УДК 517.9

НЕЛИНЕЙНАЯ НЕТЕРОВА КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В СЛУЧАЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА*

С. М. Чуйко

Донбас. гос. пед. ун-т
Украина, 84116, Славянск Донецкой обл., ул. Генерала Батюка, 19

We find necessary and sufficient conditions for existence of solutions of a nonlinear Noether boundary-value problem for a parametric excitation differential system. We construct a convergent iteration algorithm for finding approximate solutions of a nonlinear Noether boundary-value problem for a parametric excitation system of ordinary differential equations. As an example, we apply the constructed iteration algorithm to find approximations to solutions of a periodic boundary-value problem for a parametric excitation Duffing type equation. Precision of the found approximate solutions of the periodic boundary-value problem for a Duffing type equation is controlled using deflections in the initial equation.

Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків нелінійної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу. Побудовано збіжну ітераційну схему для знаходження наближень до розв'язків нелінійної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу. Як приклад застосування побудованої ітераційної схеми знайдено наближення до розв'язків періодичної крайової задачі для рівняння типу Дюффінга з параметричним збуренням. Задля контролю точності знайдених наближень до розв'язків періодичної крайової задачі для рівняння типу Дюффінга використано відхили у вихідному рівнянні.

Традиционно изучение периодических и нетеровых краевых задач в критических случаях было связано с предположением, что дифференциальное уравнение, а также краевое условие известны и фиксированы [1, 2]. Как правило, изучение периодических задач в случае параметрического резонанса ограничивалось исследованием вопросов устойчивости [3 – 5]. В то же время, при изучении периодических краевых задач в случае параметрического резонанса в связи с многочисленными приложениями в электронике [3], геодезии [6], теории плазмы [7], нелинейной оптике, механике [8] и станкостроении [9] наряду с нахождением решений требуется вычисление собственной функции соответствующего дифференциального уравнения. К изучению нетеровых краевых задач в случае параметрического резонанса приводит исследование автономных нетеровых краевых задач, так как используемая в критическом случае замена независимой переменной [10 – 12] определяет неавтономную краевую задачу с дополнительной неизвестной.

Целью данной статьи является построение решений нетеровых краевых задач в случае параметрического резонанса, разрешимость которых обеспечена соответствующим выбором собственной функции краевой задачи. Используемая классификация нетеровых краевых задач в случае параметрического резонанса в зависимости от простоты или кратности корней уравнения для порождающих констант существенно отличается от аналогичной классификации периодических задач в случае параметрического резонанса [4,

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований (номер государственной регистрации 0109U000381).

5] и соответствует общей классификации периодических и нетеровых краевых задач [1, 2]. Полученное для нетеровых краевых задач в случае параметрического резонанса уравнение для порождающих констант существенно отличается от традиционного уравнения для порождающих констант при отсутствии параметрического резонанса [1, 2] зависимостью от малого параметра как самого уравнения, так и его корней, и приводит к существенному уточнению приближенных решений по сравнению с приближениями, найденными с помощью метода Пуанкаре.

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о построении решения

$$z(t,\varepsilon) : z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b], \quad z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$$

нетеровой [1] $(m \neq n)$ краевой задачи

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z,\mu,t,\varepsilon), \quad \ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha(\varepsilon) + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\mu(\varepsilon),\varepsilon) \qquad (1)$$

в малой окрестности решения порождающей задачи

$$\frac{dz_0}{dt} = A(t)z_0 + f(t,\varepsilon), \quad \ell z_0(\cdot,\varepsilon) = \alpha(\varepsilon), \quad \alpha(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0], \quad \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}^m. \qquad (2)$$

Здесь $A(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица и $f(t,\varepsilon)$ — n-мерный вектор-столбец, элементы которых — непрерывные на отрезке $[a,b]$ действительные функции. Предположим нелинейную вектор-функцию $Z(z,\mu,t,\varepsilon)$ непрерывно дифференцируемой по z и непрерывно дифференцируемой по μ в малой окрестности решения порождающей задачи (2) и начального значения $\mu_0(\varepsilon)$ собственной функции $\mu(\varepsilon)$; $\ell z(\cdot)$ — линейный ограниченный функционал $\ell z(\cdot) : C[a,b] \to \mathbb{R}^m$. Кроме того, считаем нелинейную вектор-функцию $Z(z,\mu(\varepsilon),t,\varepsilon)$ и неоднородность порождающей задачи $f(t,\varepsilon)$ непрерывными по t на отрезке $[a,b]$ и по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Нелинейный векторный функционал

$$J(z(\cdot,\varepsilon),\mu(\varepsilon),\varepsilon) : C[a,b] \to \mathbb{R}^m$$

считаем непрерывно дифференцируемым по z в малой окрестности решения порождающей задачи (2) и непрерывно дифференцируемым по μ в малой окрестности решения порождающей задачи (2) и начального значения $\mu_0(\varepsilon)$ функции $\mu(\varepsilon)$, а также непрерывным по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Поставленная задача обобщает традиционные периодические краевые задачи в случае параметрического резонанса, исследованные в монографиях [3–5], на случай общей нетеровой краевой задачи, а также задачи [1, 2] на случай параметрического резонанса и явной зависимости неоднородностей $f(t,\varepsilon)$ и $\alpha(\varepsilon)$ порождающей системы от малого параметра. Предположим неизвестную $\mu(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1$ непрерывной функцией малого параметра ε. Исследуем критический случай $(P_{Q^*} \neq 0)$; при условии

$$P_{Q_d^*}\left\{\alpha(\varepsilon) - \ell K\left[f(s,\varepsilon)\right](\cdot)\right\} = 0$$

порождающая задача (2) имеет $(r := n - n_1)$-параметрическое семейство решений

$$z_0(t,c_0(\varepsilon)) = X_r(t)c_0(\varepsilon) + G\left[f(s,\varepsilon);\alpha(\varepsilon)\right](t), \quad c_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $X(t)$ — нормальная ($X(a) = I_n$) фундаментальная матрица однородной части системы (2),

$$Q := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \operatorname{rank} Q = n_1, \quad X_r(t) := X(t)P_{Q_r},$$

P_{Q_r} — $(n\times r)$-матрица, составленная из r линейно независимых столбцов $(n\times n)$-матрицы-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to N(Q)$, и P_{Q^*} — $(m \times m)$-матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to \to N(Q^*)$,

$$G\left[f(s,\varepsilon);\alpha(\varepsilon)\right](t) = K\left[f(s,\varepsilon)\right](t) + X(t)Q^+\left\{\alpha(\varepsilon) - \ell K\left[f(s,\varepsilon)\right](\cdot)\right\}$$

— обобщенный оператор Грина краевой задачи (2),

$$K\left[f(s,\varepsilon)\right](t) = X(t)\int_a^t X^{-1}(s)f(s,\varepsilon)\,ds$$

— оператор Грина задачи Коши для системы (2), Q^+ – псевдообратная матрица по Муру – Пенроузу [1].

2. Условия существования решения. Предположим, что задача (1) в малой окрестности решения $z_0(t, c_0(\varepsilon))$ порождающей задачи (2) имеет решение

$$z(t,\varepsilon) = z_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t,\varepsilon), \quad c_0(0) := c_0^* \in \mathbb{R}^r,$$

при этом в достаточно малой окрестности начального значения функции $\mu_0(\varepsilon)$ существует непрерывная собственная функция

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \quad \mu_0(0) := \mu_0^*.$$

Таким образом, приходим к задаче о нахождении решения

$$x(t,\varepsilon) : x(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b], \quad x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$$

и функции $\zeta(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0]$ слабонелинейной нетеровой краевой задачи

$$\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t,c_0(\varepsilon)) + x(t,\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon), \tag{3}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon)) + x(\cdot,\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \varepsilon), \tag{4}$$

разрешимой тогда и только тогда, когда

$$P_{Q^*}\left\{J(z(\cdot,\varepsilon),\mu(\varepsilon),\varepsilon) - \ell K\left[Z(z(s,\varepsilon),\mu(\varepsilon),s,\varepsilon)\right](\cdot)\right\} = 0.$$

Пусть вектор

$$\check{c}_0(\varepsilon) := \begin{bmatrix} c_0(\varepsilon) \\ \mu_0(\varepsilon) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r+1}.$$

В силу непрерывности по z и μ нелинейной функции $Z(z, \mu(\varepsilon), t, \varepsilon)$ и нелинейного векторного функционала $J(z(\cdot, \varepsilon), \mu(\varepsilon), \varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи (2) и начального значения $\mu_0(\varepsilon)$ функции $\mu(\varepsilon)$ приходим к уравнению

$$\mathcal{F}(\check{c}_0(\varepsilon)) := P_{Q^*}\left\{J(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), \varepsilon) - \ell K\left[Z(z_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon)\right](\cdot)\right\} = 0.$$

Необходимые условия существования решения нетеровой краевой задачи (1) в случае параметрического резонанса определяет следующая лемма, являющаяся обобщением соответствующего утверждения [14] на случай произвольных нелинейностей, а также на случай параметрического резонанса и явной зависимости неоднородностей $f(t, \varepsilon)$ и $\alpha(\varepsilon)$ порождающей краевой задачи от малого параметра [1, 2].

Лемма. *Пусть нетерова* $(m \neq n)$ *краевая задача (1) представляет критический* $(P_{Q^*} \neq 0)$ *случай и выполнено условие разрешимости*

$$P_{Q_d^*}\left\{\alpha(\varepsilon) - \ell K\left[f(s, \varepsilon)\right](\cdot)\right\} = 0$$

порождающей задачи (2). Предположим также, что в малой окрестности порождающего решения $z_0(t, c_0(\varepsilon))$ *слабонелинейная краевая задача (1) имеет решение*

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b], \quad z(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0],$$

при этом в достаточно малой окрестности функции $\mu_0(\varepsilon)$ *существует собственная функция* $\mu(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0]$. *Тогда имеет место равенство*

$$\mathcal{F}(\check{c}_0(\varepsilon)) = 0. \tag{5}$$

По аналогии с нетеровыми слабонелинейными краевыми задачами в критическом случае [1], а также периодическими краевыми задачами [2, 4, 5] уравнение (5) будем называть уравнением для порождающих констант задачи (1) в случае параметрического резонанса. Предположим, что уравнение (5) имеет непрерывные действительные корни. Фиксируя одно из решений $\check{c}_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{r+1}$ уравнения (5), приходим к задаче об отыскании решения

$$x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b], \quad x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$$

нетеровой краевой задачи (3), (4) в окрестности порождающего решения

$$z_0(t, c_0(\varepsilon)) = X_r(t) c_0(\varepsilon) + G\left[f(s); \alpha(\varepsilon)\right](t), \quad c_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r,$$

а также функции

$$\mu(\varepsilon) := \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \quad \zeta(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0],$$

в окрестности точки $\mu_0(\varepsilon)$. В малой окрестности порождающего решения $z_0(t, c_0(\varepsilon))$ и функции $\mu_0(\varepsilon)$ имеет место разложение

$$\begin{aligned} Z(z_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon) = \\ = Z(z_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), t, \varepsilon) + \mathcal{A}_1\left(z_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\right) x(t, \varepsilon) + \\ + \mathcal{A}_2\left(z_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\right) \zeta(\varepsilon) + \mathcal{R}(z_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon), \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{A}_1\,(z_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)) = \left.\frac{\partial Z(z,\mu,t,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z=z_0(t,c_0(\varepsilon))\\ \mu=\mu_0(\varepsilon)}},$$

$$\mathcal{A}_2\,(z_0(t,c_0),\mu_0(\varepsilon)) = \left.\frac{\partial Z(z,\mu,t,\varepsilon)}{\partial \mu}\right|_{\substack{z=z_0(t,c_0(\varepsilon))\\ \mu=\mu_0(\varepsilon)}}.$$

Остаток

$$\mathcal{R}(z_0(t,c_0(\varepsilon))+x(t,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),t,\varepsilon)$$

разложения функции

$$Z(z_0(t,c_0(\varepsilon))+x(t,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),t,\varepsilon)$$

имеет более высокий порядок малости по $x(t,\varepsilon)$ и $\zeta(\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $z_0(t,c_0(\varepsilon))$ и функции $\mu_0(\varepsilon)$, чем три первых члена разложения, поэтому

$$\left.\mathcal{R}(z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon)\right|_{\substack{z=z_0(t,c_0(\varepsilon))\\ \mu=\mu_0(\varepsilon)}} \equiv 0,$$

$$\left.\frac{\partial\mathcal{R}(z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z=z_0(t,c_0(\varepsilon))\\ \mu=\mu_0(\varepsilon)}} \equiv 0,$$

$$\left.\frac{\partial\mathcal{R}(z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon)}{\partial \zeta}\right|_{\substack{z=z_0(t,c_0(\varepsilon))\\ \mu=\mu_0(\varepsilon)}} \equiv 0.$$

Аналогично, используя непрерывную дифференцируемость (в смысле Фреше) векторного функционала $J(z(\cdot,\varepsilon),\mu(\varepsilon),\varepsilon)$ по первому аргументу и непрерывность по второму аргументу, выделяем линейные по x и $\zeta(\varepsilon)$ части $\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)$ и $\ell_2(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon))$ этих функционалов и член $J(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),\varepsilon)$ нулевого порядка по ε в окрестности точек $x=0$ и $\zeta(\varepsilon)=0$:

$$J(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon))+x(\cdot,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),\varepsilon) = J_0(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),\varepsilon)+$$
$$+\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)+\ell_2(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon))\zeta(\varepsilon)+J_1(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon))+x(\cdot,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),\varepsilon),$$

где

$$\ell_1 x(\cdot,\varepsilon) = \left.\frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),\mu(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z=z_0(t,c_0(\varepsilon))\\ \mu=\mu_0(\varepsilon)}},$$

$$\ell_2(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon)) = \left.\frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),\mu(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \mu}\right|_{\substack{z=z_0(t,c_0(\varepsilon))\\ \mu=\mu_0(\varepsilon)}}.$$

Остаток

$$J_1(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon))+x(\cdot,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),\varepsilon) : C[a,b]\to\mathbb{R}^m$$

разложения функционала

$$J(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)) + x(\cdot, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \varepsilon) : C[a, b] \to \mathbb{R}^m$$

имеет более высокий порядок малости по $x(t, \varepsilon)$ и $\zeta(\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения $z_0(t, c_0(\varepsilon))$ и функции $\mu_0(\varepsilon)$, чем первые три члена разложения, поэтому

$$J_1(z(\cdot, \varepsilon), \mu(\varepsilon), \varepsilon)\Big|_{\substack{z=z_0(t,c_0(\varepsilon))\\ \mu=\mu_0(\varepsilon)}} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial J_1(z(\cdot, \varepsilon), \mu(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_0(\varepsilon))\\ \mu=\mu_0(\varepsilon)}} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial J_1(z(\cdot, \varepsilon), \mu(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \zeta}\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_0(\varepsilon))\\ \mu=\mu_0(\varepsilon)}} \equiv 0.$$

Решение $x(t, \varepsilon)$ нетеровой краевой задачи (3), (4) представимо в виде

$$x(t, \varepsilon) = X_r(t)\nu(\varepsilon) + x^{(1)}(t, \varepsilon), \quad \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon\, G\,[Z(z_0(s, c_0(\varepsilon)) + x(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \nu(\varepsilon), s, \varepsilon);$$
$$J(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)) + x(\cdot, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \varepsilon)]\,(t).$$

Обозначим $(d \times (r+1))$-мерную матрицу так:

$$D_0\left(\check{c}_0(\varepsilon)\right) = P_{Q_d^*}\left\{\ell_1 X_r(\cdot) - \ell K\left[\mathcal{A}_1\left(z_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\right) X_r(t)\right](\cdot);\right.$$
$$\left.\ell_2\left(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon))\zeta(\varepsilon) - \ell K\left[\mathcal{A}_2\left(z_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\right)\right](\cdot)\right\}.$$

Для нахождения функций $\nu(\varepsilon)$ и $\zeta(\varepsilon)$ приходим к уравнению

$$D_0\left(\check{c}_0(\varepsilon)\right)\begin{bmatrix}\nu(\varepsilon)\\ \zeta(\varepsilon)\end{bmatrix} = -P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + J_1(z_0(\cdot, c_0(\varepsilon)) + x(\cdot, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \varepsilon) -$$
$$- \ell K\Big[\mathcal{A}_1\left(z_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\right) x^{(1)}(t, \varepsilon) + \mathcal{R}(z_0(t, c_0(\varepsilon)) +$$
$$+ x(t, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Таким образом, при условии

$$P_{D_0^*} P_{Q_d^*} = 0, \quad P_{D_0} = 0, \quad D_0^+\left(\check{c}_0(\varepsilon)\right) \in C[0, \varepsilon_0]$$

задача (3), (4) имеет по меньшей мере одно решение и собственную функцию, которые определяет операторная система

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)\nu(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon), \quad \mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon),$$
$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\left[Z(z(s,\varepsilon),\mu(\varepsilon),s,\varepsilon); J(z(\cdot,\varepsilon),\mu(\varepsilon),\varepsilon)\right](t), \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+\left(\check{c}_0(\varepsilon)\right) P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon)) + x(\cdot,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),\varepsilon) -$$
$$-\,\ell K\Big[\mathcal{A}_1(z_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon))x^{(1)}(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(z_0(t,c_0(\varepsilon)) +$$
$$+\,x(t,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),t,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Здесь $P_{D_0^*(\check{c}_0(\varepsilon))}$ — $(d\times d)$-матрица-ортопроектор:

$$P_{D_0^*(\check{c}_0(\varepsilon))} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{N}\left(D_0^*(\check{c}_0(\varepsilon))\right),$$

$D_0^+(\check{c}_0(\varepsilon))$ — псевдообратная по Муру – Пенроузу матрица [1]. Для построения приближенного решения операторной системы (6) в случае $P_{D_0^*}P_{Q_d^*} = 0$, $P_{D_0} = 0$ применим метод простых итераций [1, 2]. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для краевой задачи (1) имеет место критический случай* $P_{Q^*} \neq 0$ *и выполнено условие разрешимости порождающей задачи (2). Тогда для каждого корня* $c_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$, $\mu_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1$ *уравнения для порождающих констант (5) при условиях*

$$P_{D_0^*}P_{Q_d^*} = 0, \quad P_{D_0} = 0, \quad D_0^+\left(\check{c}_0(\varepsilon)\right) \in C[0,\varepsilon_0]$$

в малой окрестности решения $z_0(t,c_0(\varepsilon))$ *порождающей задачи (2) и в достаточно малой окрестности начального значения функции* $\mu_0(\varepsilon)$ *задача (3), (4) имеет единственное решение*

$$x(t,\varepsilon) : x(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b], \quad x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

определяемое операторной системой (6), и существует непрерывная функция $\mu(\varepsilon)$: $\mu(0) := \mu_0^*$. *При этом в малой окрестности решения* $z_0(t,c_0(\varepsilon))$ *порождающей задачи (2) и в достаточно малой окрестности начального значения функции* $\mu_0(\varepsilon)$ *нетерова* $(m \neq n)$ *задача (1) имеет единственное решение*

$$z(t,\varepsilon) : z(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b], \quad z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0].$$

Для построения решения операторной системы (6) для $\varepsilon \in [0,\varepsilon^*]$ *применима итерационная схема*

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)\nu_{k+1}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon), \quad \mu_{k+1}(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta_{k+1}(\varepsilon), \tag{7}$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\left[Z(z_k(s,\varepsilon),\mu_k(\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_k(\cdot,\varepsilon),\mu_k(\varepsilon),\varepsilon)\right](t), \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

$$\begin{bmatrix} \nu_{k+1}(\varepsilon) \\ \zeta_{k+1}(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^{+}\left(\check{c}_0(\varepsilon)\right) P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x_{k+1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1(z_0(\cdot,c_0(\varepsilon)) + x_k(\cdot,\varepsilon),\mu_k(\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\,\ell K\Big[\mathcal{A}_1\left(z_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\right) x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) +$$

$$+\,\mathcal{R}(z_0(t,c_0(\varepsilon)) + x_k(t,\varepsilon),\mu_k(\varepsilon),t,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Длина отрезка $[0,\varepsilon^*]$, на котором применим метод простых итераций, может быть оценена как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [1,2], так и непосредственно из условия сжимаемости оператора, определяемого системой (6), аналогично [13, 15].

3. Уравнение типа Дюффинга с параметрическим возбуждением. Условия доказанной теоремы выполняются в случае 2π-периодической задачи для уравнения типа Дюффинга

$$y'' + y = \sin 3t + \varepsilon(\sin\varepsilon + \mu(\varepsilon))y + \varepsilon y^3. \tag{8}$$

Уравнение (8) приводится к виду (1) при

$$z(t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} z^{(a)}(t,\varepsilon) \\ z^{(b)}(t,\varepsilon) \end{bmatrix}, \quad f(t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin 3t \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Z(z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ (\sin\varepsilon + \mu(\varepsilon))z^{(a)}(t,\varepsilon) + (z^{(a)}(t,\varepsilon))^3 \end{bmatrix}.$$

Порождающая 2π-периодическая задача для уравнения (8) разрешима и при соответствующей фиксации начала отсчета независимой переменной имеет общее решение

$$z_0(t,c_0(\varepsilon)) = X_r(t)c_0(\varepsilon) + G[f(s,\varepsilon)](t), \quad c_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^2.$$

Здесь

$$X(t) = X_r(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}, \quad G[f(s,\varepsilon)](t) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2\sin t - \sin 3t \\ 3\cos t - 9\cos 3t \end{bmatrix}.$$

Уравнение для порождающих констант (5) в случае периодической задачи для уравнения (8) имеет корень

$$\check{c}_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^3, \quad c_0(\varepsilon) = 0 \in \mathbb{R}^2, \quad \mu_0(\varepsilon) = -\frac{1}{64}\,(3 + 64\sin\varepsilon),$$

которому соответствует матрица полного ранга

$$D_0(\check{c}_0(\varepsilon)) = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{9\pi}{128} & \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{9\pi}{128} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, согласно доказанной теореме периодическая задача для уравнения (8) имеет единственное решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее решение $y_0(t, c_0)$, для нахождения которого применима итерационная схема (7). Первое приближение к решению 2π-периодической задачи для уравнения (8)

$$x_1(t,\varepsilon) = X_r(t)\nu_1(\varepsilon) + x_1^{(1)}(t,\varepsilon), \quad \mu_1(\varepsilon) := \mu_0(\varepsilon) + \zeta_1(\varepsilon)$$

определяет функция

$$x_1^{(1)}(t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} x_{1a}^{(1)}(t,\varepsilon) \\ \\ x_{1b}^{(1)}(t,\varepsilon) \end{bmatrix}, \quad x_{1b}^{(1)}(t,\varepsilon) = \Big(x_{1a}^{(1)}(t,\varepsilon)\Big)',$$

где

$$x_{1a}^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{163\,840}\,(-31\sin t + 70\sin 3t - 20\sin 5t - 10\sin 7t - \sin 9t)\,.$$

Первое приближение к функциям $\nu_1(\varepsilon)$ и $\mu_1(\varepsilon)$ согласно итерационной схеме (7) определяет вектор

$$\begin{bmatrix} \nu_1(\varepsilon) \\ \zeta_1(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+(\check{c}_0(\varepsilon)) \int\limits_0^T H_r^*(s)\Big[\mathcal{A}_1(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon))x_1^{(1)}(s,\varepsilon) +$$

$$+ \mathcal{R}(z_0(s,c_0(\varepsilon)) + x_1^{(1)}(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]\,ds,$$

где $\nu_1(\varepsilon) = 0 \in \mathbb{R}^2$; кроме того,

$$\zeta_1(\varepsilon) = \frac{123\,\varepsilon}{2\,621\,440} - \frac{86\,727\,\varepsilon^2}{214\,748\,364\,800} - \frac{1\,585\,509\,\varepsilon^3}{4\,398\,046\,511\,104\,000}.$$

Второе приближение к частному решению 2π-периодической задачи для уравнения (8)

$$x_2^{(1)}(t,\varepsilon) := x_1^{(1)}(t,\varepsilon) + x_2^{(2)}(t,\varepsilon)$$

определяет функция

$$x_2^{(1)}(t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} x_{2a}^{(1)}(t,\varepsilon) \\ \\ x_{3b}^{(1)}(t,\varepsilon) \end{bmatrix}, \quad x_{2b}^{(1)}(t,\varepsilon) = \Big(x_{2a}^{(1)}(t,\varepsilon)\Big)',$$

где

$$x_{2a}^{(2)}(t,\varepsilon) = \frac{265\,847}{46\,976\,204\,800}\,\varepsilon^2\sin t + \frac{786\,652\,087}{31\,748\,398\,252\,032\,000}\,\varepsilon^3\sin t +$$

$$+ \frac{376\,664\,318\,977}{8\,452\,693\,550\,620\,999\,680\,000}\,\varepsilon^4\sin t - \frac{195}{67\,108\,864}\,\varepsilon^2\sin 3t -$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{23\,847}{2\,748\,779\,069\,440}\,\varepsilon^3\sin 3t-\frac{5\,239\,211}{281\,474\,976\,710\,656\,000}\,\varepsilon^4\sin 3t+\\
&+\frac{23}{335\,544\,320}\,\varepsilon^2\sin 5t+\frac{9\,837}{6\,871\,947\,673\,600}\,\varepsilon^3\sin 5t+\\
&+\frac{9\,723}{3\,518\,437\,208\,883\,200}\,\varepsilon^4\sin 5t+\frac{309}{671\,088\,640}\,\varepsilon^2\sin 7t-\\
&-\frac{6\,261}{6\,871\,947\,673\,600}\,\varepsilon^3\sin 7t-\frac{3}{838\,860\,800}\,\varepsilon^2\sin 9t-\\
&-\frac{167\,381}{281\,474\,976\,710\,656\,000}\,\varepsilon^4\sin 7t-\frac{1\,047}{8\,589\,934\,592\,000}\,\varepsilon^3\sin 9t-\\
&-\frac{3}{83\,886\,080}\,\varepsilon^2\sin 11t+\frac{441\,739}{1\,407\,374\,883\,553\,280\,000}\,\varepsilon^4\sin 9t+\\
&+\frac{2\,389}{17\,179\,869\,184\,000}\,\varepsilon^3\sin 11t-\frac{69\,291}{703\,687\,441\,776\,640\,000}\,\varepsilon^4\sin 11t-\\
&-\frac{1}{167\,772\,160}\,\varepsilon^2\sin 13t+\frac{359}{24\,051\,816\,857\,600}\,\varepsilon^3\sin 13t-\\
&-\frac{261}{9\,851\,624\,184\,872\,960}\,\varepsilon^4\sin 13t-\frac{3}{9\,395\,240\,960}\,\varepsilon^2\sin 15t-\\
&-\frac{1\,497}{192\,414\,534\,860\,800}\,\varepsilon^3\sin 15t+\frac{4\,993}{394\,064\,967\,394\,918\,400}\,\varepsilon^4\sin 15t-\\
&-\frac{89}{41\,231\,686\,041\,600}\,\varepsilon^3\sin 17t+\frac{1\,737}{562\,949\,953\,421\,312\,000}\,\varepsilon^4\sin 17t-\\
&-\frac{11}{51\,539\,607\,552\,000}\,\varepsilon^3\sin 19t-\frac{1\,031}{2\,111\,062\,325\,329\,920\,000}\,\varepsilon^4\sin 19t-\\
&-\frac{3}{377\,957\,122\,048\,000}\,\varepsilon^3\sin 21t-\frac{199}{774\,056\,185\,954\,304\,000}\,\varepsilon^4\sin 21t-\\
&-\frac{3}{77\,405\,618\,595\,430\,400}\,\varepsilon^4\sin 23t-\frac{1}{365\,917\,469\,723\,852\,800}\,\varepsilon^4\sin 25t-\\
&-\frac{1}{12\,807\,111\,440\,334\,848\,000}\,\varepsilon^4\sin 27t.
\end{aligned}
$$

Второе приближение к функциям $\nu_2(\varepsilon)$ и $\mu_2(\varepsilon)$ определяет вектор

$$
\begin{bmatrix}\nu_2(\varepsilon)\\ \zeta_2(\varepsilon)\end{bmatrix}=-D_0^{+}(\check c_0(\varepsilon))\int\limits_0^T H_r^*(s)\Big[\mathcal{A}_1(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon))x_2^{(1)}(s,\varepsilon)+
$$

$$
+\mathcal{R}(z_0(s,c_0(\varepsilon))+x_2^{(1)}(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta_1(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]\,ds,
$$

где $\nu_2(\varepsilon) = 0 \in \mathbb{R}^2$; кроме того,

$$\zeta_2(\varepsilon) = \frac{123\,\varepsilon}{2\,621\,440} + \frac{43\,510\,\varepsilon^2}{75\,507\,533\,871} + \frac{9\,013\,\varepsilon^3}{642\,171\,932\,973} - \frac{62\,\varepsilon^4}{2\,477\,177\,165\,417} -$$
$$- \frac{2\,\varepsilon^5}{2\,736\,291\,867\,299} - \frac{\varepsilon^6}{331\,988\,737\,762\,495} + \frac{\varepsilon^7}{519\,469\,068\,642\,329\,603} +$$
$$+ \frac{\varepsilon^8}{15\,953\,971\,018\,009\,592\,698} + \frac{\varepsilon^9}{3\,716\,285\,368\,498\,088\,582\,068} +$$
$$+ \frac{\varepsilon^{10}}{1\,625\,333\,764\,600\,696\,396\,604\,479}.$$

Найденные два приближения к 2π-периодическому решению уравнения (8) и функции $\mu(\varepsilon)$ характеризуют невязки

$$\Delta_k(\varepsilon) = \big\|y_k''(t,\varepsilon) + y_k(t,\varepsilon) - \sin 3t - \varepsilon \sin\varepsilon\, y_k(t,\varepsilon) -$$
$$- \varepsilon\mu_k(\varepsilon)\, y_k(t,\varepsilon) - \varepsilon\, y_k^3(t,\varepsilon)\big\|_{C[0;2\pi]}, \quad k = 0,1,2.$$

В частности, при $\varepsilon = 0,1$ имеем

$$\Delta_0(0,1) \approx 0,000\,684\,845, \quad \Delta_1(0,1) \approx 4,78\,247 \times 10^{-7},$$
$$\Delta_2(0,1) \approx 2,81\,063 \times 10^{-10}.$$

При $\varepsilon = 0,01$ невязки уменьшаются:

$$\Delta_0(0,01) \approx 0,0000\,684\,845, \quad \Delta_1(0,01) \approx 4,78\,227 \times 10^{-9},$$
$$\Delta_2(0,01) \approx 2,81\,182 \times 10^{-13}.$$

Невязки первых двух приближений к 2π-периодическому решению уравнения (8) и функции $\mu(\varepsilon)$, найденных с помощью итерационной схемы (7), на каждом шаге значительно меньше соответствующих невязок первых приближений, найденных с помощью метода Пуанкаре.

Заметим, что, как и в случае нетеровых краевых задач, так и в случае критических периодических задач при отсутствии параметрического резонанса, имеет место равенство [1, 2]

$$D_0(\check{c}_0(\varepsilon)) = \mathcal{F}'_{\check{c}(\varepsilon)}(\check{c}(\varepsilon))\Big|_{\check{c}(\varepsilon)=\check{c}_0(\varepsilon)}.$$

В случае параметрического резонанса доказанная теорема является обобщением соответствующих утверждений [14, 16, 17]. При отсутствии параметрического резонанса доказанная теорема является обобщением соответствующего утверждения [1, 2] на случай явной зависимости неоднородностей $\alpha(\varepsilon)$ и $f(t,\varepsilon)$ порождающей краевой задачи (2) от малого параметра. Использованные при доказательстве теоремы разложения нелинейностей краевой задачи (1) существенно отличаются от соответствующих разложений [1, 2] тем, что значения малого параметра во всех членах разложения отличны от нуля.

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — xiv + 317 p.

2. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.

3. *Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д.* О параметрическом возбуждении электрических колебаний // Журн. техн. физики. — 1934. — № 3. — С. 5–29.

4. *Шмидт Г.* Параметрические колебания. — М.: Мир, 1978. — 336 с.

5. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Параметрический резонанс в линейных системах. — М.: Наука, 1987. — 328 с.

6. *Люлько Н. А.* Основной и комбинационный резонансы в нелинейной системе двух осцилляторов. — Новосибирск, 2012. — 33 с. — (Препринт / Сиб. отд-ние. РАН Ин-т математики; № 281).

7. *Силин В. П.* Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. — М.: Наука, 1973. — 287 с.

8. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. — М.: Гостехиздат, 1956. — 600 с.

9. *Копелев Ю. Ф.* Параметрические колебания станков // Металлорежущие станки: Респ. межвед. науч.-техн. сб. — Киев, 1984. — Вып. 12. — С. 3–8.

10. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения. — 1992. — **28**, № 10. — С. 1668–1674.

11. *Чуйко С. М., Бойчук И. А.* Автономная нетерова краевая задача в критическом случае // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 3. — С. 405–416.

12. *Чуйко С. М., Старкова О. В.* О приближенном решении автономных краевых задач методом наименьших квадратов // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 4. — С. 556–573.

13. *Чуйко С. М.* Область сходимости итерационной процедуры для автономной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 3. — С. 416–432.

14. *Чуйко С. М., Кулиш П. В.* Линейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. — 2012. — **24**. — С. 243–252.

15. *Чуйко А. С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 2. — С. 278–288.

16. *Чуйко С. М., Кулиш П. В., Белущенко А. В.* Слабонелинейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Математика і інформатика. — 2013. — **24**, № 1. — С. 185–194.

17. *Чуйко С. М., Чуйко Е. В., Кулиш П. В.* Периодическая краевая задача для уравнения типа Хилла в случае параметрического резонанса // Динамические системы. — 2013. — **31**, № 3. — С. 151–158.

Получено 21.06.13