ФІЗИКА

УДК 378:147:53

Бендик А. А., Пустовий О. М., Шепета О. М.

ІСТОРІЯ СТВОРЕННЯ ТЕОРІЇ ГРУП ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ У ФІЗИЦІ ТВЕРДОГО ТІЛА

У статті розповідається історія створення вчення про просторові групи та їх застосування у квантовій теорії твердого тіла. Показано, що саме застосування методу теорії груп до дослідження електронного енергетичного спектра і хвильових функцій обумовило успіхи, досягнуті в теорії напівпровідників і металів. Цей матеріал буде цікавим для студентів, якщо його використовувати на лекціях із загальної фізики, математики та фізики твердого тіла.

Ключові слова: *просторові групи, класи еквівалентних форм, Абелеві групи, теорія Галуа, кільця, поля, векторні простори, лінійні алгебраїчні групи, групи Лі, симетрія, кристалічні гратки, трансляції, фактор-група.*

Теорія груп є одним з найпотужніших інструментів для дослідження фізичних систем, які мають симетрію. До таких систем відносяться молекули та кристали.

Взагалі, поняття групи виникло у XVIII ст. та походить з кількох дисциплін: теорії розв'язання алгебраїчних рівнянь в радикалах, проективній геометрії, теорії чисел та ін.

В працях Ж. Лагранжа і А. Вандермонда в 1771 р. вперше для потреб теорії розв'язання алгебраїчних рівнянь в радикалах були застосовані підстановки і було отримано розкладання групи підстановок на суміжні класи, в XIX ст. глибокі зв'язки між властивостями групи підстановок і властивостями рівнянь були вказані Н. Абелем в 1824 р. і Е. Галуа в 1830 р. Особливо потрібно відзначити досягнення Е. Галуа в теорії груп. Він відкрив роль нормальних підгруп у вирішенні задачі про можливості розв'язання рівнянь в радикалах, встановив простоту знакозмінних груп ступеня вище чотирьох. К. Жордан систематизував і розвинув дослідження в цьому напрямку в трактаті про групи підстановок в 1870 р.

В проективній геометрії групи виникають, коли вивчається поведінка фігур при різних перетвореннях, що перейшло на вивчення самих перетворень і пошук їх класифікації (тут можна назвати ім'я А. Мебіуса, що досліджував елементарні види спорідненості геометричних фігур).

Теоретично-групові ідеї простежуються і в теорії чисел. Л. Ейлер в 1761 р. при вивченні "відрахувань, що залишаються при діленні ступенів" користувався порівняннями і розбиттям на класи вирахувань, на суміжні класи по підгрупі. К. Гаус в 1801 р. в "Арифметичних дослідженнях" визначив підгрупи групи Галуа рівняння поділу кола і при вивченні "композиції довічних квадратичних форм" довів, що класи еквівалентних форм утворюють відносно композиції кінцеву Абелеву групу.

В кінці XIX ст. виробилося сучасне абстрактне поняття групи. У 1895 р. С. Лі вже визначав групу як сукупність перетворень, замкнуту щодо операції, яка асоціативна і гарантує одиницю і зворотні елементи. Вивчення груп без припущення їх кінцівки і без припущень про природу елементів оформилося в самостійну галузь математики в 1916 р. в книзі “Абстрактна теорія груп” О. Ю. Шмідта.

На сьогодні, теорія груп є однією з найбільш розвинених областей алгебри, має численні застосування як в самій математиці, так і за її межами – в топології, теорії функцій, кристалографії, квантовій механіці та інших областях математики і природознавства.

Математики, які стоять біля витоків теорії груп – це Леонард Ейлер, Карл Фрідріх Гаус, Жозеф Луї Лагранж, Нільс Хенрік Абель і Еваріст Галуа. Галуа був першим математиком, хто зв’язав теорію груп з іншою гілкою абстрактної алгебри – теорією полів, розробивши теорію, нині звану теорією Галуа.

Одним із перших завдань, що призвели до виникнення теорії груп, була задача отримання рівняння ступеня m, яке мало б коренями m коренів даного рівняння ступеня n ($m < n$). Це завдання в простих випадках розглянув Худде (1659 г.).

Паоло Руффіні в 1799 році запропонував доказ нерозв’язності рівнянь п’ятого і вищих ступенів в радикалах. Для доказу він використовував поняття теорії груп, хоч і називав їх іншими іменами.

Артур Келі і Огюстен Луї Коші стали одними з перших математиків ячкі оцінили важливість теорії груп. Ці вчені також довели деякі важливі теореми теорії. Досліджуваний ними предмет популяризував Серре, який присвятив теорії розділ зі своєї книги з алгебри. Великий внесок у розвиток теорії груп внесли також інші математики XIX століття: Бертран, Ерміт, Фробеніус, Кронекер і Матьє.

Сучасне визначення поняття “група” було дано тільки в 1882 р Вальтером фон Дюком.

В середині XX століття (в основному, між 1955 і 1983 рр.) Була проведена величезна робота по класифікації всіх кінцевих простих груп, що включає десятки тисяч сторінок статей.

Теорія груп – це розділ загальної алгебри, що вивчає алгебраїчні структури, які називаються групами, і їх властивості. Група є центральним поняттям в загальній алгебрі, так як багато важливих алгебраїчних структур, таких як кільця, поля, векторні простори, являють собою групи з розширеним набором операцій і аксіом. Групи виникають у всіх областях математики, і методи теорії груп сильно впливають майже на всі розділи алгебри. В процесі розвитку теорії груп було побудовано потужний інструментарій, який багато в чому визначив специфіку загальної алгебри в цілому, сформовано власний глосарій, елементи якого активно запозичуються суміжними розділами математики. Найбільш розвинені галузі теорії груп – лінійні алгебраїчні групи і групи Лі – стали самостійними областями математики.

Різні фізичні системи, такі як кристали або атом водню, мають симетрії, які можна змоделювати групами симетрії, таким чином знаходячи важливі застосування теорії груп і тісно пов’язаної з нею теорії зображень у фізиці і хімії.

Вчення про просторові групи та їх застосування у квантовій теорії твердого тіла зіграло дуже важливу роль в розвитку науки про металеві та напівпровідникові кристали. Успіхи, досягнуті в теорії напівпровідників, і їх швидке впровадження в техніку за останні десятиріччя значною мірою обумовлені застосуванням методу теорії груп до дослідження їх електронного енергетичного спектра і хвильових функцій.

Відзначимо, що застосування теорії просторових груп до фізики твердого тіла має вирішальне значення, так як в твердих тілах не можна нехтувати кристалічною структурою речовини і тому не можна обходитися без послідовно розвиненого математичного апарату теорії груп.

Бете першому вдалося з успіхом застосувати теорію груп до квантової фізики твердого тіла. Він теоретично дослідив розщеплення полем кристала рівнів, вироджених у вільному атомі. Наступним дуже важливим етапом стала серія робіт Зейца, які присвячені теорії просторових груп. Згаданими роботами Зейца і фундаментальною роботою Баукарта, Смолуховського і Вігнера було покладено початок цілої серії робіт, присвячених зонній теорії твердого тіла.

Ідеальні кристалічні гратки завжди володіють деякою просторовою симетрією, що є поєднанням точкової симетрії та трансляційної. Тому в застосуванні до фізики твердого тіла теорія груп представляє по суті теорію симетричних властивостей кристалічних систем.

Розглянемо основні геометричні уявлення, які лежать в основі просторових груп. Якщо потрібно перевести систему τ з положення τ_1 в положення τ_2, то це може бути зроблено різними способами. Однак всі рухи, за допомогою яких відбувається цей перехід, вважаються еквівалентними і з них завжди вибирається найпростіший. В якості таких найпростіших рухів можна вибрати трансляції та обертання.

Можна показати, що будь-який довільний рух еквівалентний, в вище зазначеному сенсі, одному або сукупності кількох з цих найпростіших.

Якщо наразити систему τ дії деякої трансляції T, то всі її точки опишуть рівні за величиною і напрямком траєкторії, тому трансляція повністю визначається заданням шляху однієї точки. Обертання в просторі характеризується заданням положення деякої осі a; його величина визначається кутом повороту α . Якщо зробити обертання не на кут α, а на кут $\alpha + 2\pi$, то рухома система займе те ж саме кінцеве положення, що і при обертанні на кут α. Отже, обидва обертання еквівалентні. Перехід з початкового положення τ_1 в кінцеве τ_2 можна здійснити за допомогою обертання системи τ навколо осі a на кут $2\pi - \alpha$ в протилежному напрямку. Таке обертання називається негативним.

Очевидно, що будь-яке обертання системи τ навколо осі a може бути здійснено за допомогою як позитивного, так і негативного обертань. Але так як серед всіх еквівалентних рухів завжди розглядається лише одне, то заради спрощення оперують тільки з позитивними обертаннями. Обертання на кут α навколо осі a позначають через $A(a)$. Якщо тіло поєднується саме з собою при повороті навколо осі a на кут α, то ця вісь називається віссю симетрії n-го порядку.

Гвинтовий рух складається з обертання на кут α навколо деякої осі a й трансляцію на величину t уздовж неї. Обертання і трансляція відбуваються одночасно. Отриманий завдяки гвинтовому руху перехід системи τ з положення τ_1 в положення τ_2 завжди можна зробити так, щоб трансляція і поворот слідували один за одним в довільній послідовності. Гвинтова вісь з кутом повороту α навколо осі a і величиною трансляції t позначимо через $A(a, t)$.

Якщо тіло поєднується саме з собою при повороті навколо осі на кут α і одночасної трансляції на t уздовж цієї ж осі, то кажуть, що тіло має гвинтову вісь n-го порядку. Провівши n раз поворот і перенесення щодо гвинтової осі n-го порядку, ми в результаті зрушимо тіло уздовж осі на відстань, рівну nt. Отже, при наявності гвинтової осі тіло повинно мати і періоди уздовж цієї осі не більші ніж nt. Це означає, що гвинтова вісь n-го порядку може бути пов'язана тільки з переносами на відстані $t = (pa)/n$ ($p = 1, 2\ldots,(n-1)$), де a- найменший період в напрямку вісі.

Розглянемо тепер разом з системою τ систему τ', яка утворюється з першої шляхом дзеркального відображення в деякій площині σ. Систему і її дзеркальний образ не можна поєднати один з одним за допомогою звичайних рухів; це можна зробити лише із залученням дзеркального відображення.

Якщо τ_1 – деякі положення тіла τ і τ_2' – деякі інші положення тіла τ', то можна спочатку відобразити τ_1 в деякій площині, а потім отриманий таким шляхом дзеркальний образ τ_1 поєднати з τ_2' вже за допомогою руху. Це – так звані операції другого роду. Найпростішими операціями другого роду є відображення.

Відображення характеризується заданням положення деякої площини σ. Про відображення в площині ковзання говорять тоді, коли до відбиття в σ додається ще паралельне їй перенесення на t. Позначимо відображення в площині σ через Σ, а відображення в площині ковзання – через Σ (t), де t-величина трансляції, паралельної σ. Говорять, що тіло має площиною симетрії σ, якщо воно збігається саме з собою при відображенні в цій площині. Тіло має площиною дзеркального ковзання, якщо воно поєднується саме з собою при відображенні в цій площині і одночасному перенесенні на відстань t в напрямку, паралельному цій же площині. Дворазове відображення в площині ковзання призводить до простого переносу на відстань 2t. Тому тіло може мати лише такs площини ковзання, в яких величина трансляції t дорівнює a/2, де a – довжина найменшого періоду в напрямку цієї трансляції.

Дзеркально-поворотне перетворення складається з повороту навколо деякої осі *a* на кут α і подальшого відображення в площині σ, перпендикулярної до цієї осі. Кажуть, що тіло має дзеркально-поворотну вісь n-го порядку, якщо вона поєднується сама з собою при повороті навколо цієї осі на кут і подальшому відображенні в площині, перпендикулярній цієї осі. Дзеркально-поворотне перетворення позначають S(*a*). Якщо кут повороту дзеркально-поворотного перетворення α = π, то ця операція призводить до інверсії щодо точки перетину осі *a* і площини σ.

Симетрія кристала досить природно поділяється на макроскопічну і мікроскопічну. Макроскопічна симетрія визначає ті властивості кристала, які залежать тільки від напрямків в ньому, при цьому кристал поводиться як однорідне суцільне тіло. Тут слово “однорідне” підкреслює, що залежність фізичних властивостей від напрямків однакова у всіх точках кристала. З чисто структурної кристалографічної точки зору макроскопічна симетрія задається, як відомо, 32-ма кристалічними класами. Це групи симетрії, складені з елементів точкової симетрії: поворотів і відображень.

Мікроскопічна симетрія визначає властивості кристала, які залежать від розташування атомів в його решітці.

З групової точки зору просторові групи є окремим випадком більш загальних груп лінійних перетворень, при яких зберігається довжина. У загальному вигляді такі перетворення можуть бути записані таким чином:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + t_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + t_2 \\ x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + t_3 \end{cases} \qquad (4.1)$$

Або скорочено x ’= ax + t. (4.2)

Для того щоб перетворення виду (4.1) зберігало довжину, необхідно вимагати, щоб вектори t мали дійсні складові, а матриці A були дійсними ортогональними матрицями. З останньої вимоги випливає, що за допомогою унітарного перетворення матриці A завжди можна привести до виду

$$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (4.3)$$

У такій формі ці матриці допускають просту інтерпретацію, а саме, матриці зі знаком "+" відповідають обертанням навколо осі x_1 на кут φ (власні обертання), а матриці зі знаком "-" можна трактувати як поворот навколо осі x_1 на кут φ з подальшим відображенням в площині x_2 x_3 (невласні обертання).

Таким чином, перетворення (4.1) можна розуміти як поворот α навколо деякої осі з подальшим перенесенням на вектор t. Такого роду перетворення координат будемо позначати на операційному вигляді через

$\{a|t\}$ (4.4)

У цих позначеннях оператор $\{\varepsilon \mid 0\}$ є тотожним перетворенням, оператори $\{\varepsilon \mid t\}$ представляють трансляції, а оператори $\{\alpha \mid 0)$ - обертання (власні або невласні). Легко показати, що в операційному вигляді добуток двох перетворень типу (4.1) записується таким чином:

$\{\alpha \mid t\} \{\beta \mid u\} = \{\alpha\beta \mid \alpha u+t \}$ (4.5)

також легко знайти і оператор, зворотний до даного, а саме

$\{\alpha \mid t\}^{-1} = \{\alpha^{-1} \mid -\alpha^{-1} t \}$ (4.6)

Таким чином, оператори виду (4.4) утворюють групу. Зазначимо на дві очевидні властивості цієї групи:

1) оператори $\{a \mid 0\}$ утворюють в цій групі підгрупу;

2) оператори $\{\varepsilon \mid t\}$ також утворюють в цій групі підгрупу, причому вона є інваріантною підгрупою вихідної групи, так як

$\{ \alpha^{-1} | - \alpha^{-1} u \} \{ \varepsilon \mid t \} \{\alpha \mid u\} = \{\varepsilon \mid \alpha^{-1} t \}$, (4.7)

тобто будь-який елемент цієї підгрупи, пов'язаний до даного $\{\varepsilon \mid t\}$, також належить до неї.

Просторові групи характеризуються тим, що мають інваріантною підгрупою трансляцій особливого роду, а саме: всі чисті трансляції просторової групи мають вигляд $\{\varepsilon \mid R_n\}$, (4.8) де $R_n=n_1t_1+ n_2t_2 + n_3t_3$,

де n_i – цілі числа, а t_i – три лінійно незалежні трансляції, звані примітивними трансляціями.

Отже, чисті трансляції просторової групи є лінійні комбінації з цілочисельними коефіцієнтами трьох основних примітивних трансляцій.

Періодично повторювана сукупність точок, що породжуються векторами R_n, називається гратками. Всі властивості просторових груп можна вивести з того факту, що вони містять інваріантну підгрупу зазначеного виду. Так, наприклад, відразу очевидно, що якщо R_n є допустима трансляція, то і αR_n, де $\{ \alpha \mid t\}$ - елемент просторової групи, також буде допустимою трансляцією. Це безпосередньо випливає з співвідношення

$\{ \alpha \mid t\}\{\varepsilon \mid R_n\}\{ \alpha^{-1}| - \alpha^{-1} t\}=\{\varepsilon \mid \alpha R_n\}$ (4.8).

Одним із наслідків того, що інваріантна підгрупа допустимих трансляцій виду (4.8) входить до просторових груп, є обмеження, що накладаються на оператори обертань. Виявляється, що можуть здійснюватися лише обертання навколо осей на кути, кратні 60° і 90°; невласні обертання утворюються із зазначених обертань і інверсії. При класифікації можливих груп, які утворюють в просторових групах оператори обертань, виявляється, що їх є лише 32 (32 кристалічних класу або 32 точкові групи). Обертальна частина будь-якої просторової групи відповідає одній з цих 32 точкових груп.

З іншого боку, знаючи, якому кристалічному класу відповідає просторова група, можна отримати відомості про можливі інваріантні підгрупи допустимих трансляцій. Ми вже бачили, що якщо R_n – допустима трансляція і $\{\alpha|t\}$ - елемент просторової групи, то αR_n також буде допустимої трансляцією. Отже, гратка, породжувана допустимими трансляціями просторової групи, повинна залишатися інваріантною під дією операцій точкової групи. Цього виявляється досить для накладання певних обмежень на основні вектори трансляції t_1, t_2, t_3 з яких виходять всі R_n. Дослідження показують, що є 14 різних граток (гратки Браве).

Слід зазначити, що просторова група лише частково характеризується своєю точковою групою і типом гратки. Просторові групи, що мають однакові кристалічні класи і однакові гратки, можуть відрізнятися ще видом операторів трансляційної частини (видом t). Однак дослідження показують, що всі оператори даної просторової групи завжди можна представити у вигляді

$$\{\varepsilon \mid R_n\}\{\alpha \mid \nu(\alpha)\}, \qquad (4.9)$$

де R_n – вектори допустимих трансляцій, а ν (α) – деякий характерний для даного обертання α вектор або рівний нулю, або ж не є допустимою трансляцією (зауважимо, що ν (ε) = 0). Всі просторові групи розбиваються на два типи по векторах ν (α). До першого типу відносяться групи, в яких ν (α) дорівнює нулю для всіх α. Це так звані прості просторові групи, яких є 73. Всякому оператору α точкової групи в простій просторової групі відповідає оператор { α |0 }. З огляду на, це і рівність

$$\{\alpha \mid 0\}\{\beta \mid 0\} = \{\alpha\beta \mid 0\} \qquad (4.10)$$

можна стверджувати, що оператори { α |0 } утворюють групу, ізоморфну точковій групі. Інакше кажучи, проста просторова група цілком містить точкову групу як підгрупу.

В інших 157 просторових групах ν (α), в деякій мірі для одного α, не може бути вибрано рівним нулеві. Рухи, що містять перенесення на неприпустиму трансляцію, наступну за власним або невласним обертанням, відповідають зазвичай площинам ковзання і гвинтовим осям. Точкова група в цьому випадку не є підгрупою просторової групи.

Однак ми бачили, що у всякій просторовій групі допустимі трансляції утворюють симетричну підгрупу. Позначимо просторову групу через δ, а інваріантну підгрупу трансляцій через ϑ. Тоді можна утворити фактор-групу δ/ϑ. Легко перевірити, що ця фактор-група ізоморфна з точковою групою, що складається з обертальної частини операторів просторової групи.

Отже можемо зробити висновок: викладені нами основні принципи дослідження квантово-механічних систем за допомогою теорії груп показують, що питання, які лежать в основі квантової фізики твердого тіла, можуть бути розглянуті з найбільшою глибиною і повнотою тільки при використанні апарату теорії просторових груп. Властивості симетрії фізичних систем повинні ширше використовуватися при вирішенні конкретних завдань і особливо у випадку складних квантовомеханічних систем, де точні кількісні розрахунки не можуть бути проведені, і тому важливо отримати якомога більшу кількість результатів всіма методами. Крім того, результати отримані за допомогою теорії груп, є більш строгими в силу феноменологічного характеру самої теорії симетрії. Загальні положення деталізуються при розгляді зонної теорії твердих тіл з точки зору теорії груп і це можна проілюструвати, зокрема, при дослідженні енергетичного спектру і класифікації станів в лінійному ланцюгу і при вивченні властивостей електрона в полі кубічної симетрії. Принципово вони можуть бути застосовані і до граток складнішої симетрії. Останнім часом теорія просторових груп починає займати видатне місце також при дослідженні магнітної симетрії.

Використана література:

1. *Мельников Б. Ю.* Основи теории групп / Б. Ю. Мельников. – Екатеринбург, 2010. – 512 с.
2. *Соколов А. В., Широковский В. П.* Метод теории групп в квантовой физике твердого тела / А. В. Соколов, В. П. Широковский. – Москва, 1956. – 72 с.
3. *Иванов Е. Н.* Теория групп и ее применения в физике / Е. Н. Иванов. – Москва, 2006. – 97 с.
4. *Штрайтвольф Г.* Теория групп в физике твердого тела / Г. Штрайтвольф. – Москва, 1971. – 262 с.

5. *Любарский Г. Я.* Теория групп и физика / Г. Я. Любарский. – Москва, 1986. – 224 с.
6. *Аминов Л. К., Кутузов А. С., Прошин Ю. Н.* Теория групп и ее приложения / Л. К. Аминов, А. С. Кутузов, Ю. Н. Прошин. – Казань, 2015. – 123 с.

References:

1. *Melnikov B. Yu.* Osnovi teorii grupp / B. Yu. Melnikov. – Yekaterinburg, 2010. – 512 s.
2. *Sokolov A. V., Shirokovskiy V. P.* Metod teorii grupp v kvantovoy fizike tverdogo tela / A. V. Sokolov, V. P. Shirokovskiy. – Moskva, 1956. – 72 s.
3. *Ivanov Ye. N.* Teoriya grupp i ee primeneniya v fizike / Ye. N. Ivanov. – Moskva, 2006. – 97 s.
4. *Shtraytvolf G.* Teoriya grupp v fizike tverdogo tela / G. Shtraytvolf. – Moskva, 1971. – 262 s.
5. *Lyubarskiy G. Ya.* Teoriya grupp i fizika / G. Ya. Lyubarskiy. – Moskva, 1986. – 224 s.
6. *Aminov L. K., Kutuzov A. S., Proshin Yu. N.* Teoriya grupp i ee prilozheniya / L. K. Aminov, A. S. Kutuzov, Yu. N. Proshin. – Kazan, 2015. – 123 s.

Бендик А. А., Пустовый О. Н., Шепета А. М. История создания теории групп и ее использование в физике твердого тела.

В статье рассказывается история создания учения о пространственных группах и их применение в квантовой теории твердого тела. Показанно трансформацию понятия группа в историческом аспекте.

Теория групп – это раздел общей алгебры, изучающий алгебраические структуры, называемые группами, и их свойства. Группа является центральным понятием в общей алгебре, так как многие важные алгебраические структуры, такие как кольца, поля, векторные пространства, представляют собой группы с расширенным набором операций и аксиом. Группы возникают во всех областях математики, и методы теории групп сильно влияют почти на все разделы алгебры. В процессе развития теории групп было построено мощный инструментарий, который во многом определил специфику общей алгебры в целом, сформирован собственный глоссарий, элементы которого активно заимствуются смежными разделами математики. Наиболее развитые области теории групп – линейные алгебраические группы и группы Ли – стали самостоятельными областями математики.

Различные физические системы, такие как кристаллы или атом водорода, имеют симметрии, которые можно смоделировать группами симметрии, таким образом находя важные применения теории групп и тесно связанной с ней теории представлений в физике и химии.

В статье также показано, что именно применение метода теории групп к исследованию электронного энергетического спектра и волновых функций обусловило успехи, достигнутые в теории полупроводников и металлов. Этот материал будет интересен для студентов, если его использовать на лекциях по общей физике, математике и физике твердого тела.

Ключевые слова: *пространственные группы, классы эквивалентных форм, Абелевы группы, теория Галуа, кольца, поля, векторные пространства, линейные алгебраические группы, группы Ли, симметрия, кристаллические решетки, трансляции, фактор-группа.*

Bendik A. A., Pustovy O. N., Shepeta A. M. The history of the creation of the theory of groups and its use in solid state physics.

The article tells the history of the theory of space groups and their applications in quantum theory of solids. It is shown that this method of application of group theory to the study of electron energy spectrum and the wave functions led to achievements in the theory of semiconductors and metals. This material will be interesting for students when used in lectures on general physics, mathematics and solid state physics.

Keywords: *spatial group, classes equivalent forms, Abelian group, Galois theory, rings, fields, vector spaces, linear algebraic groups, Lie groups, symmetry, crystal lattice transmission factor group.*