2. *Ленчук І. Г.* Система навчання майбутнього вчителя конструктивної геометрії : монографія / І. Г. Ленчук. – Житомир : видавництво ЖДУ імені І. Франка, 2011. – 356 с.
3. *Погорєлов О. В.* Геометрія: Стереометрія : підручник для 10-11 класів серед. шк. / О. В. Погорєлов. – Київ : Освіта, 1998. – 128 с.

References:

1. *Lenchuk I. H.* Konstruktyvna stereometriia v zadachakh : navch. posib. dlia stud. mat. spets. vyshch. ped. navch. zakl. / I. H. Lenchuk. – Zhytomyr : vydavnytstvo ZhDU imeni I. Franka, 2010. – 367 s.
2. *Lenchuk I. H.* Systema navchannia maibutnoho vchytelia konstruktyvnoi heometrii : monohrafiia / I. H. Lenchuk. – Zhytomyr : vydavnytstvo ZhDU imeni I. Franka, 2011. – 356 s.
3. *Pohorielov O. V.* Heometriia: Stereometriia : pidruchnyk dlia 10-11 klasiv sered. shk. / O. V. Pohorielov. – Kyiv : Osvita, 1998. – 128 s.

Ленчук И. Г., Працевитый Н. В. Метрические задачи с углами в стереометрии.
Рассматривается задача элементарной “начертательной” геометрии, которая имеет дидактическую ценность для конструктивной составляющей школьной стереометрии, приводится три способа ее решения и доказывается теорема, полезная при решении подобного рода задач. Предлагаются методические рекомендации и советы.
Ключевые слова: *двугранный угол, линейный угол двугранного угла, угол между прямой и плоскостью, прикладная геометрическая задача, линия уровня, линия наибольшего наклона, правило-ориентир, графический и графоаналитический методы решения задач.*

Lenchuk I. G., Pratsiovytyi M. V. Metric problems with angels and corners in stereometry.
The elementary descriptive geometry problem having didactic value for constructive component of school stereometry is considered and three ways to solve it are given in the paper. The theorem useful for solving such problems is proved. Methodical recommendations and tips are offered.
Keywords: *two-sided corner, linear angle of a two-sided corner, angle between a straight line and a plane, applied geometric problem, line of a level, line of the largest inclination, guide rule, graphical method and graphical and analytical method of solving problems.*

УДК 378-057.875

Працьовитий М. В., Василенко Н. М., Лисенко І. М.

ТЕМА: “ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ” У КУРСІ “ВСТУП ДО СПЕЦІАЛЬНОСТІ МАТЕМАТИКА”

Пропонується змістовне наповнення теми “Лінійні простори числових послідовностей: двовимірний простір послідовностей Фібоначчі” у курсі “Вступ до спеціальності МАТЕМАТИКА” з аргументацією її доцільності вивчення першокурсниками математичних спеціальностей педагогічних університетів.
Ключові слова: *числова послідовність, послідовність Фібоначчі, двовимірний лінійний простір числових послідовностей, навчальна дисципліна “Вступ до спеціальності МАТЕМАТИКА”, математичні спеціальності у педагогічному університеті.*

Сьогодні у навчальних планах підготовки фахівців зі спеціальностей 111 Математика і 014 середня освіта (Математика) на фізико-математичному факультеті НПУ імені М. П. Драгоманова фігурує дисципліна за вибором (університету) "Вступ до спеціальності МАТЕМАТИКА". Далі "Вступ". Одне із головних завдань курсу полягає в сприянні вивченню фундаментальних навчальних дисциплін лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз; в підвищені математичної культури та розширенню математичного кругозору.

У розділі "Елементи векторної алгебри" курсу "Аналітична геометрія", де вивчається геометрична теорія вільних векторів (класів еквівалентності напрямлених відрізків, що мають однакові довжини і напрями) фігурує тема "Векторний простір, його базис та розмірність", а програмою курсу "Лінійна алгебра" передбачено вивчення розділу "Лінійні (векторні) простори". В алгебрі вивчається абстрактна теорія, а в геометрії – одна зі змістовних моделей цієї математичної структури, а саме: "Лінійний простір вільних векторів". Більше того, числові послідовності (як функції, визначені на множині натуральних чисел) є об'єктом вивчення в математичному аналізі засобами теорії границь. Абстрактність та однобокість вивчення послідовностей в математичному аналізі може бути суттєво конкретизована і змістовно доповнена з використанням інструментів дискретної математики та структурного підходу до конкретних сімей послідовностей. Саме ця обставина обумовлює доцільність вивчення у курсі "Вступ" теми "Лінійні простори числових послідовностей: простір послідовностей Фібоначчі". Дану тему доцільно вивчати після того, як в курсі лінійної алгебри та аналітичної геометрії будуть введені поняття лінійної залежності векторів, базису та розмірність векторного простору, вивчено взаємозв'язок між базисами, а в курсі математичного аналізу – границя числової послідовності. Програмою передбачено, що цій темі передує тема "Прогресії", в якій повторюється факти шкільного курсу математики стосовно арифметичної та геометричної прогресії, вивчаються гармонічні та середньо квадратичні прогресії, реалізується структурний підхід до їх сімей.

Класична послідовність Фібоначчі (1,1,2,3,5,8,13,21,…) є цікавим об'єктом розгляду у системі гурткової роботи школярів, які вивчають арифметичні та геометричні прогресії і розв'язують невелику кількість задач, з ними пов'язаних. Серед них задача підсумовування членів послідовності. Шкода, що структурний підхід до сімей арифметичних та геометричних прогресій в цій ніші педагогічного процесу не реалізується на практиці. Але комфортні умови для цього забезпечує курс "Вступ". Різносторонній підхід до вивчення сім'ї всіх послідовностей Фібоначчі, які визначаються тією ж рекурентною формулою ($a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$), що й класична послідовність Фібоначчі, але довільними першими двома членами, дозволяє згаданий інтерес у першокурсників поглибити, зокрема, у майбутніх вчителів математики.

Ми пропонуємо розробку теоретичного викладу теми з розглядом достатньої кількості прикладів та списком задач для самостійного розв'язування. Пропонуємо здійснювати розгляд теми за наступним планом.

1. Класична послідовність Фібоначчі: способи задання, властивості, задача підсумовування, нерозв'язані проблеми.
2. Двовимірний лінійний (векторний) простір послідовностей Фібоначчі, його базиси та зв'язки між ними.
3. Оператор лівостороннього зсуву у просторі послідовностей Фібоначчі.
4. Підпростори двовимірного простору послідовностей Фібоначчі.
5. Зв'язок послідовностей Фібоначчі з прогресіями.
6. Нескінченно малі послідовності Фібоначчі.
7. Задача підсумовування членів послідовності Фібоначчі.

8. Двосторонні послідовності Фібоначчі.
9. Фібоначчієва система числення.

Мета заняття. Ознайомити студентів з класичною послідовністю Фібоначчі і колом найпростіших з нею пов'язаних задач, розв'язки яких здобуваються елементарними засобами. Розглянувши узагальнення класичної послідовності Фібоначчі, реалізувати структурний погляд на новоутворену сім'ю послідовностей, наділивши її структурою двовимірного лінійного простору, метричного простору, евклідового простору. Обґрунтувати взаємозв'язок послідовностей Фібоначчі і геометричних прогресій, розв'язати кілька задач на підсумовування членів послідовностей. Формувати вміння працювати над математичною задачею. Висвітлити міжпредметні зв'язки для лінійної алгебри, аналітичної геометрії та математичного аналізу, інтегративною основою для яких є дана тема. Розширювати уявлення про математичні структури, системи координат, системи числення і геометричні інтерпретації ключових понять і відношень. Даної теми. Сформулювати ряд задач для самостійного розв'язування та самостійних наукових досліджень і кілька перспективних траєкторій розвитку інтересу до теми.

Наведемо деякі фрагменти лекції.

1. Класична послідовність Фібоначчі: способи задання, властивості, задача підсумовування, нерозв'язані проблеми.

Класичною послідовністю Фібоначчі називається послідовність натуральних чисел: 1,1,2,3,5,8,13,21,…, кожен наступний член якої, починаючи з третього, є сумою двох попередніх. Класична послідовність Фібоначчі задається рекурентною формулою $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, але відоме її задання і формулою загального члена (формула Біне [5]): $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n \right]$.

Виведення формули Біне з використанням генератрис є нетривіальним, в лекції його краще опустити. З використанням методу математичної індукції та інших елементарних прийомів можна розглянути і розв'язати ряд задач, що стосуються чисел (елементів послідовності) Фібоначчі.

2. Задача підсумовування членів послідовності Фібоначчі.

Задача підсумовування послідовності (a_n) полягає в тому, щоб для довільного $n \in N$ виразити суму $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = S_{n-1} + a_n$ перших n її членів, а також суму $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ всіх її членів, якщо вона є скінченною, або довести її нескінченність (це рівносильно обчисленню границі $S = \lim_{n\to\infty} S_n$).

Задача підсумовування послідовності у загальній постановці є складною (взагалі кажучи, нерозв'язною). Наприклад, для вище наведеної гармонічної прогресії $(\frac{1}{n})$ суму $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ виразити через n не вдається, але можна довести, що послідовність (S_n) є розбіжною (ця задача розв'язується у курсі математичного аналізу при вивченні розділу "Числові ряди"). У таких випадках дослідники виділяють родини (сім'ї, класи) послідовностей, для яких ця проблема спрощується.

Для арифметичної та геометричної прогресій задача підсумовування є простою. Ще зі шкільного курсу математики для арифметичної та геометричної прогресій (a_n) і (b_n) відповідно добре відомими є формули:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n; \quad S_n = \frac{b_1}{1-q}(1-q^n)\,; S = \frac{b_1}{1-q} \text{ при } (|\,q\,|<1)\,.$$

Дещо складнішою задача підсумовування є для класичної послідовності Фібоначчі, але елементарними засобами встановлюються рівності:

$$u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = u_{n+1} - 1,$$
$$u_0 + u_2 + ... + u_{2n-2} = u_{2n-1},$$
$$u_1 + u_3 + ... + u_{2n-1} = u_{2n} - 1,$$
$$u_0^2 + u_1^2 + ... + u_{n-1}^2 + = u_{n-1} u_n,$$
$$u_{n+1} u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^{n+1}.$$

3. Двовимірний лінійний (векторний) простір послідовностей Фібоначчі, його базиси та зв'язки між ними.

Означення. Числова послідовність (a_n), яка визначається першими двома членами a_1 та a_2 і рекуретною формулою $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, називається послідовністю Фібоначчі.

Прикладами послідовностей Фібоначчі є:

1) 0,2,2,4,6,10,16,26,…;
2) 0,0,…,0,… .

Для загального члена послідовності Фібоначчі (a_n) має місце рівність:

$$a_n = (a_2 - a_1)\frac{\varphi^{n-1} - \hat{\varphi}^{n-1}}{\sqrt{5}} + a_1 \frac{\varphi^n - \hat{\varphi}^n}{\sqrt{5}}\,,\ n \in N\,,\ \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\ \hat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Зрозуміло, що у курсі "Вступ" планувати її доведення не приходиться, але використати її для розгляду часткових випадків можна і навіть доречно.

Нехай $\mathsf{F} \equiv \{(a_n) : a_1, a_2 \in \mathsf{R}, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$– множина всіх послідовностей Фібоначчі. Для елементів множини F введемо лінійні операції (додавання та множення на скаляр) за законами:

$$(a_n) \oplus (b_n) = (a_n + b_n)\,, \qquad \lambda(a_n) = (\lambda a_n),\ n \in \mathsf{N}.$$

Оскільки бінарна операція додавання дійсних чисел є замкненою (алгебраїчною):

$$a_n + b_n = a_{n-1} + a_{n-2} + b_{n-1} + b_{n-2} = [a_{n-1} + b_{n-1}] + [a_{n-2} + b_{n-2}],$$

то легко бачити, що множина F разом з операцією $\oplus$ додавання є *комутативною групою*, нейтральним елементом якої є нуль-послідовність $0 = (0)$, а симетричним (протилежним) елементом для послідовності (a_n) є послідовність $(-a_n)$.

Враховуючи, що для чисел

$$\lambda a_n = \lambda[a_{n-1} + a_{n-2}] = \lambda a_{n-1} + \lambda a_{n-2}, \quad \forall\, n \in \mathsf{N},$$

нескладно бачити, що множина F разом з операціями додавання та множення на скаляр є *лінійним (векторним) простором*. Це є підставою називати елементи множини F векторами і вживати позначення $(a_n) = \bar{a}$.

Елементарними засобами доводяться наступні твердження.

Теорема. *Якщо* (a_n)– *довільна послідовність, а* (u_n)– *класична послідовність Фібоначчі, то виконуються такі співвідношення:* $a_{n+m} = a_{n-1}u_{m-1} + a_n u_m = a_{m-1}u_{n-1} + a_m u_n$.

Надалі $\bar{e}_1 = (1, 0, u_0, u_1, u_2, \ldots)$, $\bar{e}_2 = (0, u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots)$, де $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ — класична послідовність Фібоначчі.

Лема. *Вектори* $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ *є лінійно незалежними і для довільного* $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathsf{F}$ *має місце рівність*

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2. \qquad (1)$$

Доведення. Легко бачити, що рівність $\alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 \equiv \bar{0}$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Отже, вектори $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ є лінійно незалежними.

Нехай $\bar{x} = (x_n)$ – довільно вибраний елемент з F. Тоді для $n \geq 3$ має місце рівність $x_n = x_1u_{n-3} + x_2u_{n-2}$, яка рівносильна рівності (1).

Наслідок. *Впорядкована пара векторів* $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ *утворює базис, в якому вектор* $\bar{x} = (x_n)$ *має координати* $(x_1; x_2)$.

Теорема. *Множина* F *разом з операціями додавання та множення на скаляр, тобто математична структура* $(\mathsf{F}, \oplus, \lambda(\cdot))$, *є двовимірним векторним простором.*

Зауваження. Увівши операцію скалярного множення векторів (зовнішню операцію, яка задоволняє чотирьом умовам=аксіомам), отримуємо можливість означити довжину вектора $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}\bar{a}}$ *і кут між векторами* $\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \dfrac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$, *а отже, і ввести поняття ортонормованого базису. В цьому випадку доцільно обговорювати питання про неоднозначність введення операції.*

Для означення скалярного добутку векторів можна використати довільний базис $\langle \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2 \rangle$ і координати векторів в ньому, а саме: для довільних двох елементів $\bar{x}, \bar{y} \in F$ скалярний добуток означується як сума добутків одноімених координат $\bar{x}\bar{y} = x_1y_1 + x_2y_2$, де $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2)$.

4. Оператор лівостороннього зсуву в просторі послідовностей Фібоначчі

У векторному просторі $(\mathsf{F}, \oplus, \lambda(\cdot))$ розглянемо оператор $L(\bar{x}) = (x_2, x_3, \ldots)$, де $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \in \mathsf{F}$, $k \in \mathsf{N}$, який називається *оператором лівостороннього зсуву (далі: оператор зсуву)*.

Очевидно, що оператор зсуву є лінійним, тобто

$$L(\bar{x} \oplus \bar{y}) = L(\bar{x}) \oplus L(\bar{y}),\ L(\lambda\bar{x}) = \lambda L(\bar{x}).$$

Нехай $L^{(k)}(\cdot)$ – k-й степінь оператора L, тобто

$$L^{(k)}(\bar{x}) = L(L(\ \ldots L(\bar{x}))) = (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots).$$

Лема 1.6 *При довільному натуральному* k *два вектори* $\bar{s} = (s_1, s_2, \ldots)$ *і* $L^{(k)}(\bar{s}) = (s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots)$ *з* F *є лінійно залежними тоді і тільки тоді, коли* $s_2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}s_1$.

Доведення. Нехай k – фіксоване натуральне число. Векторна рівність

$$\gamma_1\bar{s} + \gamma_2L^{(k)}(\bar{s}) = \bar{0} \qquad (2)$$

еквівалентна системі рівнянь $\gamma_1s_n + \gamma_2s_{k+n} = 0,\ n = 1,2,\ldots$.

Оскільки всі рівняння системи, починаючи з третього, є наслідком перших двох, то остання система рівнянь рівносильна системі

$$\begin{cases} \gamma_1s_1 + \gamma_2s_{k+1} = 0, \\ \gamma_1s_2 + \gamma_2s_{k+2} = 0. \end{cases}$$

З курсу лінійної алгебри відомо, що система двох лінійних однорідних рівнянь з двома невідомими має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_{k+1} \\ s_2 & s_{k+2} \end{vmatrix} = 0,$$

що рівносильно рівності $s_1 s_{k+2} - s_2 s_{k+1} = 0.$

Перепишемо останню рівність у вигляді

$$s_1\left(s_1 u_{k-1} + s_2 u_k\right) - s_2\left(s_1 u_{k-2} + s_2 u_{k-1}\right) = 0.$$

Звідки

$$s_1^2 u_{k-1} - s_2^2 u_{k-1} + s_1 s_2 u_{k-1} = 0$$

і

$$s_2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} s_1, \tag{3}$$

оскільки $u_{k-1} \neq 0$ для довільного $k \in \mathrm{N}$.

Наслідок 1.15 *Якщо вектори* $\bar{s}$ *і* $L^{(k)}(\bar{s})$ *з* F *є лінійно залежними, то для довільного натурального* k *має місце рівність*

$$L^{(k)}(\bar{s}) = \left(u_{k-2} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} u_{k-1}\right)\bar{s}.$$

Доведення. Оскільки вектори $\overleftarrow{s}$ і $L^{(k)}(\bar{s})$ є лінійно залежними, то враховуючи рівність (3), їх можна переписати у вигляді

$$\overleftarrow{s} = \left(\left(u_{n-3} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} u_{n-2}\right) s_1\right)_{n=1}^{\infty},$$

$$L^{(k)}(\overleftarrow{s}) = \left(\left(u_{n-2} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} u_{n-1}\right) s_1\right)_{n=k}^{\infty} =$$

$$= \left(\left(u_{n+k-3} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} u_{n+k-2}\right) s_1\right)_{n=1}^{\infty}.$$

Нескладно довести [5], що для членів класичної послідовності Фібоначчі $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ виконується рівність

$$u_{n+m} = u_{n-1} u_{m-1} + u_n u_m, \quad m \in \mathrm{N}. \tag{4}$$

Розглянемо добуток

$$\left(u_{k-2} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} u_{k-1}\right)\bar{s} =$$

$$= \left(\left(u_{k-2} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} u_{k-1}\right)\left(u_{n-3} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} u_{n-2}\right) s_1\right)_{n=1}^{\infty} =$$

$$= \left(\left(u_{k-2} u_{n-3} + u_{k-1} u_{n-2} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}(u_{k-2} u_{n-2} + u_{k-1} u_{n-2} + u_{k-1} u_{n-3})\right) s_1\right)_{n=1}^{\infty}.$$

Використовуючи (4), останню рівність перепишемо у вигляді

$$\left(u_{k-2} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} u_{k-1}\right)\bar{s} =$$

$$=\left(\left(u_{n+k-3}+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}(u_k u_{n-2}+u_{k-1}u_{n-3})\right)s_1\right)_{n=1}^{\infty}=$$

$$=\left(\left(u_{n+k-3}+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}u_{n+k-2}\right)s_1\right)_{n=1}^{\infty}=L^{(k)}(\bar{s}).$$

Наслідок 1.16 *Для довільного натурального* k *вектори* $\overleftarrow{s}$ *і* $L^{(k)}(\bar{s})$ *лінійно незалежні тоді і тільки тоді, коли* $s_2 \neq \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}s_1$.

Наслідок 1.17 *Впорядкована пара векторів* $\bar{s}=(s_1, s_2, \ldots)$, $L^{(k)}(\bar{s})=(s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots)$, *де* $s_2 \neq \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}s_1$, *є базисом лінійного простору* F.

Наступне твердження дає відповідь на питання про зв'язок між координатами вектора в різних базисах.

Теорема 1.3 *Якщо вектор* $\overleftarrow{x}$ *в базисі* $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle$ *має координати* $(x_1; x_2)$, *а в базисі* $\langle \bar{s}, L^{(k)}(\bar{s}) \rangle$ --- $(x_1'; x_2')$, *то*

$$\begin{cases} x_1 = s_1x_1' + s_{k+1}x_2', \\ x_2 = s_2x_1' + s_{k+2}x_2'. \end{cases}$$

Зауважимо, що $\ker L^{(k)} = \{\overleftarrow{0}\}$, а отже, оператор $L^{(k)}$ є невиродженим, і його матриця в базисі $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle$ має вигляд $\begin{pmatrix} u_{k-2} & u_{k-1} \\ u_{k-1} & u_k \end{pmatrix}$.

5. Зв'язок послідовностей Фібоначчі з геометричними прогресіями

Лема 1. Якщо геометрична прогресія (b_n) зі знаменником q є послідовністю Фібоначчі, то $q \in \{\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$.

Доведення. Нехай (b_n) – геометрична прогресія, що є послідовністю Фібоначчі. Тоді одночасно

$$b_n = b_1q^{n-1} \text{ і } b_{n+2} = b_{n+1} + b_n.$$

З цих рівностей маємо: $b_1q^{n+1} = b_1q^n + b_1q^{n-1}$, що рівносильно $q^2 = q+1$. Звідки $q = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Лема 2. Якщо послідовність Фібоначчі (c_n) є геометричною прогресією зі знаменником q, то

$$q \in \{\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}, \ \frac{c_2}{c_1} = q.$$

Доведення. Оскільки (c_n) – послідовність Фібоначчі, то

$$c_{n+2} = c_{n+1} + c_n, \ \frac{c_{n+2}}{c_{n+1}} = 1 + \frac{c_n}{c_{n+1}}.$$

Але послідовність (c_n) є геометричною прогресією, тому

$$\frac{c_{n+2}}{c_{n+1}} = q\,,\ \frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{1}{q}$$

Зокрема, $\frac{c_2}{c_1} = q.$ Тоді $q = 1 + \frac{1}{q}.$ Звідки $q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$

Зауваження. *Дане питання посилює інтерес до теми вцілому і геометрих прогресій зокрема. Твердження (Леми 1 і 2) посильні для самостійного обґрунтування студентами. В цьому місці можливе обговорення взаємозв'язку цих об'єктів з золотим поділом відрізка, золотим відношенням (пропорцією).*

6. Нескінченно малі послідовності Фібоначчі

Нагадаємо, що послідовність (u_n) називається нескінченно малою, якщо $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

Теорема. *Послідовність Фібоначчі є нескінченно малою тоді і тільки тоді, коли вона є геометричною прогресією зі знаменником* $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Лема. *Нехай* (a_n) *– довільна послідовність Фібоначчі. Якщо існує* $k \in N$ *таке, що* $a_k = 0$ *і* $a_{k+1} \neq 0$, *то* $a_{k+m} = u_{m-1} \cdot a_{k+1}$ $2 \le m \in N.$

Доведення. З того, що $a_k = 0$ і $a_{k+1} \neq 0$ маємо

$$a_{k+2} = a_k + a_{k+1} = a_{k+1} = u_1 a_{k+1},$$

$$a_{k+3} = a_{k+1} + a_{k+2} = u_0 a_{k+1} + u_1 a_{k+1} = u_2 a_{k+1},$$

$$a_{k+4} = a_{k+2} + a_{k+3} = u_1 a_{k+1} + u_2 a_{k+1} = u_3 a_{k+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{k+m} = a_{k+m-2} + a_{k+m-1} = u_{m-3} a_{k+1} + u_{m-2} a_{k+1} = u_{m-1} a_{k+1}.$$

Наслідок 1. *Якщо* k *-ий член* a_k *послідовності Фібоначчі* (a_n) *дорівнює нулю і* $a_{k+1} \neq 0$, *то для довільного натурального* $n > k+1$ *має місце нерівність* $a_n \cdot a_{k+1} > 0$, *тобто всі члени послідовності Фібоначчі, починаючи з* $(k+1)$ *-го мають однаковий знак.*

Наслідок 2. *Якщо послідовність Фібоначчі* (a_n), *відмінна від нуль-послідовності, містить нуль, то* $|a_n| \to \infty$.

Наслідок 3. *Довільна послідовність Фібоначчі, відмінна від нуль-послідовності, може містити не більше одного нуля.*

7. Підпростори двовимірного простору послідовностей Фібоначчі

Двовимірний простір послідовностей Фібоначчі має безліч одновимірних підпросторів, кожен з яких однозначно визначається ненульовим представником.

Лема. *Нескінченно малі послідовності Фібоначчі утворюють одновимірний підпростір векторного простору* $(F, +, \lambda(\cdot))$, *який представляє геометрична прогресія з* $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Наслідок. *Одновимірний підпростір нескінченно малих послідовностей Фібоначчі* F^1 *є інваріантним підпростором оператора зсуву* L *і довільного його степеня.*

8. Фібоначчієва система числення

Системою числення дійсних чисел називається сукупність засобів для представлення=подання (математичного виражання), зображення (кодування, скороченого, формального запису), найменування дійсних чисел, їх ідентифікації та порівняння, а також побудови арифметики. Ця сукупність включає: модель числа у формі математичного виразу (ряду, нескінченного добутку, ланцюгового дробу тощо); алфавіт – набір цифр (символів, знаків) для формального (скороченого) запису представлень числа математичним виразом, які відіграють роль чисел або індексів; базис (базисну послідовність), якщо моделлю числа є ряд. Існуючі сьогодні системи числення за своєю формою та структурою досить різні. Класичною у цьому відношенні є s-кова система числення, на основі якої К. Вейєрштрассом була створена перша змістовна теорія дійсних чисел. Сьогодні вона має багато різних узагальнень та аналогів.

Класична послідовність Фібоначчі є базисною для створення системи зображення дійсних чисел, що є основною складовою системи числення. Теоретичну платформу для цього забезпечують два наступні твердження.

Теорема (Цекендорфа [1]). *Будь-яке натуральне число m може бути однозначно представлене у вигляді суми*

$$m = \alpha_k u_k + \alpha_{k-1} u_{k-1} + \ldots + \alpha_2 u_2, \text{ де } \alpha_k \neq 0, \ \alpha_n \in \{0,1\}; \ \alpha_n \alpha_{n+1} = 0, \ n = \overline{1, k-1}.$$

Теорема. *Для довільного дійсного числа $x \in [0; S]$ існує послідовність (α_n) нулів та одиниць, така що*

$$x = \frac{\alpha_2}{u_2} + \frac{\alpha_3}{u_3} + \ldots + \frac{\alpha_n}{u_n} + \ldots \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}, \text{ де } S = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{u_k}.$$

Зауваження. *Оскільки кожен серйозний курс математичного аналізу має починатись з ґрунтовної теорії дійних чисел (бажано з використанням всіх трьох класичних моделей дійсного числа: К. Вейєрштрасса, Г. Кантора, Р. Дедекінда), то даний матеріал є не лише супутним, а й методично доцільним при усвідомленні форм існування дійсного числа.*

В цьому пункті є чудова нагода зробити порівняльний аналіз понять “система числення” і “числова система”, загостривши увагу на тому, що системи числення обслуговують числові системи (натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних, гіперкомплексних чисел), надаючи їм форму зручну для ідентифікації, порівняння і формулювання правил виконання дій.

9. Двосторонні послідовності Фібоначчі

У математиці та її застосуваннях використовуються не лише односторонні послідовності, а й двосторонні – функції, означенні на множинні цілих чисел. Вони теж можуть задаватись як формулою n-ого члена, і так і рекурентно.

Маючи односторонню послідовність Фібоначчі (c_n), $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$ з фіксованими першими двома членами c_1 і c_2, перетворивши рекурентну формулу до вигляду $c_{n+1} = c_n - c_{n+2}$, отримуємо задання лівостороннього розширення послідовності, що приводить до “двосторонньої” послідовності Фібоначчі. Наприклад, для класичної послідовності Фібоначчі матимемо

…,-21, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0; 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,… .

Помічена “симетрія” у цій двосторонній послідовності часто у студентів викликає підвищений інтерес і бажання знайти відповіді на природні запитання, що стосуються двосторонніх послідовностей. Наприклад, скільки нулів може містити двостороння послідовність Фібоначчі? Чи існує двостороння послідовність Фібоначчі, сума всіх членів якої є скінченним числом?

Використана література:

1. *Zeckendorf E.* Representation des numbers natirels par une somme de numbers de Fibonacci ou de numbers de Lucas // Bull. Soc. Royale Sci. Liege. – 1972. – 42. – P. 179-182.
2. *Бекишев Г. А., Кратко М. І.* Підсумовування послідовностей / Г. А. Бекишев, М. І. Кратко. – Київ : Вища школа, 1981. – 64 с.

3. *Бондаренко О. І., Працьовитий М. В.* Канторівська система числення, пов'язвана з двійковим рядом і послідовністю Фібоначчі / О. І. Бондаренко, М. В. Працьовитий // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – Т. 14, № 4. – Київ : Інститут математики НАН України, 2017. – С. 178-187.
4. *Василенко Н. М., Працьовитий М. В.* Математичні структури в просторі послідовностей Фібоначчі / Н. М. Василенко, М. В. Працьовитий // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2008. – С. 171-191.
5. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи / *Н. Н. Воробьев*. – Москва : Наука, 1969. – 109 с.
6. *Гнеденко Б. В.* Введение в специальность математика. – Москва : Наука. – 1991. – 240 с.
7. *Грэхем Р.* Конкретная математика: Основания информатики / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. – Москва : Мир, 1998. – 703 с.
8. *Кудрявцев В. А.* Суммирование степеней чисел натурального ряда и числа Бернулли / В. А. Кудрявцев. – Москва-Ленинград : Науч.-техн. Изд. НКТП СССР, 1936. – 72 с.
9. *Лисенко І. М., Працьовитий М. В.* Елементи дискретної математики у курсі "Вступ до спеціальності математика" / І. М. Лисенко, М. В. Працьовитий // "Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця (НПК-2017)" : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції, 7-8 грудня 2017р., м. Суми; у 2-х частинах. – Суми : ФОП Цьома С.П., 2017. – Ч. 1. – С. 112-113.
10. *Маркушевич А. И.* Возвратные последовательности / А. И. Маркушевич. – 3-е изд. – Москва : Наука, 1983. – 48 с.
11. *Працьовитий М. В.* Доцільність вивчення теми "Діофантові рівняння" в курсі "Вступ до спеціальності МАТЕМАТИКА" / М. В. Працьовитий, Н. М. Василенко, І. М. Лисенко // Наук. часоп. НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 3. Фізика і математика у вищій і середній школі : зб. наук. праць. – Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2011. – № 8. – С. 151-161.
12. *Працьовитий М. В.* Курс "Вступ до спеціальності МАТЕМАТИКА" в системі підготовки вчителя математики / М. В. Працьовитий, Н. М. Василенко, І. М. Працьовита // Проблеми математичної освіти : матеріали Міжнародної науково-методичної конференції, 24-26 листопада 2010 року, м. Черкаси, Україна. – Черкаси, 2010. – С. 270-271.
13. *Працьовитий М. В.* Конспект з предмету "Вступ до економетрії" : методична розробка для самостійної роботи студентів / М. В. Працьовитий, Є. А. Фещенко, О. Л. Лещинський. – Київ : КПЕК, 1996. – 130 с.
14. Сучасні дослідження з теорії чисел у доступному викладі для тих, хто цікавиться математикою : збірник науково-популярних статей / Інститут математики НАН України, Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова. – Київ, 2009. – 90 с.

Reference:

1. *Zeckendorf E.* Representation des numbers natirels par une somme de numbers de Fibonacci ou de numbers de Lucas // Bull. Soc. Royale Sci. Liege. – 1972. – 42. – P. 179-182.
2. *Bekyshev H. A., Kratko M. I.* Pidsumovuvannia poslidovnostei / H. A. Bekyshev, M. I. Kratko. – Kyiv : Vyshcha shkola, 1981. – 64 s.
3. *Bondarenko O. I., Pratsovytyi M. V.* Kantorivska systema chyslennia, poviazvana z dviikovym riadom i poslidovnistiu Fibonachchi / O. I. Bondarenko, M. V. Pratsovytyi // Zb. prats In-tu matematyky NAN Ukrainy. – 2017. – T. 14, № 4. – Kyiv : Instytut matematyky NAN Ukrainy, 2017. – S. 178-187.
4. *Vasylenko N. M., Pratsovytyi M. V.* Matematychni struktury v prostori poslidovnostei Fibonachchi / N. M. Vasylenko, M. V. Pratsovytyi // Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Drahomanova. Seriia 1. Fiz.-mat. nauky. – 2008. – S. 171-191.
5. *Vorobev N. N.* Chisla Fibonachchi / N. N. Vorobev. – Moskva : Nauka, 1969. – 109 s.
6. *Gnedenko B. V.* Vvedenie v specialnost matematika. – Moskva : Nauka. – 1991. – 240 s.
7. *Grehem R.* Konkretnaya matematika: Osnovaniya informatiki / R. Grehem, D. Knut, O. Patashnik. – Moskva : Mir, 1998. – 703 s.
8. *Kudryavcev V. A.* Summirovanie stepenej chisel naturalnogo ryada i chisla Bernulli / V. A. Kudryavcev. – Moskva-Leningrad : Nauch.-tehn. Izd. NKTP SSSR, 1936. – 72 s.

9. *Lysenko I. M., Pratsovytyi M. V.* Elementy dyskretnoi matematyky u kursi "Vstup do spetsialnosti matematyka" / I. M. Lysenko, M. V. Pratsovytyi // "Naukova diialnist yak shliakh formuvannia profesiinykh kompetentnostei maibutnoho fakhivtsia (NPK-2017)" : materialy Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii, 7-8 hrudnia 2017r., m. Sumy; u 2-kh chastynakh. – Sumy : FOP Tsoma S.P., 2017. – Ch. 1. – S. 112-113.
10. *Markushevich A. I.* Vozvratnye posledovatelnosti / A. I. Markushevich. – 3-e izd. – Moskva : Nauka, 1983. – 48 s.
11. *Pratsovytyi M. V.* Dotsilnist vyvchennia temy "Diofantovi rivniannia" v kursi "Vstup do spetsialnosti MATEMATYKA" / M. V. Pratsovytyi, N. M. Vasylenko, I. M. Lysenko // Nauk. chasop. NPU imeni M. P. Drahomanova. Seriia № 3. Fizyka i matematyka u vyshchii i serednii shkoli : zb. nauk. prats. – Kyiv : NPU imeni M. P. Drahomanova, 2011. – № 8. – S. 151-161.
12. *Pratsovytyi M. V.* Kurs "Vstup do spetsialnosti MATEMATYKA" v systemi pidhotovky vchytelia matematyky / M. V. Pratsovytyi, N. M. Vasylenko, I. M. Pratsovyta // Problemy matematychnoi osvity : materialy Mizhnarodnoi naukovo-metodychnoi konferentsii, 24-26 lystopada 2010 roku, m. Cherkasy, Ukraina. – Cherkasy, 2010. – S. 270-271.
13. *Pratsovytyi M. V.* Konspekt z predmetu "Vstup do ekonometrii" : metodychna rozrobka dlia samostiinoi roboty studentiv / M. V. Pratsovytyi, Ye. A. Feshchenko, O. L. Leshchynskyi. – Kyiv : KPEK, 1996. – 130 s.
14. Suchasni doslidzhennia z teorii chysel u dostupnomu vykladi dlia tykh, khto tsikavytsia matematykoiu : zbirnyk naukovo-populiarnykh statei / Instytut matematyky NAN Ukrainy, Natsionalnyi pedahohichnyi universytet imeni M. P. Drahomanova. – Kyiv, 2009. – 90 s.

Pratsiovytyi M. V. Vasylenko N. M., Lysenko I. M. Linear Spaces of numerical sequences in the course "Introduction to the specialty "MATHEMATICS"".

The content of the topic "Linear spaces of numerical sequences: two-dimensional space of Fibonacci sequences" of the course "Introduction to the specialty "MATHEMATICS"" is offered; the argumentation for usefulness of its study by first-year students specializing in mathematics at pedagogical universities are given.

Keywords: *numerical sequence, Fibonacci sequence, two-dimensional linear space of numerical sequences, course "Introduction to the specialty "MATHEMATICS"", mathematical specialties at the pedagogical university.*

Працевитый Н. В., Василенко Н. Н., Лысенко И. Н. Тема: "Линейные пространства числовых последовательностей" в курсе "Введение в специальность МАТЕМАТИКА".

Предлагается содержательное наполнение теме "Линейные пространства числовых последовательностей: двумерный пространство последовательностей Фибоначчи" в курсе "Введение в специальность МАТЕМАТИКА" с аргументацией ее целесообразности изучения первокурсниками математических специальностей педагогических университетов.

Ключевые слова: *числовая последовательность, последовательность Фибоначчи, двумерный линейное пространство числовых последовательностей, учебная дисциплина "Введение в специальность МАТЕМАТИКА", математические специальности в педагогическом университете.*