УДК 517.9

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С БЫСТРО МЕНЯЮЩЕЙСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Е. С. Владова

Одес. гос. акад. стр-ва и архитектуры
Украина, 65000, Одесса, ул. Дидрихсона, 4
e-mail: lena@gavrilovka.com.ua

We find asymptotic representations for a certain class of solutions of a second order differential equation of Emden – Fowler type with a rapidly varying nonlinearity.

Встановлено асимптотичні зображення для одного класу розв'язків диференціального рівняння другого порядку типу Емдена – Фаулера зі швидко мінливими нелінійностями.

1. Постановка задачи. Рассматривается уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_1(y)\varphi_2(y'), \tag{1.1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная функция, $\varphi_i : \Delta(Y_i^0) \to]0, +\infty[$, $i = 1, 2,$ — некоторые дважды непрерывно дифференцируемые функции, $\Delta(Y_i^0)$ — некоторая односторонняя окрестность точки Y_i^0, Y_i^0 равно либо 0, либо $\pm\infty$.

Данное уравнение рассматривалось в работе [6] для случая, когда функции $\varphi_i(z)$ являются степенными, и в [1 – 4] для случаев, когда функции $\varphi_i(z)$ являются правильно или медленно меняющимися при $z \to Y_i^0$, $i = \overline{1, 2}$ (см. [7]).

Пусть в уравнении (1.1) функция $\varphi_1(z)$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{\substack{z \to Y_1^0 \\ z \in \Delta(Y_1^0)}} \frac{z\varphi_1'(z)}{\varphi_1(z)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

а функция $\varphi_2(z)$ такова, что

$$\begin{gathered} \varphi_2'(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad z \in \Delta(Y_2^0), \quad \lim_{\substack{z \to Y_2^0 \\ z \in \Delta(Y_2^0)}} \varphi_2(z) = \Phi_2^0, \quad \Phi_2^0 \in \{0, +\infty\}, \\ \lim_{\substack{z \to Y_2^0 \\ z \in \Delta(Y_2^0)}} \frac{\varphi_2''(z)\varphi_2(z)}{[\varphi_2'(z)]^2} = 1. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Целью данной работы является установление асимптотических свойств решений уравнения (1.1) в случае, когда функция $\varphi_1(z)$ является правильно или медленно меняющейся при $z \to Y_1^0$, а функция $\varphi_2(z)$ — быстро меняющейся при $z \to Y_2^0$. При таких условиях на функции $\varphi_i(z)$, $i = \overline{1, 2}$, нам не известны результаты об асимптотическом поведении решений ни для уравнения (1.1), ни для каких-либо его частных случаев.

Решение y уравнения (1.1) будем называть $P_\omega(\Lambda_0)$-решением, где $-\infty \le \Lambda_0 \le +\infty$, если оно определено на некотором промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_1^0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \varphi_2(y'(t)) = \Phi_2^0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\varphi_2'(y'(t))}{\varphi_2(y'(t))}\frac{y''(t)y(t)}{y'(t)} = \Lambda_0. \tag{1.4}$$

В данной работе приведены условия существования и асимптотические представления $P_\omega(\Lambda_0)$-решений в случае, когда $\Lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2. Вспомогательные результаты. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$u_i' = \alpha_i p_i(t)\psi_{i+1}(u_{i+1}), \quad i = \overline{1,n}^{\,1}, \tag{2.1}$$

в которой $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $i = \overline{1,n}$, $p_i : [a, \omega[\to]0 + \infty[$, $i = \overline{1,n}$, — непрерывные функции, $\psi_i : \Delta(U_i^0) \to]0; +\infty[$, $i = \overline{1,n}$, — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{\substack{z\to U_i^0\\ z\in\Delta(U_i^0)}} \frac{z\psi_i'(z)}{\psi_i(z)} = \sigma_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.2}$$

где $\sigma_i \in \mathbb{R}$ и таковы, что

$$\prod_{i=1}^n \sigma_i \ne 1, \tag{2.3}$$

$-\infty < a < \omega \le +\infty$, U_i^0 равно либо 0, либо $\pm\infty$, $\Delta(U_i^0)$ — некоторая односторонняя окрестность точки U_i^0.

Решение $(u_i)_{i=1}^n$ системы (2.1), заданное на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, будем называть $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$-решением, если для него выполняются следующие условия:

$$u_i(t) \in \Delta(U_i^0) \quad \textit{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t\uparrow\omega} u_i(t) = U_i^0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{u_i(t)u_{i+1}'(t)}{u_i'(t)u_{i+1}(t)} = \Lambda_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Для системы (2.1) в работе [5] получены необходимые и достаточные условия существования такого класса решений и асимптотические представления этих решений в случае, когда $\Lambda_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Теорема 2.1. *Пусть $\Lambda_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $i = \overline{1,n}$, и $l = \min\mathfrak{I}$. Тогда для существования $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots \Lambda_n)$-решений системы дифференциальных уравнений (2.1) необходимо, а если алгебраическое уравнение*

$$\prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^{i-1} \Lambda_j + \nu\right) - \prod_{i=1}^n \left(\sigma_i \prod_{j=1}^{i-1} \Lambda_j\right) = 0 \tag{2.4}$$

[1] Здесь и далее для всех функций и параметров с индексом $n+1$ будем полагать их взаимно однозначное соответствие с соответствующими величинами с индексом 1.

не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{I_i(t) I'_{i+1}(t)}{I'_i(t) I_{i+1}(t)} = \Lambda_i \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} \tag{2.5}$$

и выполнялись знаковые условия

$$A_i^* \beta_i > 0 \quad \textit{при} \quad U_i^0 = \pm\infty, \quad A_i^* \beta_i < 0 \quad \textit{при} \quad U_i^0 = 0, \tag{2.6}$$

$$\operatorname{sign}[\alpha_i A_i^* \beta_i] = \mu_i. \tag{2.7}$$

Более того, каждое такое решение допускает при $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{u_i(t)}{\psi_{i+1}(u_{i+1}(t))} = \alpha_i \beta_i I_i(t) [1 + o(1)], \quad \textit{если} \quad i \in \mathfrak{I}, \tag{2.8}$$

$$\frac{u_i(t)}{\psi_{i+1}(u_{i+1}(t))} = \alpha_i \beta_i \frac{I_i(t)}{I_l(t)} [1 + o(1)], \quad \textit{если} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}}, \tag{2.9}$$

причем существует целое k*-параметрическое семейство таких решений в случае, когда среди корней алгебраического уравнения (2.4) имеется* k *корней (с учетом кратных), знаки действительных частей которых противоположны знаку числа* $A_l^* \beta_l$.

В формулировке теоремы 2.1 использованы следующие обозначения:

$$\mu_i = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad U_i^0 = +\infty, \\ & \text{либо} \quad U_i^0 = 0 \quad \text{и} \quad \Delta(U_i^0) - \text{правая окрестность } 0, \\ -1, & \text{если} \quad U_i^0 = -\infty, \\ & \text{либо} \quad U_i^0 = 0 \quad \text{и} \quad \Delta(U_i^0) - \text{левая окрестность } 0, \end{cases}$$

$$\mathfrak{I} = \{i \in \{1, \dots, n\} : 1 - \Lambda_i \sigma_{i+1} \neq 0\}, \quad \bar{\mathfrak{I}} = \{1, \dots, n\} \backslash \mathfrak{I}$$

и l — минимальный элемент множества $\mathfrak{I}$,

$$I_i(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{A_i}^t p_i(\tau)\, d\tau & \text{при} \quad i \in \mathfrak{I}, \\ \displaystyle\int_{A_i}^t I_l(\tau) p_i(\tau)\, d\tau & \text{при} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}}, \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} 1 - \Lambda_i \sigma_{i+1}, & \text{если} \quad i \in \mathfrak{I}, \\ \dfrac{\beta_l}{\Lambda_l \dots \Lambda_{i-1}}, & \text{если} \quad i \in \{l+1, \dots, n\} \backslash \mathfrak{I}, \\ \dfrac{\beta_l}{\Lambda_l \dots \Lambda_n \Lambda_1 \dots \Lambda_{i-1}}, & \text{если} \quad i \in \{1, \dots, l-1\} \backslash \mathfrak{I}, \end{cases}$$

где каждый из пределов интегрирования A_i принадлежит $\{\omega, a\}$ и выбран так, чтобы соответствующий ему интеграл I_i стремился либо к нулю, либо к ∞ при $t \uparrow \omega$,

$$A_i^* = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad A_i = a, \\ -1, & \text{если} \quad A_i = \omega \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Кроме того, в работе [5] получены явные асимптотические представления для $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$-решений при некоторых дополнительных условиях.

Определение (см. [4]). *Будем говорить, что функция* $\theta : \Delta(U^0) \longrightarrow]0, +\infty[$, $U^0 \in \in \{0, \pm\infty\}$, *удовлетворяет условию* S, *если для любой непрерывно дифференцируемой функции* $l : \Delta(U^0) \longrightarrow]0, +\infty[$ *такой, что*

$$\lim_{\substack{z \to U^0 \\ z \in \Delta(U^0)}} \frac{z l'(z)}{l(z)} = 0,$$

имеет место асимптотическое соотношение

$$\theta(z l(z)) = \theta(z)[1 + o(1)] \quad \textit{при} \quad z \to U^0 \quad (z \in \Delta\left(U^0\right)).$$

Теорема 2.2. *Пусть* $\Lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = \overline{1, n}$, $l = \min \mathfrak{I}$ *и все функции* $\theta_i(z) = \psi_i(z)|z|^{-\sigma_i}$, $i = \overline{1, n}$, *удовлетворяют условию* S. *Тогда каждое* $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$*-решение (в случае их существования) системы дифференциальных уравнений (2.1) допускает при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$u_i(t) = \mu_i \prod_{k=1}^{n} \left| Q_k(t) \theta_{k+1} \left(\mu_{k+1} \left| I_{k+1}(t) \right|^{\frac{1}{\beta_{k+1}}} \right) \right|^{\rho_{ik}} [1 + o(1)], \quad i = \overline{1, n},$$

где

$$Q_k(t) = \begin{cases} \alpha_k \beta_k I_k(t), & \textit{если} \quad k \in \mathfrak{I}, \\ \\ \alpha_k \beta_k \dfrac{I_k(t)}{I_l(t)}, & \textit{если} \quad k \in \overline{\mathfrak{I}}, \end{cases} \qquad \rho_{ik} = \begin{cases} \dfrac{\prod_{j=i+1}^{n} \sigma_j \prod_{j=1}^{k} \sigma_j}{1 - \prod_{j=1}^{n} \sigma_j} & \textit{при} \quad k = \overline{1, i-1}, \\ \\ \dfrac{\prod_{j=i+1}^{k} \sigma_j}{1 - \prod_{j=1}^{n} \sigma_j} & \textit{при} \quad k = \overline{i, n}. \end{cases}$$

3. Основной результат. Для формулировки результатов для уравнения (1.1) введем вспомогательные функции и обозначения.

Введем обозначение для знака окрестности $\Delta(Y_i^0)$:

$$\mu_i^0 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad Y_i^0 = +\infty, \\ & \text{либо} \quad Y_i^0 = 0 \quad \text{и} \quad \Delta(Y_i^0) - \text{правая окрестность } 0, \\ -1, & \text{если} \quad Y_i^0 = -\infty, \\ & \text{либо} \quad Y_i^0 = 0 \quad \text{и} \quad \Delta(Y_i^0) - \text{левая окрестность } 0. \end{cases}$$

Также определим

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

$$J(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_A^t p(\tau)\,d\tau, & \text{если} \quad \lambda \neq -\Lambda_0, \\ \displaystyle\int_A^t \pi_\omega(\tau)p(\tau)\,d\tau, & \text{если} \quad \lambda = -\Lambda_0, \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 1+\lambda\Lambda_0^{-1}, & \text{если} \quad \lambda \neq -\Lambda_0, \\ -\Lambda_0^{-1}, & \text{если} \quad \lambda = -\Lambda_0, \end{cases}$$

где предел интегрирования A принадлежит $\{\omega, a\}$ и выбран так, чтобы интеграл J стремился либо к нулю, либо к ∞ при $t \uparrow \omega$,

$$A_1^* = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \omega = \infty, \\ -1, & \text{если} \quad \omega < \infty, \end{cases} \qquad A_2^* = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad A = a, \\ -1, & \text{если} \quad A = \omega. \end{cases}$$

Для уравнения (1.1) имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть* $\Lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. *Тогда для существования* $P_\omega(\Lambda_0)$*-решений дифференциального уравнения (1.1) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)} = -\Lambda_0\beta \tag{3.1}$$

и выполнялись знаковые условия

$$\begin{gathered} A_1^* > 0 \quad \textit{при} \quad Y_1^0 = \pm\infty, \quad A_1^* < 0 \quad \textit{при} \quad Y_1^0 = 0, \\ A_2^*\beta > 0 \quad \textit{при} \quad \Phi_2^0 = 0, \quad A_2^*\beta < 0 \quad \textit{при} \quad \Phi_2^0 = \pm\infty, \end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\mu_1^0\mu_2^0A_1^* > 0 \quad \textit{и} \quad \alpha_0\mu_2^0A_2^*\beta > 0. \tag{3.3}$$

Более того, каждое такое решение допускает при $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{y(t)}{y'(t)} = \pi_\omega(t)[1+o(1)], \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{\varphi_1(y(t))\varphi_2'(y'(t))} = \alpha_0\frac{\pi_\omega(t)p(t)}{\Lambda_0}[1+o(1)], \tag{3.5}$$

причем для $\omega = +\infty$ *существует однопараметрическое семейство, если* $\Lambda_0 > 0$, *и двупараметрическое семейство, если* $\Lambda_0 < 0$, *а для* $\omega < +\infty$ *существует однопараметрическое семейство, если* $\Lambda_0 > 0$.

Доказательство. Покажем, что уравнение (1.1) сводится к системе (2.1). Для этого для быстро меняющейся функции $\varphi_2(z)$ введем функцию

$$\psi(z) = \int\limits_B^z \frac{ds}{\varphi_2(s)}, \quad B = \begin{cases} Y_2^0, & \text{если} \quad \displaystyle\int_b^{Y_2^0} \frac{ds}{\varphi_2(s)} \quad \text{сходится}, \\ b, & \text{если} \quad \displaystyle\int_b^{Y_2^0} \frac{ds}{\varphi_2(s)} \quad \text{расходится}, \end{cases} \tag{3.6}$$

где b — любое число из промежутка $\Delta(Y_2^0)$.

Поскольку $\psi'(z) > 0$ при $z \in \Delta(Y_2^0)$, то $\psi : \Delta(Y_2^0) \longrightarrow \Delta(\Psi^0)$ — возрастающая функция, где $\Psi^0 = \lim_{z\to Y_2^0} \psi(z)$, и, следовательно, Ψ^0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, $\Delta(\Psi^0)$ — одностороняя окрестность Ψ^0.

Отметим, что функция ψ так же, как и $\varphi_2(z)$, является быстро меняющейся функцией при $z \to Y_2^0$.

Действительно, с использованием (1.3) и правила Лопиталя имеем

$$\lim_{z\to Y_2^0} \frac{\psi(z)\psi''(z)}{[\psi'(z)]^2} = -\lim_{z\to Y_2^0} \psi(z)\varphi_2'(z) = \lim_{z\to Y_2^0} \frac{\psi'(z)}{\left(\frac{-1}{\varphi_2'(z)}\right)'} = \lim_{z\to Y_2^0} \frac{[\varphi_2'(z)]^2}{\varphi_2(z)\varphi_2''(z)} = 1. \tag{3.7}$$

Кроме того, из соотношения (3.7) мы можем записать следующие соотношения:

$$\frac{\psi(z)}{\psi'(z)} \sim \frac{\psi'(z)}{\psi''(z)} = -\frac{\varphi_2(z)}{\varphi_2'(z)} \quad \text{при} \quad z \to Y_2^0, \tag{3.8}$$

$$\psi(z) \sim -\frac{1}{\varphi_2'(z)} \quad \text{при} \quad z \to Y_2^0. \tag{3.9}$$

С помощью (3.8) предельное соотношение (1.4) в определении $P_\omega(\Lambda_0)$-решения можно записать в эквивалентной форме

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\psi'(y'(t))}{\psi(y'(t))} \frac{y''(t)y(t)}{y'(t)} = -\Lambda_0. \tag{3.10}$$

Кроме того, из (3.9) с учетом того, что $\varphi_2(z)$ — положительная и монотонная функция в $\Delta(Y_2^0)$, имеем $\Phi_2^0 = 0$ при $\Psi^0 = \infty$, $\Phi_2^0 = \infty$ при $\Psi^0 = 0$, и наоборот.

Как было отмечено ранее, функция $\psi(z)$ является возрастающей и, следовательно, обратимой. Более того, в силу свойств медленно, быстро и правильно меняющихся функций функция $\psi^{-1}(z) : \Delta(\Psi^0) \longrightarrow \Delta(Y_2^0)$ — медленно меняющаяся функция при $z \to \Psi^0$. Тогда для нее имеем

$$\lim_{z\to\Phi^0} \frac{z(\psi^{-1}(z))'}{\psi^{-1}(z)} = 0. \tag{3.11}$$

Уравнение (1.1) с помощью преобразования

$$y = u_1, \quad \psi(y') = u_2 \tag{3.12}$$

сведем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} u_1' &= \mu_2^0 \left|\psi^{-1}(u_2)\right|, \\ u_2' &= \alpha_0 p(t)\varphi_1(u_1). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Поскольку функция $\varphi_1 : \Delta(Y_1) \longrightarrow]0,+\infty[$ удовлетворяет условию (1.2), а функция $|\psi^{-1}(z)| : \Delta(\Psi^0) \longrightarrow]0,+\infty[$ — условию (3.11), система (3.13) является системой типа (2.1) (при $n = 2$).

Более того, с учетом (3.10) несложно заметить, что y будет $P_\omega(\Lambda_0)$-решением уравнения (1.1) тогда и только тогда, когда соответствующее ему в силу замен (3.12) решение (u_1, u_2) системы (3.13) будет $\mathcal{P}_\omega(-\Lambda_0, -\Lambda_0^{-1})$-решением системы (3.13). Кроме того, отметим, что так как функция $\left|\psi^{-1}(z)\right|$ удовлетворяет (3.11), то для системы (3.13) заведомо выполнено условие (2.3), а значит, для системы (3.13) справедлива теорема 2.1.

Следовательно, необходимые и достаточные условия существования $\mathcal{P}_\omega(-\Lambda_0, -\Lambda_0^{-1})$-решений для системы (3.13), сформулированные в теореме 2.1, будут необходимыми и достаточными условиями существования $P_\omega(\Lambda_0)$-решений уравнения (1.1).

Конкретизируем обозначения в теореме 2.1 для системы (3.13):

$$\alpha_1 = \mu_2^0, \quad p_1(t) \equiv 1, \quad \alpha_2 = \alpha_0, \quad p_2(t) = p(t), \quad \mu_1 = \mu_1^0, \quad \mu_2 = \mu_2^0,$$

$$I_1(t) = \pi_\omega(t), \quad \beta_1 = 1, \quad I_2(t) = J(t) \quad \beta_2 = \beta.$$

Записав условия (2.5) – (2.7) для системы (3.13), получим условия (3.1) – (3.3).

Для получения асимптотических представлений (3.4), (3.5) достаточно записать асимптотические представления (2.8), (2.9) для системы (3.13), воспользоваться заменой (3.12) и соотношением (3.9). Также несложно заметить, что уравнение (2.4) для системы (3.13) принимает вид

$$(1+\nu)(\nu - \Lambda_0) = 0$$

и не имеет корней с нулевой действительной частью.

Теорема доказана.

Воспользовавшись теоремой 2.2, запишем более простые асимптотические формулы для решения уравнения (1.1).

Поскольку функция $\varphi_1(z)$ является правильно меняющейся порядка λ при $z \to Y_1^0$, для нее справедливо представление

$$\varphi_1(z) = |z|^\lambda \theta_1(z), \tag{3.14}$$

где функция $\theta_1(z)$ является медленно меняющейся при $z \to Y_1^0$.

Теорема 3.2. *Пусть $\Lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и функции $\theta_1(z), \left|\psi^{-1}(z)\right|$ удовлетворяют условию S. Тогда каждое $P_\omega(\Lambda_0)$-решение (в случае их существования) дифференциального уравнения (1.1) допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления*

$$y(t) = \mu_1^0 \left|\pi_\omega(t)\psi^{-1}\left(\mu_2^0 \left|J(t)\right|^{\frac{1}{\beta}}\right)\right| [1+o(1)],$$

$$\frac{1}{\varphi_2'(y'(t))} = -\mu_2^0 \left|\pi_\omega(t)\psi^{-1}\left(\mu_2^0\,|J(t)|^{\frac{1}{\beta}}\right)\right|^\lambda \left|\Lambda_0^{-1}\pi_\omega(t)p(t)\theta_1\left(\mu_1^0\,|\pi_\omega(t)|\right)\right|[1+o(1)].$$

4. Приложение основных результатов. Рассмотрим уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)|y|^\lambda \ln^\gamma |y| e^{-\sigma|y'|^\delta}|y'^{1-\delta}\operatorname{sign} y', \tag{4.1}$$

где $\alpha_0 \in \{1,-1\}$, $\delta,\sigma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\lambda,\gamma \in \mathbb{R}$, $p : [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ — непрерывная функция.

Уравнение (4.1) является уравнением вида (1.1), в котором $\varphi_1(z) = |z|^\lambda \ln^\gamma |z|$, $\varphi_2(z) = e^{-\sigma|z|^\delta}|z|^{1-\delta}\operatorname{sign} z$. Функция $\varphi_1(z)$ является правильно меняющейся порядка λ при $z \to Y_2^0$, а функция $\varphi_2(z)$ в случае, когда $\delta > 0$, является быстро меняющейся при $z \to \pm\infty$, а в случае, когда $\delta < 0$, — быстро меняющейся при $z \to 0$.

Для функции $\varphi_2(z)$ функция $\psi(z)$, определенная в (3.6), имеет вид

$$\psi(z) = \frac{1}{\sigma\delta}e^{\sigma|z|^\delta}.$$

Более того, функция $\theta_1(z)$, определенная в (3.14), и функция $\psi^{-1}(z)$ имеют вид

$$\theta_1(z) = \ln^\gamma |z|, \quad \psi^{-1}(z) = \ln^{\frac{1}{\delta}}|\sigma\delta z|^{\frac{1}{\sigma}}$$

и удовлетворяют условию S.

Для уравнения (4.1) условие (1.4) в определении $P_\omega(\Lambda_0)$-решения, записанное в эквивалентной форме (3.10), примет вид

$$\lim_{t\uparrow\omega}\sigma\delta|y'|^\delta\,\frac{yy''(t)}{[y'(t)]^2} = -\Lambda_0.$$

Для уравнения (4.1) из теорем 3.1 и 3.2 следует данное утверждение.

Следствие 4.1. *Пусть $\Lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Тогда для существования $P_\omega(\Lambda_0)$-решения дифференциального уравнения (4.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (3.1)–(3.3), при этом каждое такое решение допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления*

$$y(t) = \mu_1^0\left|\pi_\omega(t)\ln^{\frac{1}{\delta}}\left|\mu_2^0\sigma\delta|J(t)|^{\frac{1}{\beta}}\right|^{\frac{1}{\delta}}\right|[1+o(1)],$$

$$\left|y'(t)\right|^\delta = \frac{1}{\sigma}\left[\lambda\ln\left|\pi_\omega(t)\ln^{\frac{1}{\delta}}\left|\mu_2^0\sigma\delta|J(t)|^{\frac{1}{\beta}}\right|^{\frac{1}{\delta}}\right| + \ln\left|\Lambda_0^{-1}\pi_\omega(t)p(t)\ln^\gamma\left|\mu_1^0\pi_\omega(t)\right|\right|\right] + o(1)$$

и для $\omega = +\infty$ существует однопараметрическое семейство, если $\Lambda_0 > 0$, и двупараметрическое семейство, если $\Lambda_0 < 0$, а для $\omega < +\infty$ существует однопараметрическое семейство, если $\Lambda_0 > 0$.

1. *Белозерова М. А.* Асимптотические свойства одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Мат. студ. — 2008. — **29**, № 1. — С. 52–62.
2. *Білозерова М. О.* Асимптотичні зображення розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями, у деякому сенсі близькими до степеневих // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. — 2008. — Вип. 374. — С. 34–43.

3. *Белозерова М. А.* Асимптотические представления решений неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, близкими к степенным // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 1. — С. 3 – 15.

4. *Евтухов В. М., Белозерова М. А.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. – 2008. — **60**, № 3. — С. 310 – 331.

5. *Евтухов В. М., Владова Е. С.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных циклических систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 2012. — **48**, № 5. — С. 622 – 639.

6. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Киев, 1998. — 295 с.

7. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 144 с.

Получено 01.09.14