УДК 517.968.7

МОДИФІКОВАНИЙ ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОД ДЛЯ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ

О. Б. Нестеренко

Київ. нац. ун-т технологій та дизайну

We give a substantiation for applying the modified projection-iteration method to solve a boundary-value problem for the weakly nonlinear integral-differential equations with parameters.

Обосновано применение модифицированного проекционно-итеративного метода к решению краевой задачи для слабонелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами.

У роботі [3] розглядалось інтегро-диференціальне рівняння вигляду

$$(Lx)(t) = f(t) + C(t)\lambda + \varepsilon \int_a^b H(t,s)F\left(s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(m-1)}(s)\right) ds \tag{1}$$

і ставилась задача знаходження такої функції $x \in W_2^m[a,b]$ та параметра $\lambda \in \mathbb{R}^l$, які задовольняють рівняння (1) майже скрізь, крайові умови

$$U(x) = \gamma \tag{2}$$

та обмеження

$$\int_a^b S(t)x(t)\, dt = \alpha. \tag{3}$$

Якщо така пара $(x(t), \lambda)$ існує, то задачу (1) – (3) вважаємо сумісною.

В зображеннях (1) – (3)

$$(Lx)(t) = x^{(m)}(t) + p_1(t)x^{(m-1)}(t) + \ldots + p_m(t)x(t), \tag{4}$$

$t \in [a,b]$, ε — достатньо малий невід'ємний параметр, $f \in L_2[a,b]$, $\{p_1, \ldots, p_m\} \subset L_2[a,b]$, ядро $H(t,s)$ є сумовним з квадратом за сукупністю змінних, $(1 \times l)$-матриця $C(t)$, $(l \times 1)$-матриця $S(t)$, елементи яких є лінійно незалежними функціями, сумовні з квадратом на відрізку $[a,b]$, стала $(m \times 1)$-матриця U, елементи якої мають вигляд

$$U_\nu(x) = \sum_{i=1}^{m} \left(\alpha_{\nu i} x^{(i-1)}(a) + \beta_{\nu i} x^{(i-1)}(b)\right),$$

та $\gamma \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}^l$ є заданими.

Припускалось також, що оператор

$$(Fx)(t) = F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(m-1)}(t)), \tag{5}$$

який визначається функцією $F : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, відображає простір $W_2^m[a,b]$ у простір $L_2[a,b]$.

У цій же роботі було встановлено умови існування та єдиності розв'язку наведеної вище задачі.

У даній статті розглядається застосування до поставленої задачі модифікованого проекційно-ітеративного методу.

Суть цього методу полягає в наступному. Нехай наближення $(x_{k-1}(t), \lambda_{k-1})$ до шуканого розв'язку вже побудовано і функція $y_{k-1}(t)$ також є відомою.

Знаходимо функцію

$$z_k(t) = x_{k-1}(t) + \delta_k(t). \tag{6}$$

Поправка $\delta_k(t)$ — це розв'язок задачі

$$(A\delta_k)(t) = C(t)\beta_k + \Phi(t)\mu_k, \quad U(\delta_k) = 0, \tag{7}$$

в якій невідомі вектори $\beta_k \in \mathbb{R}^l$ та $\mu_k \in \mathbb{R}^n$ визначаємо так, щоб справджувались умови

$$\int_a^b S(t)\delta_k(t)dt = 0, \tag{8}$$

$$\int_a^b \Psi(t)(y_k(t) - y_{k-1}(t) - \Phi(t)\mu_k)\, dt = 0, \tag{9}$$

де

$$y_k(t) = f(t) + (Bz_k)(t) + \varepsilon \int_a^b H(t,s)(Fx_{k-1})(s)\, ds. \tag{10}$$

Наступне наближення визначаємо із задачі

$$(Ax_k)(t) = C(t)\lambda_k + y_k(t), \quad U(x_k) = \gamma, \quad \int_a^b S(t)x_k(t)dt = \alpha. \tag{11}$$

У методі оператор A, що визначається формулою

$$(Ax)(t) = x^{(m)}(t) + c_1(t)x^{(m-1)}(t) + \ldots + c_m(t)x(t), \tag{12}$$

$(1 \times n)$-матриця $\Phi(t)$ та $(n \times 1)$-матриця $\Psi(t)$ із сумовними з квадратом елементами на відрізку $[a,b]$ є заданими, причому стовпці матриці $\Phi(t)$ і рядки матриці $\Psi(t)$ є лінійно незалежними, оператор F має вигляд (5), а оператор B знаходиться за формулою

$$(Ax)(t) - (Lx)(t) = (Bx)(t). \tag{13}$$

Початкове наближення $(x_0(t), \lambda_0)$ знаходимо із задачі (11) при $k = 0$ і заданій функції $y_0(t)$.

Запишемо формули (6) – (9) в дещо спрощеному вигляді

$$(Az_k)(t) = C(t)\beta_k + \Phi(t)\mu_k + (Ax_{k-1})(t), \tag{14}$$

$$U(z_k) = \gamma, \quad \int\limits_a^b S(t)z_k(t)dt = \alpha, \tag{15}$$

$$\int\limits_a^b \Psi(t)(y_k(t) - y_{k-1}(t) - \Phi(t)\mu_k)dt = 0. \tag{16}$$

За припущення, що однорідна задача

$$(Ax)(t) = C(t)\lambda, \quad U(x) = 0, \quad \int\limits_a^b S(t)x(t)\,dt = 0$$

має лише тривіальний розв'язок [4], для визначення невідомих параметрів $\mu_k \in \mathbb{R}^n$ отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Справді, за такого припущення задача (14), (15) має єдиний розв'язок

$$z_k(t) = h(t) + \int\limits_a^b G(t,s)((Ax_{k-1})(s) + \Phi(s)\mu_k)\,ds,$$

$$\beta_k = \sigma + \int\limits_a^b \Gamma(s)((Ax_{k-1})(s) + \Phi(s)\mu_k)\,ds,$$

який із урахуванням першої формули (11) набирає вигляду

$$z_k(t) = h(t) + \int\limits_a^b G(t,s)(y_{k-1}(s) + \Phi(s)\mu_k)\,ds, \tag{17}$$

$$\beta_k = \int_a^b \Gamma(s)\Phi(s)\mu_k\, ds. \tag{18}$$

Оскільки задача (11) також має єдиний розв'язок

$$x_k(t) = h(t) + \int_a^b G(t,s)y_k(s)\, ds, \tag{19}$$

$$\lambda_k = \sigma + \int_a^b \Gamma(s)y_k(s)\, ds, \tag{20}$$

то, врахувавши його і позначення

$$Y(t) = \int_a^b G(t,s)\Phi(s)\, ds, \tag{21}$$

очевидно, формулу (17) можемо записати у вигляді

$$z_k(t) = x_{k-1}(t) + Y(t)\mu_k. \tag{22}$$

Підставляючи (22) у формулу (10) і враховуючи позначення

$$Z(t) = (BY)(t), \tag{23}$$

$$v_k(t) = f(t) + (Bx_{k-1})(t) + \varepsilon \int_a^b H(t,s)F\left(s, x_{k-1}(s), \ldots, x_{k-1}^{(m-1)}(s)\right)\, ds, \tag{24}$$

маємо

$$y_k(t) = v_k(t) + Z(t)\mu_k. \tag{25}$$

Замінивши в умові (16) функцію $y_k(t)$ виразом (25), отримаємо для визначення параметра μ_k систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\int_a^b \Psi(t)(\Phi(t) - Z(t))\mu_k dt = \int_a^b \Psi(t)(v_k(t) - y_{k-1}(t))dt,$$

яку, використавши позначення

$$\Lambda = \int_a^b \Psi(t)\left(\Phi(t) - Z(t)\right)\, dt, \quad d_k = \int_a^b \Psi(t)\left(v_k(t) - y_{k-1}(t)\right)\, dt, \tag{26}$$

запишемо у вигляді

$$\Lambda \mu_k = d_k. \tag{27}$$

Якщо матриця Λ невироджена, то, очевидно, наближені розв'язки задачі (1) – (3) за методом, що ґрунтується на формулах (10), (11), (14) – (16), будуються однозначно.

Запропонований метод, що ґрунтується на формулах (10), (11), (14) – (16), для задачі (1) – (3) можна звести до модифікованого проекційно-ітеративного методу щодо інтегрального рівняння, яке задля скорочення подальших викладок запишемо у вигляді

$$y(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s)y(s)\,ds + \varepsilon \int_a^b H(t,s)(Ty)(s)\,ds, \tag{28}$$

де

$$(Ty)(t) = F\left(t, h(t) + \int_a^b G(t,\xi)y(\xi)\,d\xi, \ldots, h^{(m-1)}(t) + \int_a^b \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} G(t,\xi)y(\xi)\,d\xi\right). \tag{29}$$

Для цього використаємо формули (17), (13) та

$$K(t,s) = (BG)(t,s), \quad g(t) = f(t) + (Bh)(t) \tag{30}$$

і (5), (19), (29), за допомогою яких легко встановити правильність рівностей

$$f(t) + (Bz_k)(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s)(y_{k-1}(s) + \Phi(s)\mu_k)\,ds, \tag{31}$$

$$(Fx_{k-1})(t) = (Ty_{k-1})(t). \tag{32}$$

Взявши до уваги рівності (31), (32), очевидно, формулу (10) можна записати у вигляді

$$y_k(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s)(y_{k-1}(s) + \Phi(s)\mu_k)\,ds + \varepsilon \int_a^b H(t,s)(Ty_{k-1})(s)\,ds. \tag{33}$$

Аналізуючи формули (33) та (16), приходимо до висновку, що вони виражають суть модифікованого проекційно-ітеративного методу щодо інтегрального рівняння (28).

Таким чином, дослідження збіжності методу, що ґрунтується на формулах (10), (11), (14) – (16), побудови наближених розв'язків задачі (1) – (3) і встановлення оцінок похибки зводиться до аналогічних питань щодо відомого [5] модифікованого проекційно-ітеративного методу відносно інтегрального рівняння (28).

Перейдемо тепер до встановлення достатніх умов збіжності та оцінок похибки методу (10), (11), (14) – (16).

Нехай матриця Λ, що обчислюється за формулою (26), є невиродженою. Тоді єдиним розв'язком системи рівнянь (27) є $\mu_k = \Lambda^{-1} d_k$, або, враховуючи вираз (26),

$$\mu_k = \int_a^b \Lambda^{-1} \Psi(t)(v_k(t) - y_{k-1}(t))\, dt. \tag{34}$$

Оскільки функцію $v_k(t)$, що визначається формулою (24), неважко за допомогою формул (31) (вважаючи $\Phi(t) = 0$) та (32) зобразити у вигляді

$$v_k(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s) y_{k-1}(s)\, ds + \varepsilon \int_a^b H(t,s)(T y_{k-1})(s)\, ds, \tag{35}$$

то, ввівши ще позначення

$$J(s) = \int_a^b \Psi(t) H(t,s)\, dt, \quad E(s) = \int_a^b \Psi(t) K(t,s)\, dt - \Psi(s), \tag{36}$$

будемо мати

$$\int_a^b \Psi(t)(v_k(t) - y_{k-1}(t))\, dt = \int_a^b \Psi(t) g(t)\, dt +$$

$$+ \int_a^b E(s) y_{k-1}(s)\, ds + \varepsilon \int_a^b J(s)(T y_{k-1})(s)\, ds. \tag{37}$$

Якщо тепер підставити (37) у формулу (34), то в результаті отримаємо

$$Z(t)\mu_k = \int_a^b Z(t)\Lambda^{-1}(\Psi(s) g(s) + E(s) y_{k-1}(s))\, ds + \varepsilon \int_a^b Z(t)\Lambda^{-1} J(s)(T y_{k-1})(s)\, ds. \tag{38}$$

На основі формул (21), (30), як про це згадувалось вище, неважко встановити, що

$$Z(t) = \int_a^b K(t,s)\Phi(s)\, ds, \tag{39}$$

а тому формулу (33) можна записати у вигляді

$$y_k(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s) y_{k-1}(s)\, ds + Z(t)\mu_k + \varepsilon \int_a^b H(t,s)(T y_{k-1})(s)\, ds. \tag{40}$$

Із формул (38) та (40) остаточно випливає

$$y_k(t) = g(t) + \int_a^b Z(t)\Lambda^{-1}\Psi(s)g(s)\,ds + \int_a^b (K(t,s) + Z(t)\Lambda^{-1}E(s))y_{k-1}(s)\,ds +$$

$$+\,\varepsilon \int_a^b (H(t,s) + Z(t)\Lambda^{-1}J(s))(Ty_{k-1})(s)ds,$$

або, з використанням позначень

$$p(t) = g(t) + \int_a^b Z(t)\Lambda^{-1}\Psi(s)g(s)\,ds, \tag{41}$$

$$\Omega(t,s) = K(t,s) + Z(t)\Lambda^{-1}E(s), \tag{42}$$

$$N(t,s) = H(t,s) + Z(t)\Lambda^{-1}J(s), \tag{43}$$

$$y_k(t) = p(t) + \int_a^b \Omega(t,s)y_{k-1}(s)\,ds + \varepsilon \int_a^b N(t,s)(Ty_{k-1})(s)\,ds. \tag{44}$$

Таким чином, побудова послідовності наближених розв'язків інтегрального рівняння (28) за модифікованим проекційно-ітеративним методом (33), (16) зводиться до побудови послідовності (44), яку можна трактувати як метод послідовних наближень для інтегрального рівняння

$$y(t) = p(t) + \int_a^b \Omega(t,s)y(s)\,ds + \varepsilon \int_a^b N(t,s)(Ty)(s)\,ds. \tag{45}$$

Зазначимо, що, по-перше, рівняння (28) та (45) еквівалентні, причому друге можна безпосередньо отримати із першого, якщо виконати ті ж самі перетворення, що і при зведенні модифікованого проекційно-ітеративного методу (33), (16) до методу послідовних наближень (44), а по-друге, метод послідовних наближень широко відомий у літературі (див., наприклад, [1, 2]).

1. *Самойленко А. М., Мартинюк С. В.* Обоснование численно-аналитического метода последовательных приближений для задач с интегральными краевыми условиями // Укр. мат. журн. — 1991. — **43**, № 9. — С. 1231 – 1239.

2. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Модификация численно-аналитического метода последовательных приближений для краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 1990. — **42**, № 8. — С. 1107 – 1116.

3. *Лучка А. Ю., Нестеренко О. Б.* Методи розв'язування крайових задач для слабконелінійних інтегро-диференціальних рівнянь з параметрами і обмеженнями // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 5. — С. 672–679.

4. *Нестеренко О. Б.* Ітераційний метод розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь з обмеженнями // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, № 3. — С. 336–347.

5. *Лучка А. Ю.* Проекционно-интеративные методы. — Киев: Наук. думка, 1993. — 288 с.

Одержано 24.12.12