УДК 517.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ДВУХ МЕР СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

А. А. Мартынюк

Ин-т механики НАН Украины
Украина, 03057, Киев, ул. Нестерова, 3

We propose a new class of Lyapunov functions for equations with fractional derivatives. We find conditions for stability in a give class of equations with respect to two measures by using a generalized comparison principle and a vector-valued Lyapunov function.

Запропоновано новий клас функцій Ляпунова для рівнянь із дробовими похідними. Отримано умови стійкості відносно двох мір для даного класу рівнянь шляхом застосування узагальненого принципу порівняння з векторною функцією Ляпунова.

Введение. Понятие устойчивости решений системы уравнений возмущенного движения относительно двух мер восходит к А. М. Ляпунову (см. [1]). В работах [2 – 7] приведены основные результаты, полученные в этом направлении вплоть до 2013 г. В общей теории устойчивости на основе матричнозначных функций Ляпунова разрабатываются три направления (см. [8]): 1) построение критериев устойчивости на основе скалярной функции Ляпунова; 2) применение принципа сравнения с векторной функцией Ляпунова и 3) построение матричнозначных отображений, сохраняющих устойчивость. Разработка этих направлений для уравнений возмущенного движения с дробными производными является открытой областью исследований. В работе [9] по первому направлению приведены некоторые теоремы прямого метода Ляпунова. В данной работе для указанного класса уравнений на основе векторной функции Ляпунова исследуется задача об устойчивости относительно двух мер [10 – 12].

1. Концепция устойчивости относительно двух мер. Рассматривается механическая система с разделяющимися движениями, уравнения для которой имеют вид

$$^{C}D^{\,q}x_i(t) = f_i(t, x_1(t), \ldots, x_s(t)), \quad x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{1}$$

где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $f_i \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_s}, \mathbb{R}^{n_i})$, $i = 1, 2, \ldots, s$, и дробная производная $^{C}D^{\,q}x(t)_i$ субвектора x_i определяется формулой

$$^{C}D^{\,q}x_i(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int\limits_{t_0}^{t_1} (t-s)^{-q} x_i'(s)ds, \quad 0 < q < 1.$$

Здесь x_i' — обычная производная вектор-функции $x_i(t)$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Систему уравнений (1) представим в виде

$$^{C}D^{\,q}x(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где $x(t) = (x_1^T(t), x_2^T(t), \dots, x_s^T(t))^T$, $f(t,\cdot) = (f_1^T(t,\cdot), f_2^T(t,\cdot), \dots, f_s^T(t,\cdot))^T$, и приведем условия существования эйлеровых решений системы (1) [13].

Теорема 1. *Предположим, что в области* $S_0(a,b) = \{(t,x) : t_0 \le t \le t_0 + a, \|x - x_0\| \le b\}$ *вектор-функция* $f(t,x)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $f \in C(S_0, \mathbb{R}^n)$, *где* $n = \sum_{j=1}^s n_j$;

2) существует постоянная $M > 0$ *такая, что* $\|f(t,x)\| \le M$ *при всех* $(t,x) \in S_0$;

3) $\|f(t,x) - f(t,y)\| \le L\|x - y\|$ *при всех* $(t,x) \in S_0$, $L > 0$.

Тогда система уравнений (1) имеет единственное решение $x(t,t_0,x_0)$ *на интервале* $[t_0, t_0 + \beta]$, *где* $\beta = \min\left\{a, \left[\dfrac{b\Gamma(q+1)}{M}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$.

Доказательство теоремы 1 основано на применении теоремы о неподвижной точке для оператора

$$Tx(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^{t_1} (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \tag{3}$$

при $t_0 \le t \le t_0 + \beta$, действующего в пространстве $C([t_0, t_0+\beta], \mathbb{R}^n)$ с нормой

$$\|x\|_0 = \max_{t_0 \le t \le t_0 + \beta} \|x(t)\| E_q(-\lambda(t - t_0)^q), \quad \lambda > 0,$$

где E_q — функция Миттаг-Леффлера вида $E_q(t^q) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^{qk}}{\Gamma(qk+1)}$, $0 < q < 1$.

Замечание 1. Если в системе (1) $i = 1$ и выполняются все условия теоремы 1, то ее утверждение сохраняется.

Для качественного анализа движений системы (1) применяются две меры ρ и ρ_0 из множества

$$\mathcal{M} = \left\{\rho \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+) : \inf_{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n} \rho(t,x) = 0\right\}.$$

Известные определения устойчивости систем относительно двух мер (см. [3–6]) сохраняются и для системы с дробными производными (2).

Определение 1. *Система (2) называется* (ρ_0, ρ)*-устойчивой, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует неотрицательная функция* $\delta(t_0, \varepsilon)$ *на* $\mathbb{R}_+^2$, *непрерывная по* t_0, *такая, что для любых* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ *решение* $x(t)$ *системы (2) удовлетворяет условию*

$$\rho(t, x(t)) < \varepsilon \quad \textit{при всех} \quad t \ge t_0,$$

как только $\rho_0(t_0, x_0) < \delta(t_0, \varepsilon)$.

Определение 2. *Пусть* $\rho_0, \rho \in \mathcal{M}$. *Будем говорить, что:*

1) мера ρ *непрерывна по мере* ρ_0, *если существуют* $\Delta > 0$ *и* $\varphi \in C(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R})$ *такие, что* $s \to \varphi(t,s)$ *принадлежит классу* KR *для каждого* $t \in \mathbb{R}_+$ *и* $\rho(t,x) < \varphi(t, \rho_0(t,x))$, *как только* $\rho_0(t,x) < \Delta$;

2) мера ρ *равномерно непрерывна по мере* ρ_0, *если функция* $\varphi(t,s)$ *в п. 1 не зависит от* t.

Пусть существует функция $Q \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$, $Q(u)$, неубывающая по u, и $Q(0) = 0$. Множество всех таких функций обозначим $K^*(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$, $d \geq 1$.

2. О классе матричнозначных функций, применяемых в данной задаче. Для системы (2) построим матричнозначную функцию (см. [8])

$$U(t,x) = [u_{ij}(t,x)], \quad i,j = 1,2,\ldots,m, \tag{4}$$

где $u_{ii} \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ и $u_{ij}(t,x) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ при всех $i \neq j$.

Построим вектор-функцию

$$L(t,x,d) = AU(t,x)d, \tag{5}$$

где A — постоянная $(m \times m)$-матрица и d — постоянный m-вектор. Вектор-функцию (5) разделим на два субвектора $L_p(t,x,d)$ и $L_r(t,x,d)$ так, что $L(t,x,d) = (L_p^T(t,x,d), L_r^T(t,x,d))^T$ и $p + r = m$, $m < \sum_{i=1}^s n_i$.

Предположим, что $L \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m, \mathbb{R}^m)$ и удовлетворяет локальному условию Липшица относительно x. Определим дробную производную Капуто вектор-функции (5) вдоль решений системы (2) по формуле

$$^{C}D^{\,q}L(t,x,d) = A^{C}D^{\,q}U(t,x)d, \tag{6}$$

где $^{C}D^{\,q}U(t,x(t))$, $0 < q < 1$, вычисляется покомпонентно.

Заметим, что это определение дробной производной вектор-функции (5) является формальным. Фактическое вычисление дробной производной сложной функции проводится с помощью некоторых интегральных операторов и представляет довольно сложную задачу.

Для одного простого вида функции Ляпунова сформулируем такое предположение [15].

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Для функции $\dfrac{1}{2}v_2(t) = x^T(t)x(t)$ дробная производная Капуто порядка q $(0 < q < 1)$, определяемая формулой

$$^{C}D^{\,q}v_2(t) = (^{C}D^{\,q}x^T(t))x(t) + x^T(t)(^{C}D^{\,q}x(t)) - 2\frac{t^{-q}}{\Gamma(1-q)}\,\|x(0)\|^2 + 2Y[x(t)],$$

где

$$Y[x(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+q)}{\Gamma(1+k)\Gamma(1-k+q)}\,{}^{C}D^{\,k}x(t)^{C}D^{\,q-k}x(t),$$

может рассматриваться как полная производная функции $v_2(t)$ по t, если существует постоянная $\beta > 0$ такая, что

$$\|Y[x(t)]\| \leq \beta\|x\|^2.$$

Поскольку $2\,\dfrac{t^{-q}}{\Gamma(1-q)}\|x(0)\|^2 \geq 0$, то

$$^{C}D^{\,q}v_2(t) \leq (^{C}D^{\,q}x^T(t))\,x(t) + x^T(t)(^{C}D^{\,q}x(t)) + 2Y[x(t)]$$

при всех $t \geq 0$.

Определение 3. *Векторная функция (5) является:*

(а) положительно определенной, если для заданной меры $\rho \in \mathcal{M}$ *существуют функции* a *из* K*-класса и* Q *из* K^**-класса такие, что* $a(\rho(t,x)) \leq Q(L(t,x,d))$*, как только* $\rho(t,x) < h$, $h > 0$ *— постоянная;*

(б) ρ_0*-убывающей, если при заданной мере* $\rho_0(t,x)$ *существуют функции* b *из* K*-класса и* Q *из* K^**-класса такие, что* $Q(L(t,x,d)) \leq b(\rho_0(t,x))$*, как только* $\rho_0(t,x) < h_0$, $h_0 > 0$ *— постоянная;*

(в) слабо ρ_0*-убывающей, если при заданной мере* $\rho_0(t,x)$ *существуют функции* b^* *из* CK*-класса и* Q *из* K^**-класса такие, что* $Q(L(t,x,d)) \leq b^*(t,\rho_0(t,x))$*, как только* $\rho_0(t,x) < h_0$*;*

(г) асимптотически ρ_0*-убывающей, если при заданной мере* $\rho_0(t,x)$ *существуют функции* c^* *из* KL*-класса и* Q *из* K^**-класса такие, что* $Q(L(t,x,d)) \leq c^*(t,\rho_0(t,x))$*, как только* $\rho_0(t,x) < h_0$.

3. О достаточных условиях устойчивости относительно двух мер. Наряду с системой уравнений возмущенного движения (2) рассматривается система сравнения

$$ {}^{C}D^{q}u(t) = g(t,u(t)), \quad u(t_0) = u_0 \geq 0, \tag{7} $$

где $g \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $g(t,0) = 0$ при всех $t \geq 0$, $g(t,u)$ — квазимонотонная неубывающая по u функция при всех $t \in \mathbb{R}_+$, $0 < q < 1$.

Определения устойчивости состояния $u = 0$ системы сравнения (7) принимаются такими же, как и в случае обыкновенной производной вектора $u(t)$ (см., например, [14]).

Определение 4 [11]. *Состояние* $u = 0$ *системы (7) является полиустойчивым, если для заданных* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $\varepsilon_2 > 0$ *существуют функции* $Q_1 \in K^*(\mathbb{R}^p_+, \mathbb{R}_+)$, $Q_2 \in K^*(\mathbb{R}^r_+, \mathbb{R}_+)$ $(p + r = m)$ *и величины* $\delta_1 = \delta_1(t_0, \varepsilon_1) > 0$ *и* $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_2) > 0$ *такие, что*

$$ Q_1(u_p(t,t_0,u_0)) < \varepsilon_1 \quad \textit{при} \quad t \geq t_0, \quad \textit{если} \quad Q_1(u_{0p}) < \delta_1, $$

и

$$ Q_2(u_r(t,t_0,u_0)) < \varepsilon_2, \quad \textit{если} \quad Q_2(u_{0r}) < \delta_2. $$

Покажем, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что выполняются следующие условия:*

H_1*) вектор-функция* $f(t,x)$ *определена и непрерывна на множестве* $S_0(a,b)$ *и решения* $x(t)$ *системы (2) существуют при всех* $t \geq t_0$*;*

H_2*) существуют матричнозначная функция (4),* $(m \times m)$*-матрица* A *и вектор* $b \in \mathbb{R}^m_+$ *такие, что вектор-функция (5) локально липшицева по* x *в области* $S_0(a,b)$ *и ее компоненты* $L_p(t,x,b)$ *и* $L_r(t,x,b)$ *удовлетворяют условиям*

(а) $L_p(t,x,b)$ *— слабо* ρ_0*-убывающая;*

(б) $a(\rho(t,x)) \leq Q_2(L_r(t,x,d)) \leq b(\rho_0(t,x)) + b_1(Q_1(L_p(t,x,b)))$ *при всех* $(t,x) \in S_0(a,b) \cap S^c_0(\rho_0,\eta)$ *для любого* η $(0 < \eta < h)$*,* $Q_1(L_p(t,0,d)) = 0$ *при всех* $t \geq t_0$*, где* a, b, b_1 *принадлежат* K*-классу,* Q_1, Q_2 *—* K^**-классу;*

H_3*) существует вектор-функция* $g(t,u)$*, квазимонотонная неубывающая по* u*, для компонент* $(g^T_p, g^T_r)^T = g$ *которой выполняются неравенства*

(а) ${}^{C}D^{q}L_p(t,x(t),d) \leq g_p(t,L_p(t,x,d),0)$ *при всех* $(t,x) \in S_0(a,b)$*;*

(б) ${}^{C}D^{q}L_r(t,x(t),d) \leq g_r(t,L_p(t,x,d),L_r(t,x,d))$ *при всех* $(t,x) \in S_0(a,b) \cap S^c_0(\rho_0,\eta)$*;*

H_4) состояние $u = 0$ системы сравнения (7) является полиустойчивым в смысле определения 4.

Тогда система (2) является (ρ_0, ρ)-устойчивой.

Доказательство. Пусть заданы меры $\rho_0(t,x)$ и $\rho(t,x)$, принадлежащие множеству $\mathcal{M}$. Поскольку согласно условию H_2(a) функция $L_p(t,x,d)$ слабо ρ_0-убывающая, то можно указать функцию Φ_0, принадлежащую CK-классу, и величину h_1 $(0 < h_1 \leq h)$, для которых

$$Q_1(L_p(t,x,d)) \leq \Phi_0(t, \rho_0(t,x)), \tag{8}$$

как только $\rho_0(t,x) < h_1$. Из того, что мера $\rho(t,x)$ непрерывна по мере $\rho_0(t,x)$, следует существование функции Φ_0, принадлежащей CK-классу, и постоянной величины h_0 $(0 < h_0 < h_1)$ таких, что

$$\rho(t,x) \leq \Phi_1(t, \rho_0(t,x)), \tag{9}$$

как только $\rho_0(t,x) < h_0$, причем h_0 выбирается так, что $\Phi_1(t,h_0) < h_1$ при всех $t \geq t_0$.

Пусть $0 < (\varepsilon_1, \varepsilon_2) < h$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ заданы. Из условия H_4 следует, что решение $u = 0$ системы сравнения (7) полиустойчиво в смысле определения 4. Поскольку b принадлежит K-классу, а Φ_1 — CK-классу, существует $\delta_1^* = \delta_1^*(\varepsilon)$, $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, такое, что

$$b(\delta_1^*) < \frac{1}{2}\delta_2 \quad \text{и} \quad \Phi_1(t_0, \delta_1^*) < \varepsilon. \tag{10}$$

Пусть $\varepsilon_2 = a(\varepsilon)$ и $\varepsilon_1 = b_1^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\delta_2\right)$. Для системы сравнения (7) выберем $u_{0p} = L_p(t_0, x_0, d)$. Так как Φ_0 принадлежит CK-классу, $\Phi_1(L_p(t,0,d)) \equiv 0$ и выполняется оценка (8), существует величина $\delta_2^* = \delta_2^*(t_0, \varepsilon) > 0$, $\delta_2^* \in (0, \min(\delta_1^*, h_1))$, такая, что

$$Q_1(L_p(t_0, x_0, d)) \leq \Phi_0(t_0, \rho_0(t_0, x_0)) < \delta_1, \tag{11}$$

как только $\rho_0(t_0, x_0) < \delta_2^*$.

Вычислим $\hat{\delta} = \min(\delta_1^*, \delta_2^*)$ и предположим, что $\rho_0(t_0, x_0) < \hat{\delta}$. Заметим, что из условий (9), (10) следует, что

$$\rho(t_0, x_0) \leq \Phi_1(t_0, \rho_0(t_0, x_0)) \leq \Phi_1(t_0, \hat{\delta}) \leq \Phi_1(t_0, \delta_1^*) < \varepsilon. \tag{12}$$

Далее покажем, что $\rho(t, x(t)) < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$, как только $\rho_0(t_0, x_0) < \hat{\delta}$. Пусть это не так. Тогда из неравенств (12) следует, что существуют решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (1) с начальными условиями $x_0 : \rho_0(t_0, x_0) < \hat{\delta}$ и моменты времени $t_2 > t_1 > t_0$ такие, что

$$\rho(t_2, x(t_2)) = \varepsilon < h, \quad \rho_0(t_1, x(t_1)) = \delta_1^*(\varepsilon), \quad x(t) \in S(\rho, \varepsilon) \cap S^c(\rho_0, h),$$

где $\eta = \delta_1^*(\varepsilon) > 0$ при всех $t \in [t_1, t_2]$.

Согласно условию H_3 для функции $m(t) = L(t, x(t), d)$ имеем неравенства

$$\begin{aligned} &{}^C D^q m_p(t) \leq g_p(t, m_p(t), 0), \quad t_0 \leq t \leq t_2, \\ &{}^C D^q m_r(t) \leq g_r(t, m_p(t), 0), \quad t_1 \leq t \leq t_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Из неравенств (13) и теоремы сравнения 3.1.2 [10] имеем оценки

$$m_p(t) \le u_p(t; t_1, m(t_1)), \quad t_1 \le t \le t_2,$$

$$m_r(t) \le u_r(t; t_1, m(t_1)), \quad t_1 \le t \le t_2.$$

Пусть функция $u^*(t) = u(t; t_1, m(t_1)) \ge 0$ является расширением $u(t)$ влево от t_1 до t_0 и $u^*(t_0) = u_0^*$. Пусть $u_p(t_0) = L_p(t_0, x_0, d)$ и $u_r(t_0) = u_{0r}^*$. Рассмотрим дифференциальное неравенство

$$\begin{gathered} {}^C D^q m_p(t) \le g_p(t, m_p(t), u_r^*(t)), \\ u_p(t_0) = m_p(t_0), \end{gathered} \tag{14}$$

которое согласно теореме 3.1.5 [14] приводит к неравенству

$$\begin{gathered} m_p(t) \le u_p(t; t_0, u_0), \quad t_0 \le t \le t_1, \\ u_0 = (u_p(t_0), u_{0r}^*). \end{gathered} \tag{15}$$

Отсюда следует, что вектор-функция $u(t) = (u_p^T(t; t_0, u_0), u_r^{*T}(t; t_1, m(t_1)))^T$ является решением системы сравнения (7) на $[t_0, t_1]$. Согласно условию H_2(б) теоремы 2 и оценке (15) имеем

$$a(\varepsilon) = a(\rho(t_2, x(t_2))) \le Q_2(L_r(t_2; x(t_2), d)) \le Q_2(u_r(t_2; t_1, m(t_1))). \tag{16}$$

Из (13) для функции $Q_1(\cdot)$ получаем оценку

$$Q_1(L_p(t_1; x(t_1), d)) \le Q_1(u_p(t_1; t_0, u_0)) < b_1^{-1}\left(\frac{1}{2}\,\delta_2(\varepsilon)\right), \tag{17}$$

как только $Q_1(u_{0p}) < \delta_1$. Теперь из условия H_2(б) и неравенства (17) находим

$$Q_2(L_r(t_1, x(t_1), d)) \le b(\rho_0(t_1, x(t_1))) + b_1(Q_1(L_p(t_1, x(t_1), d))) \le$$

$$\le b(\delta_1^*(\varepsilon)) + b_1\left(b_1^{-1}\left(\frac{1}{2}\,\delta_2(\varepsilon)\right)\right) < \frac{1}{2}\,\delta_2 + \frac{1}{2}\,\delta_2 = \delta_2.$$

Отсюда следует, что

$$Q_2(u_q(t_2; t_1, m(t_1))) < a(\varepsilon),$$

а это противоречит неравенству (16). Полученное противоречие доказывает теорему 2.

4. Заключительные замечания. Возможный выбор двух мер при исследовании устойчивости системы (2) состоит в следующем [14]:

1) при исследовании устойчивости состояния $x = 0$ системы (2) в смысле Ляпунова мера $\rho(t, x) = \rho_0(t, x) = \|x\|$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора x;

2) при исследовании устойчивости состояния $x = 0$ системы (2) относительно части переменных выбираем $\rho(t, x) = \|x\|_s$, $1 \le s < n$, и $\rho_0(t, x) = \|x\|$;

3) при исследовании устойчивости некоторого частного решения $\varphi(t)$ системы (2) меры выбираются так: $\rho(t,x)=\rho_0(t,x)=\|x-\varphi(t)\|$;

4) при исследовании асимптотически инвариантного множества $\{0\}$ системы (2) $\rho(t,x)=\rho_0(t,x)=\|x\|+\sigma(t)$, где σ принадлежит L-классу Хана;

5) при исследовании устойчивости системы (2) относительно инвариантного множества $A\subset\mathbb{R}^n$ меры выбираются так: $\rho(t,x)=\rho_0(t,x)=d(x,A)$, где $d(x,A)$ — расстояние от x до A;

6) при исследовании устойчивости условно инвариантного множества B относительно множества A, где $A\subset B\subset\mathbb{R}^n$, меры $\rho(t,x)=d(x,B)$ и $\rho_0(t,x)=d(x,A)$.

Таким образом, теорема 2 позволяет исследовать динамические свойства решений системы (2) в случаях 1 – 6.

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — Л.; М.: ОНТИ, 1935. — 386 с.
2. *Вуйичич В. А., Мартынюк А. А.* Некоторые задачи механики неавтономных систем. — Белград: Мат. ин-т, 1991. — 109 с.
3. *Lakshmikantham V., Liu X.* Perturbing families of Lyapunov functions and stability in terms of two measures // J. Math. Anal. and Appl. — 1989. — **140**, № 1. — P. 107 – 114.
4. *Мартынюк А. А., Сунь-Чжень ци.* Теория практической устойчивости и ее приложения. — Beijing: Sci. Press, 2003. — 230 с. (на китайском языке).
5. *Мартынюк А. А., Сунь-Чжень ци.* Качественный анализ нелинейных систем с малым параметром. — Beijing: Sci. Press, 2005. — 253 с. (на китайском языке).
6. *Martynyuk A., Chernetskaya L., Martynyuk V.* Weakly connected nonlinear systems. Boundedness and stability of motion. — Boca Raton: CRC Press, 2013. — 212 p.
7. *Martynyuk A. A.* Qualitative analysis of nonlinear systems by the method of matrix Lyapunov functions // Rocky Mountain J. Math. — 1995. — **25**, № 1. — P. 397 – 415.
8. *Martynyuk A. A.* Stability of motion. The role of multicomponent Liapunov's functions. — Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2007. — 322 p.
9. *Мартынюк А. А.* О прямом методе Ляпунова для уравнений с дробными производными // Доп. НАН України. — 2010. — № 3. — С. 30 – 34.
10. *Martynyuk A. A.* A theorem on polystability // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1991. — **381**, № 4. — P. 808 – 811.
11. *Martynyuk A. A.* A new direction in the method of matrix Lyapunov functions // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1991. — **319**, № 3. — P. 554 – 557.
12. *Russinov I. K.* A direction in the method of matrix Lyapunov functions and stability in terms of two measures // Plovdiv Univ., Sci. works. — 2004. — **319**, Book 3. — P. 69 – 76.
13. *Lakshmikantham V., Leela S., Devi J. V.* Theory of fractional dynamic systems. — Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2009. — 170 p.
14. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A. A.* Stability analysis of nonlinear systems. — New York: Marcel Dekker, 1989. — 315 p.
15. *N'Doye I., Darouch M., Voss H.* Observer-based approach for fractional order chaotic synchronization and communication // Eur. Contr. Conf. (ECC), Zürich, 17 – 19 July, 2013. — P. 4281 – 4286.

Получено 23.10.14