УДК 514.18

УТВОРЕННЯ ІЗОТРОПНИХ ЛІНІЙ ТА МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЛОСКИХ КРИВИХ, ЗАДАНИХ ФУНКЦІЯМИ НАТУРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

С. Ф. ПИЛИПАКА, доктор технічних наук, професор,

М. М. МУКВИЧ, кандидат технічних наук, доцент

Національний університет біоресурсів і природокористування України

E-mail: engmech_centre@twin.nauu.kiev.ua

Анотація. *У даній статті здійснено аналітичний опис ізотропних ліній і мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної. Для знаходження рівнянь ізотропних ліній використано параметричні рівняння логарифмічної спіралі, заданої функціями натурального параметра. Для визначення аналітичного опису мінімальних поверхонь та приєднаних мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих використано формули Вейєрштрасса. При згинанні мінімальних поверхонь знайдено однопапараметричну множину асоційованих мінімальних поверхонь. Наведено вирази коефіцієнтів першої та другої квадратичних форм утворених мінімальних поверхонь. Показано, що плоскі криві, задані функціями натурального параметра, належать утвореним мінімальним поверхням.*

У загальному випадку для будь-якої плоскої кривої, яку задано параметричними рівняннями натурального параметра, можна знайти аналітичний опис ізотропної лінії нульової довжини. Кожній ізотропній лінії відповідає мінімальна поверхня та приєднана мінімальна поверхня, які допускають неперервне згинання. Використання функцій комплексної змінної дозволяє отримати нескладний аналітичний опис мінімальних поверхонь та досліджувати їх конструктивні геометричні параметри. Перспективи подальших досліджень полягають у визначенні диференціальних характеристик утворених мінімальних поверхонь для оптимізації інженерних методів проектування поверхонь технічних форм.

Ключові слова: *ізотропна лінія, мінімальна поверхня, приєднана мінімальна поверхня, асоційована мінімальна поверхня, логарифмічна спіраль, квадратична форма поверхні, згинання поверхні, функція комплексної змінної, формули Вейєрштрасса*

Актуальність. Аналітичний опис мінімальних поверхонь є важливою проблемою геометричного моделювання поверхонь технічних форм та архітектурних конструкцій. Якщо задано деяку замкнену плоску або просторову лінію, то мінімальна поверхня, яка проходить через цю лінію, має найменшу площу. Геометрична форма мінімальної поверхні забезпечує рівномірний розподіл зусиль в оболонці [1, с. 43].

Знаходження аналітичного опису мінімальної поверхні, яка проходить через замкнену лінію, зводиться до розв'язування нелінійного диференціального рівняння Ейлера-Лагранжа у частинних похідних, яке у загальному випадку не інтегрується [2, с. 683]. Тому, сучасні дослідження аналітичного опису мінімальних поверхонь полягають в удосконаленні варіаційних та кінцево-різницевих чисельних методів розв'язування диференціального рівняння Ейлера-Лагранжа [3-5].

Для знаходження аналітичного опису мінімальних поверхонь існує інший напрям наукових досліджень, пов'язаний із використанням властивостей функцій комплексної змінної. Використання функцій комплексної змінної дозволяє отримати параметричні рівняння мінімальних поверхонь, досліджувати їх диференціальні характеристики, оптимізувати інженерні методи проектування поверхонь технічних форм.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для знаходження аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної необхідно визначити параметричні рівняння ізотропної кривої нульової довжини [6]. У роботі Н. М. Аушевої [7] знайдено аналітичний опис ізотропних кривих Без'є. Метод аналітичного опису ізотропних кривих, які лежать на поверхнях обертання, віднесених до сітки ізометричних ліній, реалізовано у роботах [8, 9]. Дослідження, опубліковані у статті С. Ф. Пилипаки і Е. О. Чернишової [10], присвячені задачі аналітичного опису ізотропних кривих за заданою плоскою кривою – їх горизонтальною проекцією. Слід зазначити, що потребує дослідження аналітичний опис ізотропних ліній за допомогою плоских кривих, заданих функціями натурального параметра.

Мета досліджень – знайти аналітичний опис ізотропних ліній за допомогою плоских кривих, заданих функціями натурального параметра. На основі знайдених ізотропних ліній побудувати мінімальні поверхні та приєднані мінімальні поверхні.

Матеріали і методи досліджень. Для знаходження аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних ліній, заданих функціями комплексної змінної, використано формули Вейєрштрасса [6].

Результати дослідження та їх обговорення. Розглянемо плоску криву, задану параметричними рівняннями від довжини її дуги s:

$$x = x(s);\ y = y(s), \tag{1}$$

де $s -$натуральний параметр плоскої кривої, тоді [6]: $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1.$

Просторова крива, задана рівняннями:

$$x = x(s);\ y = y(s);\ z = i \cdot s, \tag{2}$$

(де $i -$уявна одиниця) є уявною ізотропною кривою нульової довжини, бо її диференціал дуги дорівнює: $\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx}{ds}\right)^2} \cdot ds = 0.$

Для знаходження рівнянь мінімальної та приєднаної до неї мінімальної поверхні необхідно в параметричних рівняннях ізотропної кривої (2) увести заміну [6]: $s = u + i \cdot v.$ Тоді отримаємо параметричні рівняння мінімальної поверхні $X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)$:

$$X(u,v) = \mathrm{Re}\{x(u + i \cdot v)\};\ Y(u,v) = \mathrm{Re}\{y(u + i \cdot v)\};\ Z(u,v) = \mathrm{Re}\{i \cdot (u + i \cdot v)\}; \tag{3}$$

та приєднаної мінімальної поверхні $X^*(u,v), Y^*(u,v), Z^*(u,v)$:

$$X^*(u,v) = \mathrm{Im}\{x(u + i \cdot v)\};\ Y^*(u,v) = \mathrm{Im}\{y(u + i \cdot v)\};\ Z^*(u,v) = \mathrm{Im}\{i \cdot (u + i \cdot v)\}. \tag{4}$$

Кількість плоских кривих, параметричні рівняння яких можна записати за допомогою функцій натурального параметра – обмежена, але для кожної з них можна знайти аналітичний опис мінімальної (3) та приєднаної мінімальної поверхні (4), причому мінімальна поверхня (3) буде проходити через плоску криву (1).

Розглянемо логарифмічну спіраль, задану рівняннями від натурального параметра s:

$$x(s)=\frac{a\cdot s}{1+a^2}\left(a\cos\left(\frac{\ln s}{a}\right)+\sin\left(\frac{\ln s}{a}\right)\right);\ y(s)=\frac{a\cdot s}{1+a^2}\left(a\sin\left(\frac{\ln s}{a}\right)-\cos\left(\frac{\ln s}{a}\right)\right). \quad (5)$$

Тоді рівняння ізотропної кривої, горизонтальною проекцією якої є логарифмічна спіраль (5), має вигляд:

$$\begin{gathered}x(s)=\frac{a\cdot s}{1+a^2}\left(a\cos\left(\frac{\ln s}{a}\right)+\sin\left(\frac{\ln s}{a}\right)\right);\\ y(s)=\frac{a\cdot s}{1+a^2}\left(a\sin\left(\frac{\ln s}{a}\right)-\cos\left(\frac{\ln s}{a}\right)\right); \qquad z(s)=i\cdot s.\end{gathered} \quad (6)$$

Уведемо заміну $s=u+i\cdot v,$ тоді, відокремивши дійсну та уявну частину для кожної з функцій, згідно (3), (4), маємо рівняння мінімальної поверхні:

$$\begin{aligned}&X(u,v)=\frac{a}{1+a^2}\cdot\left[u\cdot \mathrm{ch}\alpha\cdot(a\cos\beta+\sin\beta)+v\cdot \mathrm{sh}\alpha(a\sin\beta-\cos\beta)\right];\\ &Y(u,v)=\frac{a}{1+a^2}\cdot\left[u\cdot \mathrm{ch}\alpha\cdot(a\sin\beta-\cos\beta)-v\cdot \mathrm{sh}\alpha(a\cos\beta+\sin\beta)\right];\\ &Z(u,v)=-v,\end{aligned} \quad (7)$$

де: $\alpha=\alpha(u,v)=\frac{1}{a}\cdot arctg\left(\frac{v}{u}\right);\quad \beta=\beta(u,v)=\frac{1}{2a}\cdot\ln\left(u^2+v^2\right).$

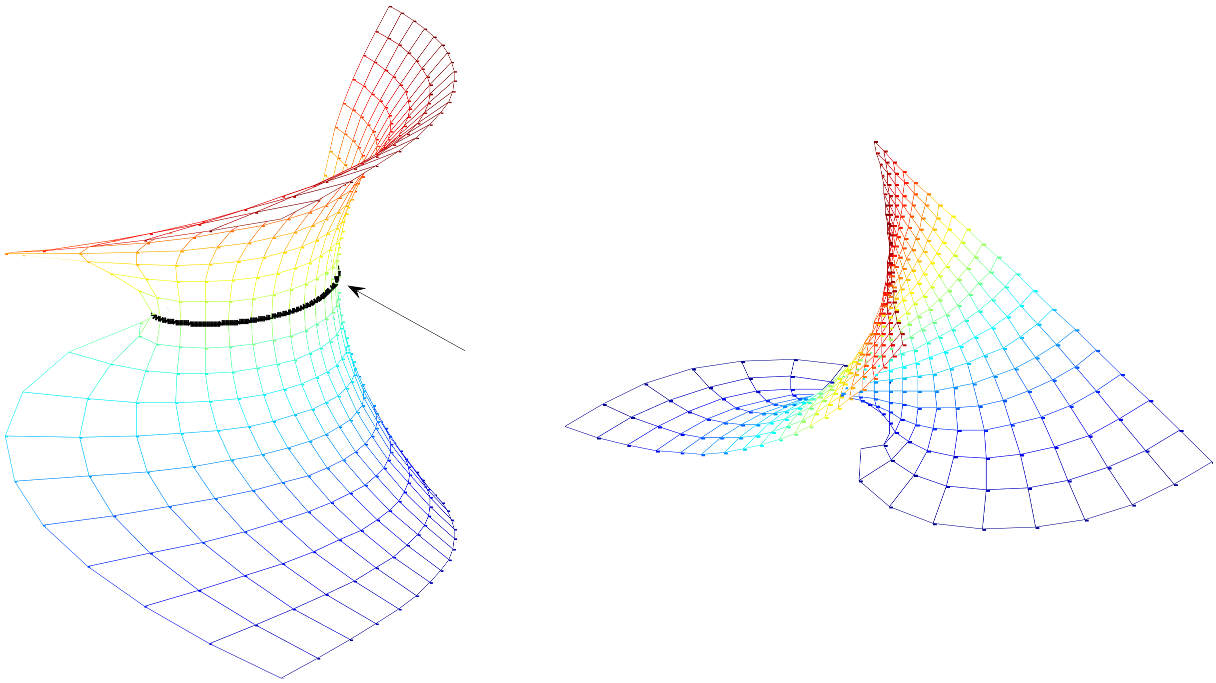
та приєднаної мінімальної поверхні:

$$\begin{aligned}&X^*(u,v)=\frac{a}{1+a^2}\cdot\left[v\cdot \mathrm{ch}\alpha\cdot(a\cos\beta+\sin\beta)-u\cdot \mathrm{sh}\alpha(a\sin\beta-\cos\beta)\right];\\ &Y^*(u,v)=\frac{a}{1+a^2}\cdot\left[v\cdot \mathrm{ch}\alpha\cdot(a\sin\beta-\cos\beta)+u\cdot \mathrm{sh}\alpha(a\cos\beta+\sin\beta)\right];\\ &Z^*(u,v)=u,\end{aligned} \quad (8)$$

де: $\alpha=\alpha(u,v)=\frac{1}{a}\cdot arctg\left(\frac{v}{u}\right);\quad \beta=\beta(u,v)=\frac{1}{2a}\cdot\ln\left(u^2+v^2\right).$

На рисунку 1 зображено відсіки мінімальної та приєднаної поверхонь, побудованих за рівняннями (7) і (8) відповідно при $a=0{,}8;$ $u\in(0;...2];$ $v\in[-1;...1].$ На рисунку 1 а стрілкою позначена потовщена логарифмічна спіраль. Коефіцієнти першої квадратичної форми мінімальної поверхні (7) та приєднаної поверхні (8) дорівнюють:

$$E = G = \left[ch\left(\frac{1}{a} arctg \frac{v}{u} \right) \right]^2; \; F = 0. \tag{9}$$



а **б**

Рис. 1. Відсіки мінімальних поверхонь, побудованих за допомогою ізотропної кривої, горизонтальною проекцією якої є логарифмічна спіраль: а) відсік мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (7); б) відсік приєднаної мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (8).

Коефіцієнти другої квадратичної форми мінімальної поверхні (7), знайдені за відомими формулами диференціальної геометрії [6], дорівнюють:

$$L = -N = \frac{u}{a\left(u^2 + v^2\right)}; \quad M = \frac{v}{a\left(u^2 + v^2\right)}. \tag{10}$$

Коефіцієнти другої квадратичної форми приєднаної мінімальної поверхні (8), дорівнюють:

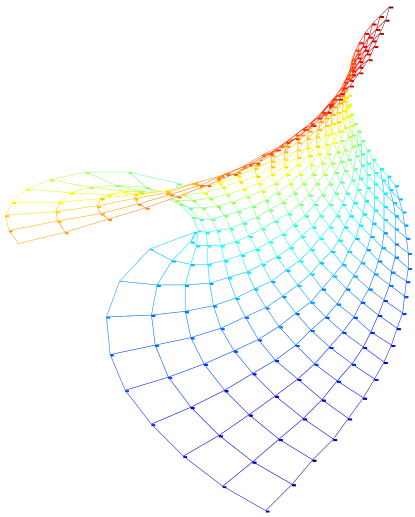
$$L^* = -N^* = -\frac{v}{a\left(u^2 + v^2\right)}; \; M^* = \frac{u}{a\left(u^2 + v^2\right)}. \tag{11}$$

Коефіцієнти першої та другої квадратичних форм побудованих поверхонь (7) та (8), перетворюють вираз середньої кривини $H = \dfrac{E \cdot N - 2 \cdot F \cdot M + G \cdot L}{2(E \cdot G - F^2)}$, для кожної із указаних поверхонь, до нуля.

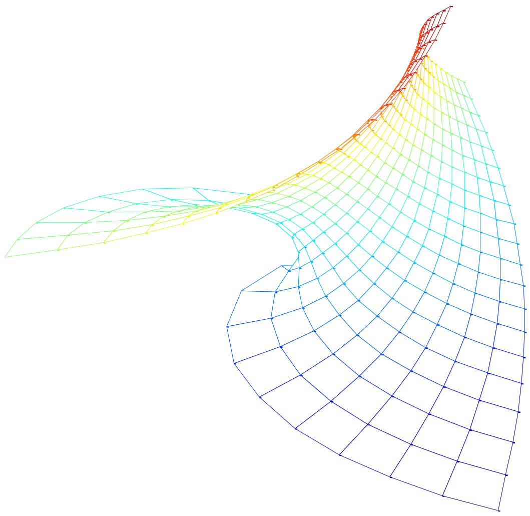
Слід зазначити, що утворені мінімальні поверхні (7) та (8), маючи рівні відповідні вирази коефіцієнтів першої квадратичної форми, допускають неперервне згинання одна на одну. Рівняння однопараметричної множини асоційованих мінімальних поверхонь мають вигляд [10]:

$$
\begin{aligned}
X_k(u,v) &= X(u,v)\cdot\cos\varphi + X^*(u,v)\cdot\sin\varphi;\\
Y_k(u,v) &= Y(u,v)\cdot\cos\varphi + Y^*(u,v)\cdot\sin\varphi;\\
Z_k(u,v) &= Z(u,v)\cdot\cos\varphi + Z^*(u,v)\cdot\sin\varphi,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

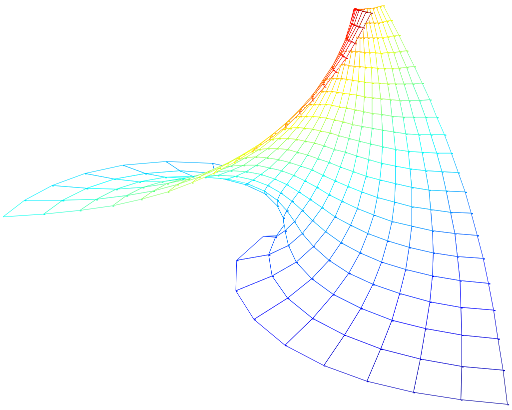
де: $X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)$ – параметричні рівняння мінімальної поверхні (7); $X^*(u,v), Y^*(u,v), Z^*(u,v)$ – параметричні рівняння приєднаної мінімальної поверхні (8); φ – параметр згинання поверхонь, $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.



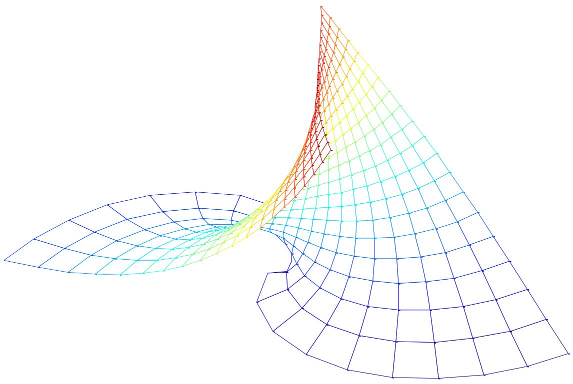
а



б



в



г

Рис. 2. Відсіки множини асоційованих мінімальних поверхонь, отриманих за рівняннями (12): а) при $\varphi = \frac{\pi}{8}$; б) при $\varphi = \frac{\pi}{4}$; в) при $\varphi = \frac{\pi}{3}$; г) при $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Очевидно, що при $\varphi = 0$ рівняння (12) задають мінімальну поверхню (7), при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ рівняння (12) задають приєднану мінімальну поверхню (8), а при інших значеннях $\varphi \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ рівняння (12) задають асоційовані мінімальні поверхні [10].

На рисунку 2 зображено відсіки асоційованих мінімальних поверхонь, отриманих за рівняннями (12) для різних значень параметра φ при неперервному згинанні мінімальної поверхні (7) до приєднаної мінімальної поверхні (8), побудовані при $a = 0{,}8$; $u \in (0;...2]$; $v \in [-1;...1]$. Усі побудовані асоційовані мінімальні поверхні мають рівні відповідні вирази (9) коефіцієнтів першої квадратичної форми.

Слід зазначити, що використання плоских кривих, заданих параметричними рівняннями натурального параметра, дозволяє отримати порівняно нескладний аналітичний опис мінімальних поверхонь для подальших досліджень їх диференціальних властивостей.

Висновки і перспективи подальших досліджень. Для будь-якої плоскої кривої, яку задано параметричними рівняннями натурального параметра, можна знайти аналітичний опис ізотропної лінії нульової довжини. Кожній ізотропній лінії відповідає мінімальна поверхня та приєднана мінімальна поверхня, які допускають неперервне згинання. Перспективи подальших досліджень полягають у дослідженні диференціальних характеристик утворених мінімальних поверхонь та оптимізації інженерних методів проектування поверхонь технічних форм.

Список використаних джерел

1. Михайленко В. Е. Конструирование форм современных архитектурных конструкций / В. Е. Михайленко, С. Н. Ковалёв. – К.: Будівельник, 1978. – 112 с.
2. Математическая энциклопедия / [гл. ред. И. М. Виноградов]. – Т.3.– М.: Изд–во «Советская энциклопедия», 1982.– С.683-690.
3. Гацунаев М. А. О равномерной сходимости кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности / М. А. Гацунаев, А. А. Клячин // Уфимский математич. журнал. Т. 6. – 2014. – № 3. – С. 3-16.
4. Hwang, Jenn-Fang. A uniqueness theorem for the minimal surface aquation // Pasific Journal of Mathematics. 1996. № 176(2).– 357-364.

5. Клячин А. А. Оценка погрешности вычисления интегральных функционалов с помощью кусочно-линейных функций / А. А. Клячин // Вестник Волгоград-ского государственного университета. Серия 1. Математика. Физика. – 2015.– № 1 (26). – С. 6-12.

6. Фиников С. П. Теория поверхностей / С. П. Фиников– М.–Л.: ГТТИ, 1934. – 206 с.

7. Аушева Н. М. Моделювання поверхонь Без'є / Н. М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Вип. 4, Т. 50. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011.– С.105-109.

8. Пилипака С. Ф. Утворення мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання астроїди / С. Ф. Пилипака, М. М. Муквич // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького.– Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016.– № 6. – С. 91-95.

9. Муквич М. М. Аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання циклоїди / М. М. Муквич // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: Видавництво ХНТУ, 2016.– № 3(58). – С. 519-523.

10. Пилипака С. Ф. Мінімальні поверхні, отримані з ізотропних кривих / С. Ф. Пилипака, Е. О. Чернишова // Збірник наукових праць КНУДТ (спецвипуск): Доповіді третьої кримської науково-практичної конференції "Геометричне та комп’ютерне моделювання: енергозбереження, екологія, дизайн". – К.: ДОП КНУТД, 2006. – С. 40-45.

References

1. Mikhailenko, V.E., Kovalev, S.N. (1978). Konstruirovanie form sovremennykh arkhitekturnykh konstruktsiy [Construction of forms of modern architectural structures]. Kiev: Budivel'nyk, 112.

2. Matematicheskaya entsyklopediya. (1982). [Encyclopedia of mathematics]. Moscow: Sovetskaya entsyklopediya, 683–690.

3. Hatsunaev, M.A., Klyachin, A.A. (2014). O ravnomernoy skhodimosti kusochno-lineynykh resheniy uravneniya minimal'noy poverkhnosti [On uniform convergence of piecewise-linear solutions to minimal surface equation]. Ufimskiy matematych. zhurnal, 6(3), 3–16.

4. Hwang, Jenn-Fang. (1996). A uniqueness theorem for the minimal surface aquation. Pasific Journal of Mathematics, 176(2), 357–364.

5. Klyachin, A.A. (2015). Otsenka pohreshnosti vychisleniya intehral'nykh funktsyonalov s pomoshch'yu kusochno-lineynykh funktsiy [Error estimate calculation of integral functionals using piecewise linear functions]. Vestnik Volhohradskoho hosudarstvennoho universiteta, 1(26), 6–12.

6. Finikov, S.P. (1934). Teoriya poverkhnostey [Theory of surfaces]. Moskva–Leningrad: HTTI, 206.

7. Ausheva, N.M. (2011). Modelyuvannya poverkhon' Bez'ye [Modeling Bezier surfaces]. Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika, 4(50), 105–109.

8. Pylypaka, S.F., Mukvich M.M. (2016). Utvorennya minimal'nykh poverkhon' za dopomohoyu izotropnykh kryvykh, yaki lezhat' na poverkhni obertannya astroyidy [Construction of the minimal surface using isotropic curved, lying on the rotational surface of the astroid]. Suchasni problemy modelyuvannya, 6, 91–95.

9. Mukvich, M.M. (2016). Analitychnyy opys minimal'nykh poverkhon' za dopomohoyu izotropnykh kryvykh, yaki lezhat' na poverkhni obertannya tsykloyidy [Analytical description of the minimal surface using isotropic curved, lying on the rotational surface of the cycloid]. Visnyk Khersons'koho natsional'noho tekhnichnoho universytetu, 3(58), 519–523.

10. Pylypaka, S.F., Chernyshova, E.O. (2006). Minimal'ni poverkhni, otrymani z izotropnykh kryvykh [Minimum surface obtained from isotropic curves]. Zbirnyk naukovykh prats' KNUDT, 40–45.

ОБРАЗОВАНИЕ ИЗОТРОПНЫХ ЛИНИЙ И МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ, ЗАДАННОЙ ФУНКЦИЕЙ НАТУРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

С. Ф. Пилипака, Н. Н. Муквич

Аннотация. *В данной статье получено аналитическое описание изотропных линий и минимальных поверхностей с помощью функций комплексного переменного. Для нахождения уравнений изотропных линий использовано параметрические уравнения логарифмической спирали, заданной функциями натурального параметра. Для определения аналитического описания минимальных поверхностей и присоединённых минимальных поверхностей с помощью изотропных кривых использовано формулы Вейерштрасса. При изгибании минимальных поверхностей получено однопапараметрическое множество ассоциированных минимальных поверхностей. Приведены выражения коэффициентов первой и второй квадратичных форм образованных минимальных поверхностей. Показано, что плоские кривые, заданные функциями натурального параметра, принадлежат образованным минимальным поверхностям.*

В общем случае для произвольной плоской кривой, заданной параметрическими уравнениями натурального параметра, можно отыскать аналитическое описание изотропной линии нулевой длинны. Каждой изотропной линии соответствует минимальная поверхность и присоединённая минимальная поверхность, которые допускают непрерывное изгибание. Использование функций комплексной переменной позволяет получить несложное аналитическое описание минимальных поверхностей и исследовать их конструктивные геометрические параметры. Перспективы дальнейших исследований заключаются в определении дифференциальных характеристик образованных минимальных поверхностей для оптимизации инженерных методов проектирования поверхностей технических форм.

Ключевые слова: *изотропная линия, минимальная поверхность, присоединённая минимальная поверхность, ассоциированная минимальная* *поверхность, логарифмическая спираль, квадратичная форма поверхности, изгибание поверхности, функция комплексного переменного, формулы Вейерштрасса*

MODELLING OF ISOTROPIC LINES AND MINIMAL SURFACES WITH A HELP OF FLAT CURVES, GIVEN BY NATURAL PARAMETER FUNCTIONS

S. F. Pylypaka, M. M. Mukvich

Abstract. *This article provides an analytical description of isotropic lines and minimal surfaces with a help of complex variable functions. To find the equation of isotropic lines we used parametric equations of a logarithmic spiral defined by natural parameter functions. To find analytical description of minimal and associated surfaces with the help of isotropic lines, Weierstrass formula was applied. When bending minimal surfaces one-parameter set of associated minimal surfaces was found. Expressions of first and second coefficients of quadratic forms of generated minimal surfaces are given. It is shown that the plane curves, given by natural parameter functions, belong to formed minimal surfaces.*

It is possible to find an analytical description of isotropic line of zero length for any plane curve defined by parametric equations of natural parameter. Each isotropic line corresponds to the minimum isotropic surface and associated minimal surface that allow continuous bending. Use of function of a complex variable allows getting a simple analytical description of minimal surfaces, investigating their design geometrical parameters. Prospects for future research are to study the differential characteristics of adjoin minimal surfaces and optimization of engineering methods of technical surfaces forms design.

Keywords: *isotropic line, minimal surface, minimal surface, adjoin minimal surface, associated minimal surface, logarithmic spiral, quadratic form of a surface, bending of a surface, function of a complex variable, Weierstrass formula*