УДК 517.95

МАТРИЧНІ СУПЕРПОТЕНЦІАЛИ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Ю. А. Караджов

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: yuri.karadzhov@gmail.com

We classify matrix superpotentials that correspond to exactly solvable Schrödinger equations. We consider potentials of a special form, $W_k = kQ + \frac{1}{k}R$, where k is a parameter, P and R are Hermitian matrices depending on the variable x. A list of two-dimensional matrix potentials is explicitly given.

Приведена классификация матричных суперпотенциалов, соответствующих точно решаемым уравнениям Шредингера. Рассмотрены суперпотенциалы специального вида $W_k = kQ + \frac{1}{k}R$, где k — параметр, P и R — эрмитовы матрицы, зависящие от переменной x. Список двумерных матричных потенциалов представлен в явном виде.

На відміну від класичної механіки у квантовій механіці стан системи визначається за допомогою хвильової функції, що має ймовірнісний характер. В нерелятивістських гамільтонових системах хвильова функція задовольняє рівняння Шрьодінгера для безспінових частинок або систему рівнянь Шрьодінгера для частинок з нетривіальним спіном.

Суперсиметрія надає ефективний інструмент для розв'язку таких задач. На жаль, клас відомих проблем, що можуть бути розв'язані завдяки їх суперсиметричній природі, є досить обмеженим, тому що вони повинні задовольняти додаткову умову форм-інваріантності [2], яка зустрічається не часто. В огляді [3] наведено список відомих скалярних формінваріантних суперпотенціалів. Матричні ж суперпотенціали зустрічались переважно у вигляді окремих, хоча і досить важливих, прикладів. Відомий приклад такої задачі — задача Пронька – Строганова [4], суперсиметричній природі якої присвячено статті [5, 6]. Інші приклади суперсиметричних матричних задач можна знайти в роботах [7 – 11].

Систематичне вивчення матричних суперпотенціалів було розпочато в роботах [11–14]. В цих роботах розглянуто суперпотенціали вигляду $W_k = kQ + P + \frac{1}{k}R$, де k — параметр, P, Q та R — ермітові матриці, при виконанні однієї з умов: або Q пропорційна одиничній матриці, або R дорівнює нулю. В статті [15] описано більш широкий клас матричних суперпотенціалів, але повну класифікацію не було проведено.

У даній статті будемо розглядати особливий випадок $W_k = kQ + \frac{1}{k}R$, що доповнює клас суперпотенціалів, розглянутий у попередніх статтях. Список двовимірних матричних потенціалів наведено в явному вигляді.

Форм-інваріантні спектральні задачі. Розглянемо спектральну задачу, що описує хвильову функцію

$$H_k\psi = E_k\psi, \tag{1}$$

© Ю. А. Караджов, 2013

де H_k — гамільтоніан із матричним потенціалом, E_k та ψ — відповідно його власні значення та власні функції. Розв'язки ψ_i будемо шукати у класі квадратично-інтегровних функцій на $(-\infty, \infty)$ або $(0, \infty)$, що досить гладко прямують до нуля на кінцях розглядуваного проміжку.

Припустимо, що розглядуваний гамільтоніан можна зобразити у вигляді

$$H_k = a_k^\dagger a_k + c_k, \tag{2}$$

де c_k — скалярна функція від k.

Можна обмежитись (див. доведення в [13]) операторами a_k і $a_k^\dagger$ вигляду

$$a_k = \frac{\partial}{\partial x} + W_k(x), \quad a_k^\dagger = -\frac{\partial}{\partial x} + W_k(x), \tag{3}$$

де W_k — ермітова матриця, яку називають суперпотенціалом.

Якщо, крім того, гамільтоніан задовольняє умову

$$H_k^+ = H_{k+1}, \tag{4}$$

де H_k^+ — суперпартнер гамільтоніана, який визначається формулою

$$H_k^+ = a_k a_k^\dagger + c_k, \tag{5}$$

то відповідна спектральна задача називається форм-інваріантною і може бути розв'язана за допомогою лише алгебраїчних методів. Метод розв'язання форм-інваріантних спектральних задач для рівняння Шрьодінгера можна знайти, наприклад, у [3].

Задача класифікації. Сформулюємо задачу: знайти всі матричні суперпотенціали, що відповідають форм-інваріантним матричним задачам і мають вигляд

$$W_k = kQ + \frac{1}{k} R, \tag{6}$$

де матриці Q та R не є особливими (тобто не дорівнюють нулю та не пропорційні до одиничної матриці).

Підставляючи вираз для суперпотенціалу в рівняння (2), (4) та розщеплюючи отримане рівняння за змінною x та параметром k, отримуємо систему визначальних рівнянь для невідомих матриць Q та R:

$$Q' = Q^2 + \nu, \tag{7}$$

$$R' = 0, \tag{8}$$

$$R^2 = \omega^2, \tag{9}$$

$$c_{k+1} - c_k = (2k+1)\nu + \frac{(2k+1)\omega^2}{k^2(k+1)^2}. \tag{10}$$

Бачимо, що система складається з незчеплених між собою рівняння (7) для матриці Q, рівнянь (8) та (9) для матриці R та рівняння (10) для визначення різниці $c_{k+1} - c_k$.

Розв'язки рівняння (7) отримано в статті [13], де матрицю Q було зведено до діагонального вигляду

$$Q = \operatorname{diag}\{q_1, \ldots, q_n\} \tag{11}$$

за допомогою унітарного перетворення, що не залежить від змінної x, тобто перетворення еквівалентності.

Рівняння (8) та (9) для невідомої матриці R розглянуто у статті [12]. Із цих рівнянь випливає, що матриця R повинна бути сталою матрицею, квадрат якої пропорційний до одиничної матриці. В цій же роботі було доведено, що за допомогою перетворень еквівалентності можна звести матрицю R до вигляду

$$\tilde{R} = \omega \begin{pmatrix} I_{m\times m} & 0_{m\times s} \\ 0_{s\times m} & -I_{s\times s} \end{pmatrix}, \quad m + s = n, \tag{12}$$

де I та 0 — відповідно одинична та нульова матриці, розмірність яких вказано за допомогою індексів.

Отже, спрощуючи матриці Q та R, незалежно за допомогою перетворень еквівалентності можна звести їх до вигляду (11) та (12) відповідно. Але спрощуючи матрицю Q, ми будемо змінювати матрицю R і навпаки, тому одночасні перетворення не є можливими.

Нехай спочатку за допомогою деякого перетворення еквівалентності ми звели матрицю R до вигляду (12), при цьому матриця Q має досить загальний вигляд. Далі, нехай унітарна матриця U відповідає перетворенню еквівалентності, яке діагоналізує матрицю Q. Тоді найбільш просто суперпотенціал вигляду (6) можна задати матрицею Q вигляду (11) та матрицею

$$R = U\tilde{R}U^{\dagger}, \tag{13}$$

де матриця $\tilde{R}$ визначається з (12).

Зазначимо, що оскільки ми домножуємо матрицю R на матрицю U з обох боків, то замість унітарної матриці U можна використовувати спеціальну унітарну матрицю $\tilde{U} = U/\det U$. Крім того, оскільки нас цікавлять лише незвідні суперпотенціали, ми повинні розглядати лише матриці U, які не мають блочно-діагонального вигляду, інакше розглядуваний суперпотенціал є цілком звідним.

Таким чином, ми звели задачу класифікації матричних форм-інваріантних суперпотенціалів (6) до розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, а саме, рівнянь Ріккаті для функцій q_i, та перебору всіх спеціальних унітарних матриць U, які не мають блочно-діагонального вигляду.

Суперпотенціали та форм-інваріантні потенціали. Перейдемо до безпосереднього опису суперпотенціалів вигляду (6). Матриця Q задається своїми діагональними елементами

q_i, що можуть бути знайдені з рівняння (7) і мають вигляд

$$q_i = \begin{cases} -\dfrac{1}{x+\gamma_i}, & i = 1, \ldots, m, \\ & \qquad\qquad \nu = 0, \\ 0, & i = m+1, \ldots, n, \end{cases}$$

$$q_i = \lambda \tan(\lambda x + \gamma_i), \quad i = 1, \ldots, n, \quad \nu = \lambda^2 > 0, \tag{14}$$

$$q_i = \begin{cases} -\lambda \tanh(\lambda x + \gamma_i), & i = 1, \ldots, m, \\ -\lambda \coth(\lambda x + \gamma_i), & i = m+1, \ldots, l, \qquad \nu = -\lambda^2 < 0, \\ \pm\lambda, & i = l+1, \ldots, n, \end{cases}$$

де $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, — сталі інтегрування.

У випадках $\nu < 0$ та $\nu = 0$ матриця Q складається з блоків розміру m, $l-m+1$, $n-l+1$ та m, $n-m+1$ відповідно. Деякі з цих блоків можуть бути або не бути наявними, тобто мати нульовий розмір. У випадку, коли Q — стала матриця, потенціал також є сталою матрицею, тому цей випадок не розглядаємо.

Як вже зазначалося, матриця R визначається з формули (13) за допомогою спеціальної унітарної матриці, яка не має блочно-діагонального вигляду.

Таким чином, ми отримали загальний вигляд матриці Q — формулу (14) — та матриці R — формули (12) та (13). Відповідні потенціали можна отримати за формулою

$$V_k = -W_k' + W_k^2 + c_k. \tag{15}$$

Використавши отримані результати, наведемо список двовимірних потенціалів, що відповідають суперпотенціалам вигляду (6). Зауважимо, що для довільної розмірності n множина всіх потенціалів вигляду (6) рівнопотужна множині всіх спеціальних унітарних матриць розмірності n, які не мають блочно-діагонального вигляду. А тому для довільного не фіксованого n усі потенціали не можуть бути записані в явному вигляді, хоча для будь-якого фіксованого значення n ця процедура є досить простою.

Домовимося, що у випадку, коли ми маємо дві сталі інтегрування γ_1 та γ_2, зсунемо незалежну змінну x так, щоб $\gamma_1 = \gamma$ та $\gamma_2 = -\gamma$, а у випадку, коли стала інтегрування одна, — так, щоб $\gamma_1 = 0$. Крім того, за допомогою додаткових перетворень еквівалентності можна зробити дійсними елементи матриці R так, що вона буде мати вигляд

$$R = \begin{pmatrix} \rho & \varepsilon \\ \varepsilon & -\rho \end{pmatrix} = \varepsilon\sigma^1 + \rho\sigma^3,$$

де $\rho^2 + \varepsilon^2 = \omega^2$ та $\varepsilon \neq 0$, а σ^1 та σ^3 — матриці Паулі.

Для зручності будемо використовувати матриці σ^+ та σ^-, задані формулами

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma^0 + \sigma^3), \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma^0 - \sigma^3).$$

В результаті отримаємо вісім нових двовимірних потенціалів:

$$V_k = \left(\frac{\rho^2}{k^2} - \frac{2\rho k}{x+\gamma} + \frac{k(k+1)}{(x+\gamma)^2}\right)\sigma^+ + \left(\frac{\rho^2}{k^2} + \frac{2\rho k}{x-\gamma} + \frac{k(k-1)}{(x-\gamma)^2}\right)\sigma^- - \frac{2\varepsilon x}{x^2-\gamma^2}\,\sigma^1,$$

$$V_k = \left(\frac{\rho^2}{k^2} - \frac{2\rho k}{x} + \frac{k(k+1)}{x^2}\right)\sigma^+ + \frac{\rho^2}{k^2}\,\sigma^- - \frac{\varepsilon}{x}\,\sigma^1,$$

$$\begin{aligned} V_k = {} & \left(\left(k\lambda\tan(\lambda x+\gamma) + \frac{\rho}{k}\right)^2 - \frac{k\lambda^2}{\cos^2(\lambda x+\gamma)}\right)\sigma^+ + \\ & + \left(\left(k\lambda\tan(\lambda x-\gamma) - \frac{\rho}{k}\right)^2 - \frac{k\lambda^2}{\cos^2(\lambda x-\gamma)}\right)\sigma^- + \\ & + \lambda\varepsilon\left(\tan(\lambda x+\gamma) + \tan(\lambda x-\gamma)\right)\sigma^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_k = {} & \left(\left(\frac{\rho}{k} - k\lambda\tanh(\lambda x+\gamma)\right)^2 + \frac{k\lambda^2}{\cosh^2(\lambda x+\gamma)}\right)\sigma^+ + \\ & + \left(\left(\frac{\rho}{k} + k\lambda\tanh(\lambda x-\gamma)\right)^2 + \frac{k\lambda^2}{\cosh^2(\lambda x-\gamma)}\right)\sigma^- - \\ & - \lambda\varepsilon\left(\tanh(\lambda x+\gamma) + \tanh(\lambda x-\gamma)\right)\sigma^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_k = {} & \left(\left(\frac{\rho}{k} - k\lambda\coth(\lambda x+\gamma)\right)^2 - \frac{k\lambda^2}{\sinh^2(\lambda x+\gamma)}\right)\sigma^+ + \\ & + \left(\left(\frac{\rho}{k} + k\lambda\coth(\lambda x-\gamma)\right)^2 - \frac{k\lambda^2}{\sinh^2(\lambda x-\gamma)}\right)\sigma^- - \\ & - \lambda\varepsilon\left(\coth(\lambda x+\gamma) + \coth(\lambda x-\gamma)\right)\sigma^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_k = {} & \left(\left(\frac{\rho}{k} - k\lambda\tanh(\lambda x+\gamma)\right)^2 + \frac{k\lambda^2}{\cosh^2(\lambda x+\gamma)}\right)\sigma^+ + \\ & + \left(\left(\frac{\rho}{k} + k\lambda\coth(\lambda x-\gamma)\right)^2 - \frac{k\lambda^2}{\sinh^2(\lambda x-\gamma)}\right)\sigma^- - \\ & - \lambda\varepsilon\left(\tanh(\lambda x+\gamma) + \coth(\lambda x-\gamma)\right)\sigma^1, \end{aligned}$$

$$V_k = \left(\left(\frac{\rho}{k} - k\lambda\tanh\lambda x\right)^2 + \frac{k\lambda^2}{\cosh^2\lambda x}\right)\sigma^+ - \left(\frac{\rho}{k} \pm k\lambda\right)\sigma^- - \lambda\varepsilon\left(\tanh\lambda x \pm 1\right)\sigma^1,$$

$$V_k = \left(\left(\frac{\rho}{k} - k\lambda\coth\lambda x\right)^2 - \frac{k\lambda^2}{\sinh^2\lambda x}\right)\sigma^+ - \left(\frac{\rho}{k} \pm k\lambda\right)\sigma^- - \lambda\varepsilon\left(\coth\lambda x \pm 1\right)\sigma^1.$$

Кожен із наведених потенціалів відповідає рівнянню Шрьодінгера – Паулі, яке є інтегровним. Наскільки відомо автору, ці потенціали знайдено вперше у даній роботі.

Висновки. У статті досліджуються системи рівнянь Шрьодінгера з матричними потенціалами. Рівняння такого типу природно виникають у задачах про взаємодію квантово-механічних частинок, що мають нетривіальний дипольний момент, із зовнішнім електромагнітним полем. Оскільки це є системи зчеплених рівнянь другого порядку, знаходження їхніх розв'язків є досить складною задачею.

Проведено класифікацію таких систем, що можуть бути зінтегровані в явному вигляді з використанням матричних перетворень Дарбу. Ця класифікація обмежена спеціальним класом суперпотенціалів вигляду (6), тоді як потенціали для рівняння Шрьодінгера задаються формулою (15). Сформульовано алгоритм побудови матричних суперпотенціалів довільної розмірності, а саме, задачу класифікації таких суперпотенціалів зведено до перебору незвідних спеціальних унітарних матриць розмірності $n \times n$. Список двовимірних суперпотенціалів наведено в явному вигляді.

Хоча клас знайдених суперпотенціалів є досить широким, він не охоплює всі форм-інваріантні системи рівнянь Шрьодінгера. У наступних роботах буде розглянуто більш загальний клас суперпотенціалів.

Автор висловлює подяку професору А. Г. Нікітіну за корисні дискусії.

1. *Witten E.* Dynamical breaking of supersymmetry // Nucl. Phys. B. — 1981. — **188**, № 3. — P. 513 – 514.
2. *Gendenshtein L.* Derivation of exact spectra of the Schrodinger equation by means of supersymmetry // JETP Lett. — 1983. — **38**, № 6. — P. 356 – 359.
3. *Cooper F., Khare A., Sukhatme U.* Supersymmetry and quantum mechanics // Phys. Rep. — 1995. — **251**, № 5 – 6. — P. 267 – 385.
4. *Pron'ko G. P., Stroganov Yu. G.* A new example of a quantum mechanical problem with a hidden symmetry // Sov. Phys. JETP. — 1977. — **45**, № 5. — P. 1075 – 1078.
5. *Voronin A. I.* Neutron in the magnetic field of a linear conductor with current as an example of the two-dimensional supersymmetric problem // Phys. Rev. A. — 1991. — **43**, № 1. — P. 29 – 34.
6. *Hau L. V., Golovchenko G. A., Burns M. M.* Supersymmetry and the binding of a magnetic atom to a filamentary current // Phys. Rev. Lett. — 1995. — **74**, № 16. — P. 3138 – 3140.
7. *Ferraro E., Messina N., Nikitin A. G.* Exactly solvable relativistic model with the anomalous interaction // Phys. Rev. A. — 2010. — **81**, № 4. — 8 p.
8. *Tkachuk V. M., Roy P.* Motion of a spin-$1/2$ particle in shape invariant scalar and magnetic fields // J. Phys. A. — 2000. — **33**, № 22. — P. 4159 – 4167.
9. *Andrianov A. A., Ioffe M. V., Spiridonov V. P., Vinet L.* Parasupersymmetry and truncated supersymmetry in quantum mechanics // Phys. Lett. B. — 1991. — **272**, № 3 – 4. — P. 297 – 304.
10. *Andrianov A. A., Cannata F., Ioffe M. V., Nishnianidze D. N.* Matrix Hamiltonians: SUSY approach to hidden symmetries // J. Phys. A. — 1997. — **30**, № 14. — P. 5037 – 5050.
11. *de Lima Rodrigues R., Bezerra V. B., Vaidya A. N.* An application of super symmetric quantum mechanics to a planar physical system // Phys. Lett. A. — 2001. — **287**, № 1 – 2. — P. 45 – 49.
12. *Nikitin A. G., Karadzhov Yu.* Matrix superpotentials // J. Phys. A: Math. Theor. — 2011. — **44**, № 30. — 21 p.
13. *Karadzhov Yu.* Matrix superpotential linear in variable parameter // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. — 2012. — **17**, № 4. — P. 1522 – 1528.
14. *Nikitin A. G., Karadzhov Yu.* Enhanced classification of matrix superpotentials // J. Phys. A: Math. Theor. — 2011. — **44**, № 44. — 24 p.
15. *Караджов Ю.* Тривимірні матричні суперпотенціали // Укр. мат. журн. — 2012. — **64**, № 12. — С. 1641 – 1653.

Одержано 04.03.13