УДК 517.9

НЕЛИНЕЙНЫЕ НЕТЕРОВЫ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА*

С. М. Чуйко

Донбас. гос. пед. ун-т
Украина, 84116, Славянск Донецкой обл., ул. Генерала Батюка, 19

Ан. А. Бойчук

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3

И. А. Бойчук

Ин-т электросварки им. Е. О. Патона НАН Украины
Украина, 03680, Киев, ул. Боженко, 11

We find necessary and sufficient conditions for existence of solution of a weakly nonlinear Noether boundary-value problem for a system of second order ordinary differential equations in the critical case.

Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків слабконелінійної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у критичному випадку другого порядку.

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о построении решения $z(t,\varepsilon) : z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b]$, $z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$ краевой задачи $[1, 2]$

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \quad \ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{1}$$

Решение задачи (1) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$\frac{dz_0}{dt} = A(t)z_0 + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

Здесь $A(t)$ — $(n\times n)$-мерная матрица и $f(t)$ — n-мерный вектор-столбец, элементы которых — непрерывные на отрезке $[a,b]$ действительные функции, $\ell z(\cdot)$ —линейный ограниченный векторный функционал $\ell z(\cdot) : C[a,b] \to \mathbb{R}^m$. Нелинейности $Z(z,t,\varepsilon)$ и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ нетеровой $(m \neq n)$ задачи (1) предполагаем дважды непрерывно дифференцируемыми по неизвестной z в малой окрестности порождающего решения и по малому параметру ε в малой положительной окрестности нуля. Кроме того, считаем вектор-функцию $Z(z,t,\varepsilon)$ непрерывной по независимой переменной t на отрезке $[a,b]$. Исследован критический случай $(P_{Q^*} \neq 0)$, причем предполагается выполненным условие

$$P_{Q_d^*}\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\} = 0. \tag{3}$$

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0109U000381).

В этом случае порождающая задача (2) имеет $(r = n - n_1)$-параметрическое семейство решений $z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t)$, $c_r \in \mathbb{R}^r$. Здесь $X(t)$ — нормальная $(X(a) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной части системы (3), $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-матрица, $\operatorname{rank} Q = n_1$, $X_r(t) = X(t)P_{Q_r}$, P_{Q_r} — $(n \times r)$-матрица, составленная из r линейно независимых столбцов $(n \times n)$-матрицы-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to N(Q)$, $P_{Q_d^*}$ — $(r \times n)$-матрица, составленная из r линейно независимых строк $(n \times n)$-матрицы-ортопроектора $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$,

$$G[f(s); \alpha](t) = X(t)Q^+\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\} + K[f(s)](t)$$

— обобщенный оператор Грина краевой задачи (2),

$$K[f(s)](t) = X(t)\int_a^t X^{-1}(s)f(s)\,ds$$

— оператор Грина задачи Коши для системы (2), Q^+ — псевдообратная матрица по Муру – Пенроузу [1 – 4].

2. Необходимые условия существования решения. Необходимые условия существования решения $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon)$ исходной задачи (1) в критическом случае определяет следующая лемма [1, 2].

Лемма. *Пусть краевая задача (1) представляет критический* $(P_{Q^*} \neq 0)$ *случай и выполнено условие (3) разрешимости порождающей задачи (2). Предположим также, что задача (1) имеет решение, обращающееся при* $\varepsilon = 0$ *в порождающее* $z_0(t, c_r^*)$. *Тогда вектор* $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ *удовлетворяет уравнению*

$$F_0(c_r) = P_{Q_d^*}\{J(z_0(\cdot, c_r), 0) - \ell K[Z(z_0(s, c_r), s, 0)](\cdot)\} = 0. \qquad (4)$$

Решение задачи (1) ищем в виде $z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon)$, возмущение $x(t, \varepsilon)$ определяет краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon Z(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad \ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \qquad (5)$$

В малой окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$ имеет место следующее разложение:

$$Z(z_0(t, c_r^*) + x, t, \varepsilon) = Z(z_0(t, c_r^*), t, 0) + dZ(z_0(t, c_r^*), t, 0) + R_1(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon).$$

Дифференциал $dZ(z_0(t, c_r^*), t, 0) = A_{1,0}(t)x + \varepsilon A_{0,1}(t)$ выражается через производные

$$A_{1,0}(t) := \left.\frac{\partial Z(z, t, \varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*) \\ \varepsilon = 0}}, \quad A_{0,1}(z_0(t, c_r^*)) := \left.\frac{\partial Z(z, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*) \\ \varepsilon = 0}}.$$

Аналогично в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$ разлагаем функционал

$$J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + dJ(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon).$$

Дифференциал $dJ(z_r(\cdot, c_0^*), 0) = \ell_{1,0}x(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon\ell_{0,1}(z_0(\cdot, c_r^*))$ выражается через производные

$$\ell_{1,0}x(\cdot, \varepsilon) := \left.\frac{\partial J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z=z_0(t,c_0^*)\\ \varepsilon=0}}$$

и

$$\ell_{0,1}(z_0(\cdot, c_0^*)) := \left.\frac{\partial J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{z=z_0(t,c_0^*)\\ \varepsilon=0}}.$$

Обозначая постоянную $(d \times r)$-матрицу

$$B_0 = P_{Q_d^*}\{\ell_{1,0}X_r(\cdot) - \ell K[A_{1,0}(s)X_r(s)](\cdot)\},$$

приходим к операторной системе, равносильной задаче (5):

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)c_r + x^{(1)}(t, \varepsilon),$$

$$\begin{gathered} B_0c_r = -P_{Q_d^*}\{\ell_{1,0}x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon\ell_{0,1}(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \\ - \ell K[A_{1,0}(s)x^{(1)}(s, \varepsilon) + \varepsilon A_{0,1}(s) + R_1(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)](\cdot)\}, \end{gathered} \tag{6}$$

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G[Z(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon); J(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)](t).$$

Краевая задача (1) в критическом случае при условии $P_{B_0^*} = 0$, гарантирующем разрешимость второго уравнения операторной системы (6), подробно изучена в монографиях [1, 6]. Здесь $P_{B_0^*}$ — $(d \times d)$-матрица-ортопроектор: $\mathbb{R}^d \to N(B_0^*)$. В статье [5] исследована периодическая задача, являющаяся частным случаем краевой задачи (1), для которой условие $P_{B_0^*} = 0$ не выполняется. Целью данной статьи является изучение общей нетеровой нелинейной краевой задачи (1) при условии $P_{B_0^*} \neq 0$.

3. Достаточное условие. Уточним разложения нелинейностей задачи (1)

$$R_1(z_0(t, c_r^*) + x, t, \varepsilon) = \frac{1}{2}\, d^2Z(z_0(t, c_r^*), t, 0) + R_2(z_0(t, c_r^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon).$$

Второй дифференциал [10]

$$d^2Z(z_0(t, c_r^*), t, 0) = A_{2,0}(t, x(t, \varepsilon))x(t, \varepsilon) + 2\varepsilon A_{1,1}(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon^2 A_{0,2}(z_0(t, c_r^*))$$

выражается посредством $(n \times n)$-матриц [7]

$$A_{2,0}(t, x) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial Z(z, t, \varepsilon)}{\partial z}\, x\right]\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}, \quad A_{1,1}(t) = \left.\frac{\partial^2 Z(z, t, \varepsilon)}{\partial z \partial \varepsilon}\right|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}$$

и n-мерного вектора-столбца

$$A_{0,2}(z_0(t, c_r^*)) := \left.\frac{\partial^2 Z(z, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\right|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}.$$

Аналогично в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$ имеет место разложение [10]

$$J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = \frac{1}{2}\, d^2 J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + J_2(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon).$$

Второй дифференциал

$$d^2 J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) = \ell_{2,0}(x(\cdot, \varepsilon))x(\cdot, \varepsilon) + 2\varepsilon\ell_{1,1}x(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon^2 \ell_{0,2}(z_0(\cdot, c_r^*))$$

представим посредством производных по Фреше

$$\ell_{2,0}(x(\cdot, \varepsilon))x(\cdot, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial z}\, [\partial J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\partial z\, x(\cdot, \varepsilon)]\big|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0,}},$$

$$\ell_{1,1}x(\cdot, \varepsilon) = \frac{\partial^2 J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z \partial \varepsilon}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}},$$

$$\ell_{0,2}(z_0(\cdot, c_r^*)) = \frac{\partial^2 J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}.$$

При условии $P_{B_0^*} \neq 0$ второе уравнение операторной системы (6) разрешимо в случае

$$P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \Big\{\ell_{1,0}x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon\ell_{0,1}(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -$$
$$- \ell K\Big[A_{1,0}(s)x^{(1)}(s, \varepsilon) + \varepsilon A_{0,1}(s) + R_1(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} = 0,$$

при этом решение $c_r = c_r^{(0)} + c_r^{(1)}$ второго уравнения операторной системы (6) определяют два вектора

$$c_r^{(0)} = -B_0^+ P_{Q_d^*} \Big\{\ell_{1,0}x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon\ell_{0,1}(z_0(\cdot, c_r^*), 0) + J_1(z_0(\cdot, c_r^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) -$$
$$- \ell K\Big[A_{1,0}(s)x^{(1)}(s, \varepsilon) + \varepsilon A_{0,1}(s) + R_1(z_0(s, c_r^*) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}, \quad c_r^{(1)} \in N(B_0).$$

Обозначим матрицу

$$G_1(t) = G\,[A_{1,0}(s)X_r(s);\ \ell_{1,0}X_r(\cdot)]\,(t).$$

Частное решение задачи (5) представимо в виде

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G\,[Z(z_0(s, c_r^*), s, 0); J(z_0(\cdot, c_r^*), 0)]\,(t) + x^{(2)}(t, \varepsilon),$$

где

$$x^{(2)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G_1(t) P_{B_0} c_r^{(0)} + x^{(3)}(t, \varepsilon),$$

$$x^{(3)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big\{A_{1,0}(s)[X_r(s)c_r^{(0)} + x^{(1)}(s,\varepsilon)] + \varepsilon A_{0,1}(s) + R_1(z_0(s,c_r^*)+$$
$$+ x(s,\varepsilon), s, \varepsilon); \ell_{1,0}[X_r(\cdot)c_r^{(0)} + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \varepsilon\ell_{0,1}(z_0(\cdot,c_r^*),0)+$$
$$+ J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}(t).$$

Обозначим $(d\times r)$-мерную матрицу

$$B_1 = P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\{\ell_{1,0}G_1(\cdot) + \ell_{1,1}X_r(\cdot) + \ell_{2,0}\{G[Z(z_0(s,c_r^*),s,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](\cdot)\}X_r(\cdot) -$$
$$- \ell K\{A_{1,0}(s)G_1(s) + A_{1,1}(s)X_r(s)+$$
$$+ A_{2,0}\{s, G[Z(z_0(\tau,c_r^*),s,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](s)\}X_r(s)\ (\cdot)\}\, P_{B_0}.$$

Предположим, что для любого вектора $\xi\in\mathbb{R}^r$ имеет место равенство

$$P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\{\ell_{2,0}(X_r(\cdot)P_{B_0}\xi)X_r(\cdot) - \ell K[A_{2,0}(s, X_r(s)P_{B_0}\xi)X_r(s)](\cdot)\}\, P_{B_0} = 0. \qquad (7)$$

Для нахождения вектора $c_r^{(1)}\in N(B_0)$ приходим к уравнению

$$\varepsilon B_1 c_r^{(1)} = -P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_{1,0}[\varepsilon G[Z(z_0(s,c_r^*),s,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](\cdot) + x^{(3)}(\cdot,\varepsilon)]+$$
$$+ \varepsilon\ell_{0,1}(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon\ell_{2,0}G[Z(z_0(s,c_r^*),s,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](\cdot)X_r(\cdot)c_r^{(0)}+$$
$$+ \frac{1}{2}\,\ell_{2,0}[x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)]x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_{1,1}[X_r(\cdot)c_r^{(0)} + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \frac{\varepsilon^2}{2}\,\ell_{0,2}[z_0(\cdot,c_r^*)]+$$
$$+ J_2(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K\Bigg\{A_{1,0}(s)[\varepsilon G[Z(z_0(\tau,c_r^*),s,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](s) + x^{(3)}(\cdot,\varepsilon)]+$$
$$+ \varepsilon A_{0,1}(s) + A_{2,0}(s)G[Z(z_0(\tau,c_r^*),s,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](s)X_r(s)c_r^{(0)}+$$
$$+ A_{2,0}[x^{(1)}(s,\varepsilon)]x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_{1,1}(s)[X_r(s)c_r^{(0)} + x^{(1)}(s,\varepsilon)]+$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{2}\,A_{0,2}(z_0(t,c_r^*)) + R_2(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\Bigg\}(\cdot)\Bigg\}. \qquad (8)$$

Уравнение (8) разрешимо при условии $P_{B_1^*}P_{B_0^*} = 0$, где $P_{B_1^*}:\mathbb{R}^d\to N(B_1^*)$ — матрица-ортопроектор. Таким образом, в случае

$$P_{B_0^*}\neq 0,\quad P_{B_1^*}P_{B_0^*} = 0 \qquad (9)$$

краевая задача (5) имеет по меньшей мере одно решение, определяемое операторной системой

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)(c_r^{(0)} + c_r^{(1)}) + x^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{10}$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(z_0(s,c_r^*),s,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](t) + x^{(2)}(t,\varepsilon),$$

$$x^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G_1(t)c_r^{(1)} + x^{(3)}(t,\varepsilon), \quad G_1(t) = G[A_1(s)X_r(s); \ell_1 X_r(\cdot)](t),$$

$$x^{(3)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big\{A_{1,0}(s)[X_r(s)c_r^{(0)} + x^{(1)}(s,\varepsilon)] + \varepsilon A_{0,1}(s) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon);$$
$$\ell_{1,0}[X_r(\cdot)c_r^{(0)} + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \varepsilon\ell_{0,1}(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_2(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}(t),$$

$$c_r^{(0)} = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Big\{\ell_{1,0}x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_{0,1}(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_1(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$
$$- \ell K[A_{1,0}(s)x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_{0,1}(s) + R_1(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)](\cdot)\Big\},$$

$$\varepsilon c_r^{(1)}(\varepsilon) = -B_1^+ P_{Q_d^*}\Bigg\{\ell_{1,0}[\varepsilon G[Z(z_0(s,c_r^*),s,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](\cdot) + x^{(3)}(\cdot,\varepsilon)] +$$
$$+ \varepsilon\ell_{0,1}(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon\ell_{2,0}G[Z(z_0(s,c_r^*),s,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](\cdot)X_r(\cdot)c_r^{(0)} +$$
$$+ \frac{1}{2}\,\ell_{2,0}[x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)]x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_{1,1}[X_r(\cdot)c_r^{(0)} + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + \frac{\varepsilon^2}{2}\,\ell_{0,2}[z_0(\cdot,c_r^*)] +$$
$$+ J_2(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K\Bigg\{A_{1,0}(s)[\varepsilon G[Z(z_0(\tau,c_r^*),s,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](s) + x^{(3)}(\cdot,\varepsilon)] +$$
$$+ \varepsilon A_{0,1}(s) + A_{2,0}(s)G[Z(z_0(\tau,c_r^*),s,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)](s)X_r(s)c_r^{(0)} +$$
$$+ A_{2,0}[x^{(1)}(s,\varepsilon)]x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_{1,1}(s)[X_r(s)c_r^{(0)} + x^{(1)}(s,\varepsilon)] + \frac{\varepsilon^2}{2}\,A_{0,2}(z_0(t,c_r^*)) +$$
$$+ R_2(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Bigg\}(\cdot)\Bigg\}.$$

Для построения приближенного решения операторной системы (10) в случае (9) и $F_1(c_r^*) = 0$ применим метод простых итераций [1, 5].

Теорема. *Пусть для краевой задачи (1) имеет место критический случай* $P_{Q^*} \neq 0$ *и выполнено условие (3) разрешимости порождающей задачи (2). Тогда для каждого корня* $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ *уравнения (4) при условиях (7), (9) задача (5) имеет по меньшей мере одно решение, определяемое операторной системой (10), при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в* *нулевое* $x(t,0) \equiv 0$. *При этом задача (1) имеет по меньшей мере одно решение* $z(t,\varepsilon)$: $z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b]$, $z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, *при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее решение* $z_0(t,c_r^*)$.

В частном случае, когда $P_{B_0}P_{B_1} = 0$, решение задачи (1) единственно. Здесь

$$P_{B_0} : \mathbb{R}^r \to N(B_0), \quad P_{B_1} : \mathbb{R}^r \to N(B_1)$$

— $(r\times r)$-матрицы-ортопроекторы. Наличие производных

$$A_2(s) \neq 0, \quad A_3(s) \neq 0, \quad \ell_2(z_0(\cdot,c_r^*),0) \neq 0, \quad \ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) \neq 0$$

отличает доказанную теорему от соответствующих теорем [2, с. 193; 3, с. 42]. Условие (7) ослабляет аналогичные требования (3.34) из [3] и (6.58) из [2]. Кроме того, в отличие от статьи [9] нами рассмотрен наиболее общий случай нелинейностей краевой задачи (1), для которых

$$A_{2,0}(t,x(t,\varepsilon))\,x(t,\varepsilon) \neq 0, \quad \ell_{2,0}(x(\cdot,\varepsilon))x(\cdot,\varepsilon) \neq 0.$$

Длина отрезка $[0,\varepsilon_*]$, на котором применим метод простых итераций, может быть оценена как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [2, 5, 6], так и непосредственно из условия сжимаемости оператора, определяемого системой (9), аналогично [8].

Пример. Условия доказанной теоремы выполняются для 2π-периодической задачи для уравнения типа Дюффинга

$$y'' + y = \varepsilon\left(\frac{y^3}{3} - y\right) + \varepsilon^2 \sin t. \tag{11}$$

Согласно принятым обозначениям, приходим к задаче о нахождении 2π-периодического решения

$$z(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(z^{(a)}(t,\varepsilon),\ z^{(b)}(t,\varepsilon)\right), \quad z^{(a)}(t,\varepsilon), z^{(b)}(t,\varepsilon) \in C^1[0,2\pi], \quad C[0,\varepsilon_0],$$

дифференциального уравнения (1), в котором

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Z(z,t,\varepsilon) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ (z^{(a)})^3 - 3z^{(a)} + 3\varepsilon\sin t \end{bmatrix}.$$

Нормальная ($X(0) = I_2$) фундаментальная матрица

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

определяет матрицу Q и ее ортопроекторы

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{Q^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение для порождающих амплитуд 2π-периодической задачи для для уравнения типа Дюффинга

$$F(c_0) = \frac{\pi}{4} \begin{bmatrix} -c_r^{(b)} \left[\left(c_r^{(a)}\right)^2 + \left(c_r^{(b)}\right)^2 - 4 \right] \\ \\ c_r^{(a)} \left[\left(c_r^{(a)}\right)^2 + \left(c_r^{(b)}\right)^2 - 4 \right] \end{bmatrix} = 0$$

имеет бесконечное множество решений. Положим

$$(c_r^{(a)})^* = 0, \quad (c_r^{(b)})^* = 2,$$

при этом

$$A_{1,0}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \left(z_0^{(a)}(t, c_r^*)\right)^2 - 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{0,1}(z_0(t, c_r^*)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеет место неравенство $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = P_{B_0^*} \neq 0$, в котором

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{2\pi} & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{B_0^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее вычисляем матрицу

$$G_1(t) = \begin{pmatrix} -\cos t + \cos 3t & 0 \\ \sin t - 3\sin 3t & 0 \end{pmatrix}$$

и находим производные

$$A_{2,0}(t, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2z_0^{(a)}(t, c_0^*)\xi^{(a)} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{1,1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{0,2}(z_0(t, c_0^*)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку для любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^r$ выполнено условие (7)

$$P_{B_0^*} P_{Q_d^*} \left\{ \ell_{2,0}(X_r(\cdot) P_{B_0} \xi) X_r(\cdot) - \ell K [A_{2,0}(s, X_r(s) P_{B_0} \xi) X_r(s)](\cdot) \right\} P_{B_0} = 0$$

и имеют место равенства $P_{B_1^*} P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0$ и $P_{B_0} P_{B_1} = 0$, согласно доказанной теореме уравнение типа Дюффинга (11) в достаточно малой окрестности порождающего решения $z_0(t, c_r^*)$ имеет единственное 2π-периодическое решение. Здесь матрица

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{\pi}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

и ее ортопроекторы

$$P_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{B_1^*} = \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right).$$

Таким образом, нами получено приближение к решению 2π-периодической задачи для уравнения типа Дюффинга (11)

$$z^{(a)}(t,\varepsilon) \approx 2\sin t + \frac{-11\varepsilon}{24}\,\sin t + \frac{\varepsilon}{12}\,\sin 3t + \frac{\varepsilon^2}{2\,304}\,(-493\sin t - 156\sin 3t + 8\sin 5t) +$$

$$+\,\frac{\varepsilon^3}{110\,592}\,(-12\,971\sin t + 534\sin 3t - 520\sin 5t + 16\sin 7t)\,,$$

при этом

$$z^{(b)}(t,\varepsilon) = [z^{(a)}(t,\varepsilon)]'.$$

Точность найденного приближения к решению периодической задачи для уравнения типа Дюффинга (11) характеризует невязка

$$\Delta(\varepsilon) := \left\| \frac{dz(t,\varepsilon)}{dt} - A(t)z(t,\varepsilon) - \varepsilon Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon) \right\|_{C[0;2\pi]}.$$

В частности,

$$\Delta(0,1) \approx 9,68\,229 \times 10^{-6}, \quad \Delta(0,01) \approx 1,21\,730 \times 10^{-9}.$$

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — xiv + 317 p.
2. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.
3. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1990. — 96 с.
4. *Boichuk A., Langerova M., Skorikova J.* Solutions of linear impulsive differential systems bounded on the entire rial axis // Adv. Difference Equat. — 2010. — **2010**. — Article ID 494379. — 10 p.
5. *Лыкова О. Б., Бойчук А. А.* Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях // Укр. мат. журн. — 1988. — **40**, № 1. — С. 62 – 69.
6. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
7. *Чуйко С. М.* Слабонелинейная краевая задача в особом критическом случае // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 4. — С. 548 – 562.
8. *Чуйко А. С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 2. — С. 278 – 288.
9. *Чуйко С. М.* Нелинейные нетеровы краевые задачи в критическом случае // Нелінійні коливання. — 2010. — **13**, № 1. — С. 115 – 132.
10. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 496 с.

Получено 02.01.13