УДК 373.5.091.31:512

Швець В. О., Новікова А. О.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В КУРСІ АЛГЕБРИ ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА РУХ

У статті запропоновано квазіприкладні задачі на рух і методика їх розв'язання з учнями 7 класу. Вони органічно вписуються в курс алгебри основної школи і є ефективним засобом показу ролі математики в розв'язанні практично важливих задач. Під час розв'язування таких задач в учнів формуються вміння і навички математичного моделювання, вміння застосовувати суто математичні поняття, теореми, правила, алгоритми, рівняння для розв'язання задач, які зустрічаються в побуті, в суміжних навчальних дисциплінах.

Ключові слова: *математичне моделювання, основна школа, алгебра, квазіприкладна задача, задача на рух.*

Моделювання є одним із методів, що розвиваються і прогресують, йому притаманні такі характеристики як відкриття нового, творчість та дослідницька діяльність. Моделювання – це процес вивчення і дослідження різних об'єктів та явищ шляхом визначення їх суттєвих ознак та створення на цій основі моделей, що допомагають це вивчення і дослідження зробити успішним.

У статті ми демонструємо використання **методу математичного моделювання** у процесі розв'язування прикладних задач у яких сюжет пов'язаний із рухом транспортних засобів. Деякі задачі передбачають знання з курсу фізики, тому доречно відмітити особливості міжпредметних зв'язків між курсами алгебри та фізики.

Принагідно хочемо зазначити, що нами використовуються так звані **квазіприкладні задачі**. Як відомо, термін "*квазі*" – складова частина слів, яка при приєднанні до прикметників утворює новий прикметник зі значенням ознаки, що характеризується хибністю або удаваністю якості, що визначається головним прикметником. Вона відповідна за змістом словам: нібито, спотворений, уявний, помилковий, віртуально існуючий тощо.

Таким чином, у нашому розумінні **квазіприкладна задача – це задача, в якій описується удавана, віртуальна ситуація, що ймовірно може виникнути в реальному житті поза математикою, але для розв'язання якої потрібно використати математичні методи, знання, алгоритми.** Такі задачі – чудовий засіб для навчання учнів методу математичного моделювання.

У зв'язку з інтенсивним зростанням числа автомобілів у містах все більш гострою стає проблема виникнення заторів, що ставить на перше місце потребу у ефективному керуванні автотранспортними потоками. Підходящим інструментом для розв'язання такого роду проблем є математичне моделювання транспортних потоків (в прикладній математиці це самостійний розділ).

Учителям математики слід знати, що у моделюванні дорожнього руху історично склались два основних підходи: детермініський та ймовірнісний (стохастичний). В основі детермініського лежить функціональна залежність між окремими показниками, наприклад, швидкістю і дистанцією між автомобілями у потоці. У стохастичних моделях траспортний потік розглядається як ймовірнісний процес.

Безпека дорожнього руху у значній мірі визначається характером взаємозв'язків у потоці рухомих транспортних засобів і основними характеристиками цього потоку. Незнання природи таких взаємозв'язків обмежує можливості керування транспортним потоком і запобігання дорожньо-транспортним пригодам (ДТП). Найбільш затребуваними і часто вживаними характеристиками транспортного потоку є **інтенсивність**, **швидкість руху**, **щільність потоку**, його склад за типами транспортних засобів. Постійний моніторинг інтенсивності руху дозволяє своєчасно планувати роботи щодо змін організації дорожнього руху, модернізації та реконструкції дороги.

У багатьох містах дорожня мережа не відповідає збільшеній інтенсивності руху. На перехрестях виникають затори, життя пішоходів наражається на небезпеку, залишені біля тротуарів автомобілі сильно ускладнюють рух транспортних засобів. В оцінку рівня завантаженості доріг входять такі взаємопов'язані фактори як: швидкість руху і час, що витрачається на поїздку; безперервність руху; свобода маневрування; безпека і зручність керування транспортним засобом. Інтенсивність руху впливає на всі ці фактори, причому зі збільшенням інтенсивності її негативний вплив посилюється. Коли фактична інтенсивність руху по дорозі наближається до максимально можливої, збільшується небезпека заторів.

Нижче, нами наведемо кілька квазіприкладних задач та їх розв'язання, якими ми хочемо привернути увагу до вирішення проблеми формування в учнів вмінь і навичок математичного моделювання під час вивчення курсу алгебри основної школи.

Задача 1. *На Рис. 1 зображено графік залежності інтенсивності руху на проїжджій магістралі міста (автомобілі/годину) від часу доби t (год). Встановити:*

а) у який час доби інтенсивність руху була максимальною?

б) у який час доби інтенсивність руху автомобілів складала 70 % від максимальної?

в) визначити окремо проміжки часу на яких інтенсивність руху автомобілів зростає.

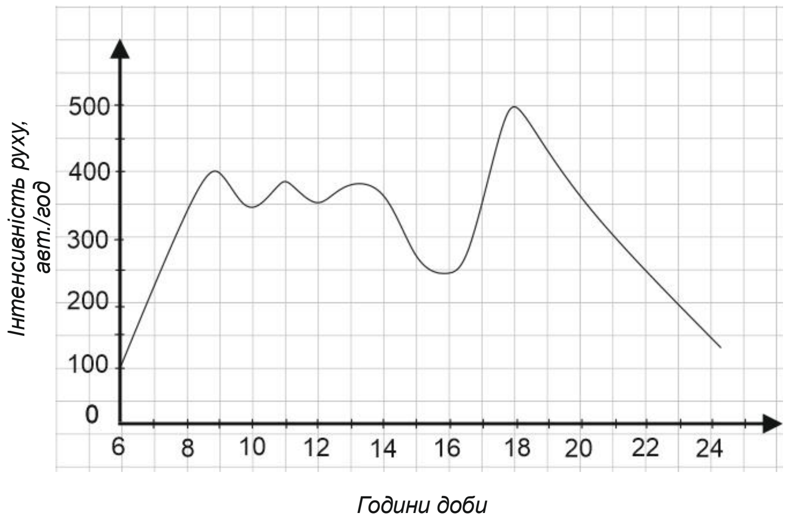

Рис. 1. Графік (модель) інтенсивності руху автомобілів

Методичний коментар

Зрозуміло, що саме такого графіка в житті, мабуть, не було, а якщо схожий трапиться, то потрібно вміти його читати. Цим слід вмотивувати учням потребу у розв'язанні такого роду задач. Далі вчитель має пояснити зміст поняття *інтенсивність руху автомобілів* (кількість автомобілів, що проїжджають по магістралі повз уявного спостерігача в певний час доби). Якщо цю величину позначити латинською літерою T, то зрозуміло що вона залежатиме від часу

Очікуване розв'язання

Максимальна інтенсивність руху $T = 500$ *авт/год*. Це відповідає за графіком для $t = 18$ *год*. Знайдемо скільки становить 70 % від максимальної інтенсивності:

$500 \cdot 0{,}7 = 350$ (*авт/год*).

Користуючись графіком знаходимо, що ординаті $T = 350$ відповідають такі значення аргументу t:

8 *год*, 10 *год*, 12 *год*, 14 *год* 20 *хв*, 17

доби, який позначають *t*.

Таким чином, учні мають усвідомити, що маємо залежність величини *T* від *t*, що, як відомо з алгебри, є функцією. Отже, маємо функцію $T = f(t)$, яка задана графічно. Після такого обговорення стає зрозумілим, що знаходження відповіді на поставлені запитання зводиться до знаходження значення функції для заданого значення аргументу, проміжки зростання тощо.

Запропонована задача доступна семикласникам, оскільки вони вивчили тему "Функція та її графік"

год, 20 *год* 10 *хв*.

Графік функції зростає на проміжках
$[6\ год; 8\ год\ 50\ хв]$; $[10\ год; 11\ год]$;
$[12\ год; 13\ год]$; $[15\ год\ 50\ хв; 18\ год]$.

Увагу учнів слід звернути на те, що значення аргументу t вибрані наближені.

Відповідь: а) 18 *год*; б) 8 *год*, 10 *год*, 12 *год*, 14 *год* 20 *хв*, 17 *год*, 20 *год* 10 *хв*; в) $[6\ год; 8\ год\ 50\ хв]$; $[10\ год; 11\ год.]$; $[12\ год; 13\ год]$; $[15\ год\ 50\ хв; 18\ год]$.

Задача 2. *Щоб розрахувати необхідний час для пішохідних світлофорів, тривалість "зеленого" сигналу вираховується за спеціальною формулою:* $T = \frac{L}{3} + 5$, *де T – мінімальний час пішохідної фази (в секундах), L – ширина проїжджої частини по довгій стороні переходу (в метрах), 1,3 м/с – розрахункова швидкість руху пішохода, 5 секунд – запас на всякий випадок для пішоходів, які маломобільні, неквапливі і такі, що запізнюються. Побудувати графік залежності часу пішохідної бази від ширини проїжджої частини і знайти значення для:* $L = 3\ м$, $L = 6\ м$.

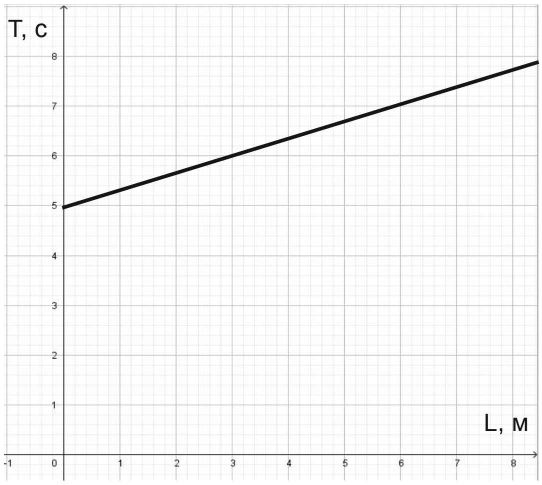

Рис. 2. Графік (модель) функції

Методичний коментар

Якщо запропонувати таку задачу семикласниками, то не кожен з них зможе розпізнати у формулі лінійну функцію. Однак, якщо літеру *T* заміни літерою *y*, а літеру *L* – літерою *x*, то матимемо формулу $y = \frac{1}{3}x + 5$,

Очікуване розв'язання

У функції $T = \frac{L}{3} + 5$ коефіцієнт $k = \frac{1}{3}$, тому вона зростає на області визначення. Відповідно до умови задачі що знайома учням як формула, якою задається лінійна функція.

Після такого розпізнавання учні повинні з'ясувати, що змінна T (вона ж y) та змінна L (вона ж x) від'ємних значень наьувати не можуть. Далі учням стають зрозумілими вимоги задачі, оскільки вони графік і властивості лінійної функції вивчили раніше.

область визначення функції $L \in (0;+\infty)$. Побудуємо графік функції по точках.

L, *м*	0	9
T, *с*	5	8

Знаходимо значення функції для $L = 3$ *м і* $L = 6$ *м.*

$$T(3) = \frac{1}{3}\cdot 3 + 5 = 6 \ (c);$$

$$T(6) = \frac{1}{3}\cdot 6 + 5 = 7 \ (c).$$

Відповідь: 6 *с* ; 7 *с*.

Задача 3. *Розрахуйте час зеленого сигналу для пішохідного світлофора, установленого на проїжджій частині шириною 15 м, якщо пішохід переходить дорогу із середньою швидкістю 5 км/год.*

(***Примітка****: при проектуванні світлофорних* об*'єктів на автомобільних дорогах, на всякий випадок,* обов*'язково, додають 5 с для маломобільних, неквапливих і тих, хто запізнився).*

Рис. 3. Пішохідний світлофор

Методичний коментар

Під час розв'язання даної задачі, учням слід пояснити що – "*зелена хвиля*" – це автоматична система світлофорного регулювання, яка має на увазі настроювання послідовно розташованих світлофорів таким чином, щоб при проїзді транспортного засобу час очікування зеленого сигналу був мінімальний. Таким чином, підвищується швидкість руху транспорту і скорочується кількість зупинок перед світлофором. Система розрахована на рух в місті з середньою швидкістю 40-50 *км/год*. Така швидкість в теорії може гарантувати водієві невпинний проїзд всієї магістралі від перехрестя до перехрестя завдяки узгодженим перемиканням сигналів світлофорів. "Зелена хвиля" спрацьовує при русі транспортних засобів на певній швидкості, яка зазвичай є рекомендованою на даній ділянці дороги. Зелений сигнал послідовно встановлених світлофорів автоматично налаштований з певним зміщенням, який розраховується виходячи з швидкості руху транспорту і відстані між світлофорами. Саме тому, щоб потрапити під "хвилю", потрібно дотримуватися швидкісного режиму.

Очікуване розв'язання

Оскільки, математична модель ситуації, що описується в задачі відома ***(див. попередня задача 2)***

$$T = \frac{L}{3} + 5.$$

(лінійна функція), то знаходимо

$$T = \frac{15}{3} + 5 = 10 \ (c).$$

Відповідь: 10 *с*.

Задача 4. *На Рис. 4 зображена ділянка дороги, обладнана чотирма світлофорами і показана Рис. 5 діаграма періодичності зміни їх сигналів. З якою швидкістю має рухатися автомобіль на окремих ділянках дороги, щоб проїхати без зупинок (спіймати так звану "зелену хвилю"). Яка середня швидкість руху автомобіля на цьому шляху?*

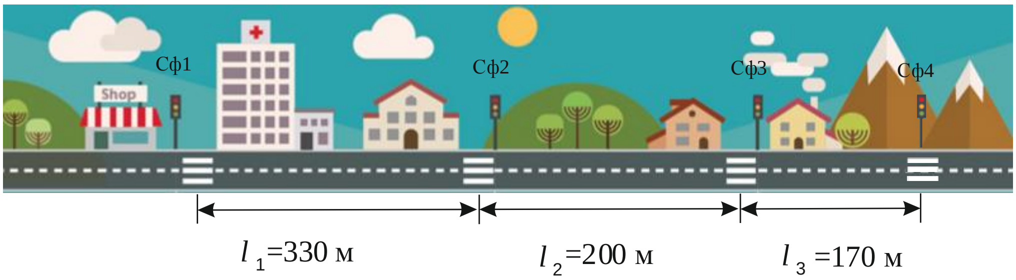

Рис. 4. Графічна схема (модель) руху транспортних засобів.

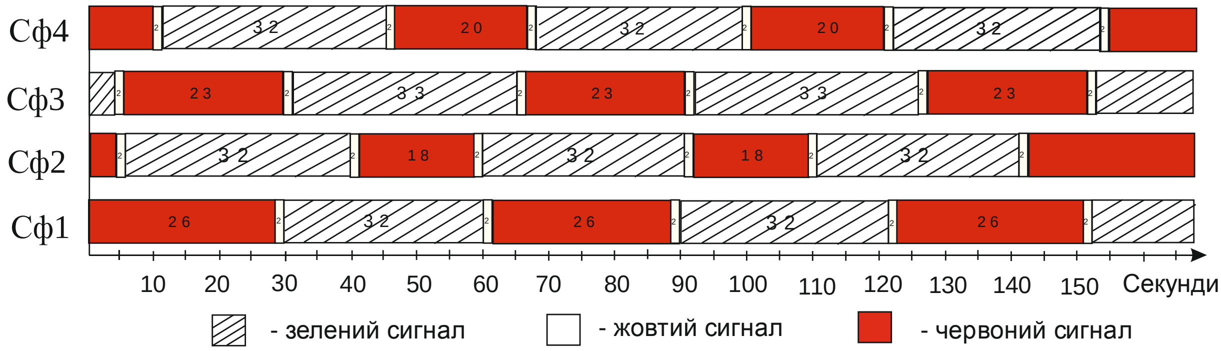

Рис. 5. Діаграма (модель) вмикання сигналів світлофорів.

Методичний коментар

У даній задачі вважатимемо рух автомобіля на кожній ділянці рівномірним. Тому для розрахунку його швидкості, якщо він піймав “зелену хвилю”, тобто, їхав на кожній ділянці на зелене світло, скористаємося формулою $S = v \cdot t$ (математичною моделлю рівномірного руху). Звідки, $v = \cdot \dfrac{S}{t}$.

Очікуване розв’язання

Щоб після першого світлофора, автомобіль на першій ділянці рухався на зелене світло і йому проїзд не закривав другий світлофор ***(див. Рис. 4 і Рис. 5)*** його швидкість на цій ділянці дорівнює

$$v_1 = \frac{l_1}{t_2} = \frac{330}{32} = 10{,}3\,\frac{м}{с} \cdot \frac{3600}{1000} \approx 37{,}1\,\frac{км}{год}.$$

Міркуючи аналогічно, знаходимо, що на другій ділянці (після другого світлофора – третій показує зелене світло), автомобіль має рухатися зі швидкістю:

$$v_2 = \frac{l_2}{t_3} = \frac{200}{33} = 6{,}06\,\frac{м}{с} \approx 21{,}8\,\frac{км}{год}.$$

І, нарешті, на третій ділянці, швидкість автомобіля має бути:

$$v_3 = \frac{l_3}{t_4} = \frac{170}{32} = 5{,}31\,\frac{м}{с} \approx 19{,}1\,\frac{км}{год}.$$

Знаходимо, за відомою формулою, середню швидкість автомобіля на всьому шляху:

$$v_{сер} = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{t_2 + t_3 + t_4} = \frac{330 + 200 + 170}{32 + 33 + 32} = 6{,}18\,\frac{м}{с} \approx 22{,}2\,\frac{км}{год}.$$

Відповідь: $37{,}1\,\frac{км}{год}$, $21{,}8\,\frac{км}{год}$, $19{,}1\,\frac{км}{год}$, $22{,}2\,\frac{км}{год}$.

Задача 5. *На проїжджій частині установлений світлофор, який перемикається після натискання спеціальної “пішохідної” кнопки (Рис. 6) і дозволяє перехід протягом певного часу після цього. Яка довжина черги автомобілів, що чекають проїзду, утвориться після вмикання дозволяючого*

сигналу для пішохода, якщо ширина дороги 16 м, швидкість автомобілів 45 км/год, пішоходи переходять вулицю зі швидкістю 5 км/год.

Рис. 6. Пішохідна кнопка.

Методичний коментар

Рух автомобілів по проїжджій частині вважатимемо рівномірним. Довжину черги автомобілів, при умові що вони будуть їхати до світлофора і зупинятися перед ним для пропуску пішоходів, можна вважати рівною шляху $S = v \cdot t$, де v – швидкість автомобіля, t – час для дозволу переходу пішоходів.

Оскільки, при переході додаються ще 5 *с* часу, як запас для пішоходів, які мало мобільні, неквапливі і такі, що запізнюються ***(див. задача 2)***, то довжину черги автомобілів будемо обчислювати за формулою $S = v \cdot (t + 5)$ (перша математична модель для розв'язання даної задачі).

Час переходу через дорогу *t*, вважаючи рух рівномірним, розраховуємо за формулою $t = \frac{H}{v_1}$ (друга математична модель для розв'язання даної задачі), де H – ширина дороги, v_1 – швидкість переходу пішохода. Вона відома із задачі 2, $v_1 = 1{,}3$ (*м/с*).

Після такого обговорення з учнями можна розпочати побудову остаточної математичної моделі до даної задачі.

Відповідь: ≈ 216 (*м*).

Очікуване розв'язання

Побудуємо математичну модель задачі. Маємо:

$S = v \cdot \left(\frac{H}{v_1} + 5 \right)$, до H – 16 *м*, $v_1 = 1{,}3$ (*м/с*), v – 45 *км/год*.

Отже, потрібно знайти значення алгебраїчного виразу при заданих значеннях змінних. Всі величини подаємо у міжнародній системі вимірювання СІ.

$$S = 45\ км/год \left(\frac{16 м}{1{,}3\ м/с} + 5\ с \right) =$$

$$= \frac{45 \cdot 1000}{3600} \left(\frac{16}{1{,}3} + 5 \right) \approx 216\ (м)$$

Розглянувши наведені вище задачі та їх розв'язання, виокремимо, наступні висновки:

– такого роду задачі є новими, на актуальну тематику, в діючих підручниках з алгебри майже відсутні. Проте, є потреба в їх створенні;

– бажано, щоб добірки таких задач, були представлені до кожної із змістових ліній курсу алгебри: вирази і їх перетворення, рівняння і нерівності, функції та їх графіки;

– розв'язання квазіприкладних задач, особливе тим, що учні мають опановувати зміст додаткових необов'язково математичних понять, вчитися будувати математичні моделі (графіки, вирази, функції, схеми, діаграми, рівняння тощо), які допомагають знаходити відповіді на запитання, поставлені в задачі;

– обчислення, які виконуються під час розв'язання такого роду задач мають здійснюватися з дотриманням правил і методів наближених обчислень, чого на сьогодні в курсу математики основної школи не проводиться.

Використана література:

1. *Семенов В. В.* Математическое моделирование динамики транспортных потоков мегаполиса / В. В. Семенов. – Москва : Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2004. – 44 с.

2. *Чінчой А. О.* Математичне моделювання як засіб здійснення міжпредметних зв'язків курсу алгебри. / А. О. Чінчой // Наукові записки. Вип 9. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. – Ч. 1. – Кіровоград : РВВ КДПУ імені Володимира Винниченка, 2016. – С. 54-61.
3. *Швець В. О.* Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики / В. О. Швець // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнародний зб. наук. робіт. – Донецьк : ТЕАН, 2009. – Вип. 32. – С. 16-23.

Reference:

1. *Semenov V. V.* Matematicheskoe modelirovanie dinamiki transportnyh potokov megapolisa / V. V. Semenov. – Moskva : Institut prikladnoj matematiki im. M. V. Keldysha RAN, 2004. – 44 s.
2. *Chinchoi A. O.* Matematychne modeliuvannia yak zasib zdiisnennia mizhpredmetnykh zviazkiv kursu alhebry. / A. O. Chinchoi // Naukovi zapysky. Vyp 9. Seriia: Problemy metodyky fizyko-matematychnoi i tekhnolohichnoi osvity. – Ch. 1. – Kirovohrad : RVV KDPU imeni Volodymyra Vynnychenka, 2016. – S. 54-61.
3. *Shvets V. O.* Matematychne modeliuvannia yak zmistova liniia shkilnoho kursu matematyky / V. O. Shvets // Dydaktyka matematyky: problemy i doslidzhennia : mizhnarodnyi zb. nauk. robit. – Donetsk : TEAN, 2009. – Vyp. 32. – S. 16-23.

Швец В., Новикова А. Математическое моделирование в курсе алгебры при решении задач на движение.

В статье раскрывается проблема формирования умений и навыков математического моделирования у учащихся 7 класса в процессе решения задач на движение. Целью статьи является ознакомление учителей и учащихся средней школы с двумя подходами к моделированию дорожного движения в условиях города. В основе первого лежит функциональная зависимость между отдельными показателями (например, скоростью и дистанцией между автомобилями в транспортном потоке). В основе второго транспортный поток рассматривается как вероятностный процесс.

Одним из средств обучения школьников методу математического моделирования выступают квазиприкладные задачи, которые демонстрируют роль математики в быту, сфере услуг, транспорте и т. д. Под квазиприкладной задачей авторы понимают задачу, в которой описывается мнимая виртуальная ситуация, что вероятно может возникнуть в реальной жизни, но для её решения используются математические методы, знания, алгоритмы. Задачи такого типа являются новыми, и на актуальную тематику в действующих учебниках практически отсутствуют. Решение квазиприкладных задач особенно тем, что ученики должны овладеть содержанием дополнительных необязательно математических понятий, научится строить математические модели (графики, выражения, функции, уравнения), которые помогают находить ответы на поставленные вопросы. Вычисления, которые совершаются в процессе решения такого рода задач, должны осуществляться с соблюдением правил приближённых вычислений. Авторы приводят примеры квазиприкладных задач, методические комментарии к ним и ожидаемые решения. Материал статьи может быть использован учителем в процессе формирования умений и навыков математического моделирования при изучении "Линейной функции" и "Задач на движение" в курсе алгебры основной школы.

Ключевые слова: *математическое моделирование, основная школа, алгебра, квазиприкладная задача, задача на движение.*

Shvets V., Novikova A. Mathematical modeling in the course of algebra when solving problems on motion.

The article proposes quasi-application problems in motion and a method for solving them with students in grade 7. They fit perfectly into the course of basic school algebra and are an effective means of showing the role of mathematics in solving practical problems. In solving such tasks students develop skills and abilities of mathematical modeling, the ability to apply purely mathematical concepts, theorems, rules, algorithms, equations for solving problems that occur in everyday life, in related disciplines.

Keywords: *mathematical modeling, basic school, algebra, quasi-application problem, problem on motion.*