ не існує.

Як показує досвід, більшість студентів зразу ж (самостійно або при незначній допомозі викладача) знаходять відповідь на поставлене запитання, адже на попередніх заняттях було доведено, що у точці $x_0=0$ похідна функції $f(x)=|x|$ не існує.

Викладач: У точці $x_0=0$ похідна кожної із функцій $f(x)=x^2$ і $f(x)=-x^2+4$ існує. А чому дорівнює її значення у точці $x_0=0$?

Студенти: Нулю. (Цей висновок студенти роблять або спираючись на геометричний зміст похідної, або шляхом знаходження значення похідної кожної із цих функцій у точці

$x_0 = 0$).

Викладач: Отже, яку можна висунути гіпотезу?

Студенти: Якщо x_0 – точка максимуму або точка мінімуму функції *f*, то похідна цієї функції в точці x_0 або не існує, або існує і тоді її значення в цій точці дорівнює нулю.

Викладач: Спробуємо це довести.

Слід відзначити, що в даному випадку викладачем використаний один із зазначених вище способів створення проблемної ситуації: постановка перед студентами теоретичної проблеми – доведення твердження, яке встановлене на основі спостережень і міркувань наочності.

До доведення сформульованого твердження викладач активно залучає студентів шляхом постановки до них відповідних запитань.

Викладач: Що задано і що треба довести?

Студенти: Задано: x_0 – точка максимуму або точка мінімуму функції *f*; треба довести: похідна функції *f* у точці x_0 не існує або існує і тоді $f'(x_0) = 0$.

Викладач: Коли ми маємо певну функцію *f* і x_0 – її точка екстремуму, то зрозуміло, що стосовно існування похідної цієї функції у точці x_0 можливі лише два випадки: похідна функції *f* у точці x_0 або існує, або не існує (і це підтвердили наведені приклади конкретних функцій). Отже, що залишається довести?

Студенти: Що у випадку, коли похідна функції *f* у точці екстремуму x_0 існує, то її значення обов'язково дорівнює нулю.

Використовуючи означення похідної функції в точці, викладач доводить, що у випадку, коли $f'(x_0)$ існує, то обов'язково $f'(x_0) = 0$.

Після цього студенти за допомогою викладача формулюють таке твердження:

Теорема 1 (необхідна умова існування точки екстремуму функції). Якщо x_0 – точка екстремуму функції *f*, то $f'(x_0) = 0$ або похідна функції *f* у точці x_0 не існує.

Надалі виявляється доцільним ввести поняття критичної точки функції, сформулювавши таке означення: критичною точкою функції називається така точка її області визначення, в якій похідна цієї функції дорівнює нулю або не існує.

Викладач: Як по-іншому можна сформулювати теорему 1, використовуючи поняття критичної точки функції?

Студенти: Якщо x_0 – точка екстремуму функції *f*, то ця точка є критичною точкою цієї функції.

Викладач формулює наступну проблему: а чи не буде справедливою обернена теорема, тобто: якщо x_0 – критична точка функції *f*, то ця точка є точкою екстремуму цієї функції? (До речі можна запропонувати студентам самостійно сформулювати обернену теорему).

Як показує досвід, у висуненні гіпотез у студентів немає одностайності. Для того, щоб

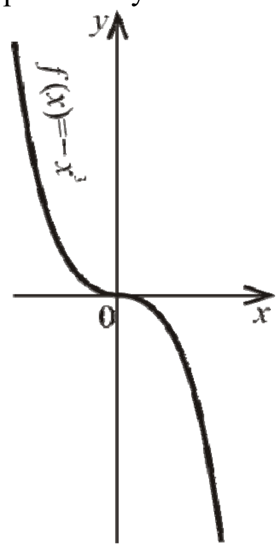

Рис. 7

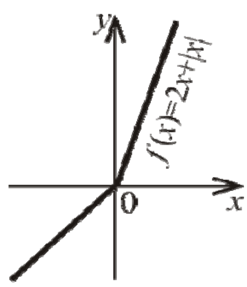

Рис. 8

допомогти їм у відшуканні правильної гіпотези, викладач малює на дошці графіки, наприклад, таких функцій: $f(x)=x^2$, $f(x)=-x^2+4$, $f(x)=|x|$, $f(x)=-x^3$, $f(x)=2x+|x|$ (рисунки 3-5, 7-8).

Викладач: Чи є точка $x_0=0$ критичною точкою для кожної із наведених функцій?

Студенти самостійно або за допомогою викладача встановлюють, що в точці $x_0=0$ похідна функцій $f(x)=|x|$ і $f(x)=2x+|x|$ не існує, а похідна функцій $f(x)=x^2$, $f(x)=-x^2+4$, $f(x)=-x^3$ існує і її значення в цій точці дорівнює нулю. На основі цього студенти роблять висновок, що для кожної із заданих функцій точка $x_0=0$ є критичною.

Викладач: А чи для кожної із наведених функцій точка $x_0=0$ є точкою екстремуму?

Студенти: Ні. Для функцій $f(x)=-x^3$ і $f(x)=2x+|x|$ ця точка не є ні точкою максимуму, ні точкою мінімуму?

Викладач: Отже, який можна зробити висновок про справедливість твердження: якщо x_0 – критична точка функції *f*, то ця точка є точкою екстремуму цієї функції?

Студенти: Це твердження є неправильним.

Викладач: Однак, як видно з наведених прикладів, точки екстремуму функції містяться серед її критичних точок. І тому завдання полягає в тому, щоб навчитися серед критичних точок функції виділяти її точки екстремуму. Давайте проаналізуємо графіки наведених функцій.

Викладач: Якими за знаком є значення похідної функції $f(x)=x^2$ у точках $x\in(-\infty;0)$ і $x\in(0;+\infty)$?

Використовуючи геометричний зміст похідної або безпосередньо знайшовши $f'(x)=2x$, студенти встановлюють $f'(x)<0$ для всіх $x\in(-\infty;0)$ і $f'(x)>0$ для всіх $x\in(0;+\infty)$.

Викладач: Отже, який можна зробити висновок щодо зміни знаку похідної функції $f(x)=x^2$ при переході зліва направо через критичну точку $x_0=0$?

Студенти: При переході зліва направо через критичну точку $x_0=0$ похідна функції $f(x)=x^2$ змінює знак із "–" на "+". (Такий же самий висновок щодо зміни знаку похідної при переході через точку $x_0=0$ студенти роблять і для функції $f(x)=|x|$).

Задаючи подібні запитання щодо функції $f(x)=-x^3$ і $f(x)=2x+|x|$ студенти з'ясовують, що при переході зліва направо через критичну точку $x_0=0$ похідна кожної із цих функції не змінює знаку (для функції $f(x)=-x^3$: $f'(x)<0$ як для всіх $x\in(-\infty;0)$, так і для всіх $x\in(0;+\infty)$, а для функції $f(x)=2x+|x|$: $f'(x)>0$ як для всіх $x\in(-\infty;0)$, так і для всіх $x\in(0;+\infty)$).

Проаналізувавши графік функції $f(x)=-x^2+4$, студенти встановлюють, що при переході зліва направо через критичну точку $x_0 = 0$ похідна цієї функції змінює знак із “+” на “–”.

Викладач: Отже, яку можна висунути гіпотезу щодо існування точки екстремуму функції?

Як показує досвід, більшість студентів без утруднень формулюють таке твердження: якщо при переході зліва направо через критичну точку x_0 похідна функції *f* змінює знак з “–” на “+”. то x_0 – точка мінімуму цієї функції; якщо при переході зліва направо через критичну точку x_0 похідна функції *f* змінює знак з “+” на “–”. то x_0 – точка максимуму цієї функції; якщо ж при переході через критичну точку x_0 похідна функції *f* не змінює знаку, то x_0 не є точкою екстремуму цієї функції. Викладач повинен лише дещо підкоригувати це твердження, сформулювавши наступну теорему:

Теорема 2 (достатня умова існування точки екстремуму функції). Нехай функція $y = f(x)$ неперервна в деякому околі критичної точки x_0 та існує похідна цієї функції в усіх точках цього околу, за винятком, можливо, самої точки x_0. Тоді: 1) якщо при переході точки *x* через точку x_0 зліва направо $f'(x)$ змінює знак з “–” на “+”. то точка x_0 є точкою мінімуму функції *f*, а якщо $f'(x)$ змінює знак з “+” на “–”. то точка x_0 є точкою максимуму функції *f*; 2) якщо при переході точки *x* через точку x_0 $f'(x)$ не змінює знаку, то x_0 не є точкою екстремуму функції *f*.

Доведення цього твердження є нескладним і тому доцільно його провести, використавши метод евристичної бесіди.

Після цього викладач ставить питання про необхідність складання алгоритму знаходження точок екстремуму і екстремумів функції *f*, заданої аналітично.

Викладач: Як ми вже з’ясували всі точки екстремуму функції містяться серед її критичних точок. Тому, що в першу чергу слід знайти?

Студенти: Критичні точки функції *f*.

Викладач: Але що треба знати, щоб знайти ці точки?

Студенти (згадуючи означення критичної точки функції): Область визначення функції *f* (*D*(*f*)) і похідну цієї функції.

Викладач: Отже, якими будуть перші кроки алгоритму знаходження точок екстремуму і екстремумів функції *f*?

Студенти: 1. *Знайти D*(*f*). 2. *Обчислити* $f'(x)$. 3. *Визначити критичні точки функції f.*

Викладач: Очевидно, що як і у випадку дослідження функції на монотонність, далі слід позначити критичні точки на числовій прямій, на якій попередньо зобразити *D*(*f*). У результаті цього утворяться інтервали, на кожному з яких похідна функції *f* зберігає знак, тобто є додатною або від’ємною (при необхідності слід з’ясувати разом із студентами, чому на кожному із утворених інтервалів похідна функції *f* буде або додатною, або від’ємною). Отже, якими будуть наступні кроки?

Студенти: 4. На числовій прямій зобразити D(f) та позначити критичні точки функції f. 5. Визначити знак $f'(x)$ *на кожному з утворених інтервалів (для цього необхідно обчислити значення* $f'(x)$ *у будь-якій одній точці з кожного інтервалу).*

Викладач: Як встановити, які із критичних точок будуть точками екстремуму?

Студенти: Якщо при переході через критичну точку похідна функції *f* змінює знак, то ця точка буде точкою екстремуму цієї функції, а якщо не змінює знаку, то не буде її точкою екстремуму.

Викладач: Отже, яким буде наступний крок?

Студенти: 6. За характером зміни знаку похідної функції f при переході через критичні точки знайти точки екстремуму функції f (якщо при переході точки x через точку x_0 *зліва направо* $f'(x)$ *змінює знак з "+" на "–". то точка* x_0 *є точкою максимуму функції f, а якщо* $f'(x)$ *змінює знак з "–" на "+". то точка* x_0 *є точкою мінімуму функції f; 2) якщо при переході точки x через точку* x_0 $f'(x)$ *не змінює знаку, то* x_0 *не є точкою екстремуму функції f).*

Викладач: Як знайти максимуми і мінімуми функції *f*?

Студенти: Треба обчислити значення цієї функції в знайдених точках максимуму і точках мінімуму. Тобто останній крок буде таким: 7. *Обчисливши значення функції f в знайдених точках максимуму і мінімуму, знайти максимуми і мінімуми функції f.*

Далі викладач розв'язує приклад на знаходження точок екстремуму і екстремумів функції, використовуючи складений алгоритм.

У наведеному фрагменті лекції в основному використовується частково-пошуковий метод навчання. Студенти беруть активну участь на кожному етапі розв'язування проблем: висувають гіпотези, "підказують" викладачеві наступні кроки у доведенні тверджень, роблять висновки із проведених ним міркувань тощо.

Як показує досвід, використання методів проблемного навчання сприяє свідомому засвоєнню студентами теоретичного матеріалу, розвиває інтелектуальні і творчі здібності студентів, підвищує пізнавальний інтерес. І саме це і вказує на необхідність їхнього використання в процесі викладання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах.

Використана література:

1. *Алексюк А. М.* Загальні методи навчання в школі / А. М. Алексюк. – К. : Рад. школа, 1973. – 264 с.
2. *Бевз Г. П.* Методика викладання математики : навч. посібник / Г. П. Бевз . – К. : Вища школа, 1989. – 367 с.
3. *Фридман Л. М.* Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о пед. психологии / Л. М. Фридман. – М. : Просвещение, 1983. – 160 с.

References:

1. *Aleksyuk A. M.* Zahal'ni metody navchannya v shkoli / A. M. Aleksyuk. – K. : Rad. shkola, 1973. – 264 s.
2. *Bevz H. P.* Metodyka vykladannya matematyky: Navch. posibnyk / H. P. Bevz. – K. : Vyshcha shkola, 1989. – 367 s.
2. *Fridman L. M.* Psikhologo-pedagogicheskiye osnovy obucheniya matematike v shkole: Uchitelyu matematiki o ped. psikhologii / L. M. Fridman. – M. : Prosveshcheniye, 1983. – 160 s.

Томащук А. П., Репета В. К., Лещинский О. Л. Использование методов проблемного обучения в процессе преподавания математических дисциплин в высших учебных заведениях.

В статье раскрыто содержание методов проблемного обучения: метода проблемного изложения учебного материала, частично-поискового (эвристического) метода, исследовательского метода. Даны рекомендации по использованию этих методов на лекциях и практических занятиях по математическим дисциплинам. Приведен фрагмент лекции по высшей математике по теме "Применение производной к нахождению точек локального экстремума функции" с использованием *методов проблемного обучения. В приведенном фрагменте лекции в основном используется частичной-поисковый метод обучения.*

***Ключевые слова**: математическая дисциплина, проблемное обучение, частично-поисковый метод, эвристическая беседа, исследовательский метод, проблемная лекция, производная, критическая точка функции, точка локального экстремума функции.*

Tomashchuk O. P., Repeta V. K., Leshchynskyi O. L. The use of problem-based learning in teaching of mathematical disciplines in higher education.

The article exposes the content of problem-based learning methods and gives recommendations on their usage in lectures and seminars of mathematical disciplines. A lecture fragment that uses methods of problem-based learning is provided.

***Keywords:** mathematical discipline, problem-based learning, partial search method, heuristic discussion, research method, problem-based lecture, derivative, critical point of a function, local extremum point of a function.*