УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ СЛАБКОНЕЛІНІЙНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ТРЬОМА НЕВІДОМИМИ ФУНКЦІЯМИ РІЗНИХ АРГУМЕНТІВ У ПРАВІЙ ЧАСТИНІ

Н. П. Процах

Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України
Україна, 79060, Львів, вул. Наукова, 3-б
e-mail: protsakh@ukr.net

We consider an inverse problem of determining three unknown functions, in different arguments, that enter the right-hand side of a weakly nonlinear ultraparabolic equation with integral type overdetermining conditions. Necessary and sufficient conditions are found for existence and uniqueness of a generalized solution.

Рассмотрена обратная задача определения трех неизвестных функций от различных аргументов, которые входят в правую часть слабонелинейного ультрапараболического уравнения с условиями переопределения интегрального вида. Получены условия существования и единственности обобщенного решения исследуемой задачи.

1. Вступ. Багато явищ механіки, біології, фізики, економіки моделюються задачами для ультрапараболічних рівнянь [1, 2]. Обернені задачі пов'язані з пошуком причин явищ за відомими їхніми наслідками. У математичних моделях це означає знаходження коефіцієнтів чи правої частини рівняння за додаткових умов на розв'язок цього рівняння.

Обернені задачі визначення одного множника правої частини параболічних (гіперболічних) рівнянь, залежного від часової (просторової) змінної, досліджено у багатьох працях (див. [3 – 10] і наведену там бібліографію). Обернені задачі одночасного відшукання декількох коефіцієнтів рівняння вивчені значно менше. У статті [11] розглянуто задачу визначення трьох невідомих функцій, залежних від часу, що містяться у правій частині лінійного гіперболічного рівняння другого порядку, а в [12] — задачу визначення декількох невідомих функцій правої частини параболічного рівняння, залежних від просторових змінних. У монографії [3] встановлено розв'язність на малому часовому проміжку оберненої задачі знаходження двох невідомих функцій правої частини параболічного рівняння, які залежать від різних аргументів.

У даній статті розглянуто обернену задачу знаходження трьох невідомих функцій, залежних від різних аргументів, які містяться у правій частині слабконелінійного ультрапараболічного рівняння, з мішаними умовами та інтегральними умовами перевизначення. Встановлено умови існування та єдиності на деякому скінченному часовому проміжку узагальненого розв'язку розглядуваної задачі, компоненти якого належать до просторів Соболєва.

Прямі мішані задачі для нелінійних ультрапараболічних рівнянь було досліджено у роботах [13 – 15].

2. Основні позначення та функціональні простори. Нехай Ω і D — обмежені області відповідно в $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^l$ з межами $\partial\Omega \in C^2$ і $\partial D \in C^1$; $x \in \Omega$, $y \in D$, $t \in (0,T)$, де T — фіксоване число з інтервалу $(0,\infty)$, $Q_\tau = \Omega\times D\times(0,\tau)$, $\tau\in(0,T]$, $G=\Omega\times D$, $\Pi_1 = D\times(0,T)$, $\Pi_2 = \Omega\times(0,T)$; $\Sigma_T = \partial\Omega\times D\times(0,T)$, $S_T=\Omega\times\partial D\times(0,T)$, $G_\xi = \{(x,y,t) : (x,y)\in G, t=\xi\}$, $\xi\in[0,T]$.

Будемо використовувати такі простори: $L^\infty(Q_T) := \{w : Q_T\to\mathbb{R}; w$ є вимірною та існує така стала C, що $|w(x,y,t)|\le C$ майже скрізь на $Q_T\}$, $\|w; L^\infty(Q_T)\| = \inf\{C : |w(x,y,t)|\le C$ майже скрізь на $Q_T\}$; $L^\infty(\Omega) := \{w:\Omega\to\mathbb{R}; w$ є вимірною та існує така стала C, що $|w(x)|\le C$ майже скрізь на $\Omega\}$, $\|w;L^\infty(\Omega)\| = \inf\{C : |w(x)|\le C$ майже скрізь на $\Omega\}$; $L^2(G) := \{w : G\to\mathbb{R}; w$ є вимірною, $\int_G |w(x,y)|^2\,dxdy < \infty\}$,

$$\|w;L^2(G)\| = \left(\int\limits_G |w(x,y)|^2\,dxdy\right)^{\frac12};$$

$$L^2(\Omega) := \left\{w:\Omega\to\mathbb{R}; w \text{ є вимірною}, \int\limits_\Omega |w(x)|^2\,dx<\infty\right\},$$

$$\|w;L^2(\Omega)\| = \left(\int\limits_\Omega |w(x)|^2\,dx\right)^{\frac12};$$

$$L^2(D) := \left\{w:D\to\mathbb{R}; w \text{ є вимірною}, \int\limits_D |w(y)|^2\,dy<\infty\right\},$$

$$\|w;L^2(D)\| = \left(\int\limits_D |w(y)|^2\,dy\right)^{\frac12};$$

$$L^2(0,T) := \left\{w:[0,T]\to\mathbb{R}; w \text{ є вимірною}, \int\limits_0^T |w(t)|^2\,dt<\infty\right\},$$

$$\|w;L^2(0,T)\| = \left(\int\limits_0^T |w(t)^2\,dt\right)^{\frac12};$$

$$L^2(Q_T) := \left\{w:Q_T\to\mathbb{R}; w \text{ є вимірною}, \int\limits_{Q_T} |w(x,y,t)|^2\,dxdydt<\infty\right\},$$

$$\|w;L^2(Q_T)\| = \left(\int\limits_{Q_T} |w(x,y,t)|^2\,dxdydt\right)^{\frac12};$$

$$L^2(\Pi_1) := \left\{w:\Pi_1\to\mathbb{R}; w \text{ є вимірною}, \int\limits_{\Pi_1} |w(y,t)|^2dydt<\infty\right\},$$

$$\|w;L^2(\Pi_1)\| = \left(\int\limits_{\Pi_1} |w(y,t)|^2\,dydt\right)^{\frac12};$$

$$L^2(\Pi_2) := \left\{ w : \Pi_2 \to \mathbb{R}; w \text{ є вимірною}, \int\limits_{\Pi_2} |w(x,t)|^2 \, dxdt < \infty \right\},$$

$$\|w; L^2(\Pi_2)\| = \left(\int\limits_{\Pi_2} |w(x,t)|^2 \, dxdt \right)^{\frac{1}{2}};$$

$W^{k,2}(\cdot)$ — множина всіх розподілів w, які разом зі своїми похідними k-го порядку за всіма змінними належать до простору $L^2(\cdot)$, $\|w; W^{1,2}(D)\| = \left(\int_D \left[|w(y)|^2 + \sum_{i=1}^{l} |w_{y_i}(y)|^2 \right] dy \right)^{\frac{1}{2}}$;

$$\|w; W^{2,2}(D)\| = \left(\int\limits_D \left[|w(y)|^2 + \sum_{i=1}^{l} |w_{y_i}(y)|^2 + \sum_{i,j=1}^{l} |w_{y_i y_j}(y)|^2 \right] dy \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\|w; W^{2,2}(\Omega)\| = \left(\int\limits_\Omega \left[|w(x)|^2 + \sum_{i=1}^{n} |w_{x_i}(x)|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} |w_{x_i x_j}(x)|^2 \right] dx \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\|w; W^{1,2}(0,T)\| = \left(\int\limits_0^T [|w(t)|^2 + |w'(t)|^2] \, dt \right)^{\frac{1}{2}};$$

$C^k(O)$ — простір k разів неперервно диференційовних функцій на O; $V(0,T; W(G)) :=$ $:= \{w : [0,T] \to W(G); \|w(\cdot,\cdot,t); W(G)\| \in V(0,T)\}$ (де V, W — банахові простори); $C(\Omega; L^2(\Pi_1)) := \{w : \Omega \to L^2(\Pi_1); \|w(x,\cdot,\cdot); L^2(\Pi_1)\| \in C(\Omega)\}$; $C(D; L^2(\Pi_2)) := \{w : D \to$ $\to L^2(\Pi_2); \|w(\cdot,y,\cdot); L^2(\Pi_2)\| \in C(D)\}$; $C^1(D; C^1(\overline{\Omega})) := \{w : D \to C^1(\overline{\Omega}); \|w(\cdot,y); C^1(\overline{\Omega})\| \in$ $\in C^1(D)\}$; $C^1([0,T]; C^2(\overline{\Omega})) := \{w : [0,T] \to C^2(\overline{\Omega}); \|w(\cdot,t); C^2(\overline{\Omega})\| \in C^1([0,T])\}$; $W_0^{k,2}(\Omega) :=$ $:= \{w : w \in W^{k,2}(\Omega), w|_{\partial\Omega} = 0\}$, $k = 1, 2$.

Введемо ще простори $V_1(Q_T) := \{w : w, w_{x_i} \in L^2(Q_T), i = 1, \ldots, n, w|_{\Sigma_T} = 0\}$, $V_2(G) := L^2(D; W_0^{1,2}(\Omega)) = \{w : D \to W_0^{1,2}(\Omega); \|w(\cdot,y); W_0^{1,2}(\Omega)\| \in L^2(D)\}$, $\|w; V_2(G)\| =$ $= \left(\int_G \left[|w(x,y)|^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} |w_{x_i}(x,y)|^2 \right] dxdy \right)^{\frac{1}{2}}$ і позначимо через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярний добуток між просторами $V_2^*(G)$ і $V_2(G)$.

3. Формулювання задачі. В області Q_T розглянемо задачу для рівняння

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(y) u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + c(x,y,t)u + g(x,y,t,u) =$$
$$= f_1(x,y,t) q_1(x) + f_2(x,y,t) q_2(t) + f_3(x,y,t) q_3(y) + f_0(x,y,t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in G, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u|_{\Sigma_T} = 0, \quad u|_{S_T^1} = 0 \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$\int\limits_{\Pi_1} K_1(y,t)u(x,y,t)\,dydt = E_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

$$\int\limits_{G_t} K_2(x,y)u(x,y,t)\,dxdy = E_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

$$\int\limits_{\Pi_2} K_3(x,t)u(x,y,t)\,dxdt = E_3(y), \quad y \in D, \tag{6}$$

де $u(x,y,t)$, $q_1(x)$, $q_2(t)$, $q_3(y)$ — невідомі функції,

$$S_T^1 = \left\{(x,y,t) \in S_T : \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(y)\cos(\nu, y_i) < 0\right\},$$

ν — одинична зовнішня нормаль до S_T, причому виконується умова

(S) існує така поверхня з додатною мірою Лебега $\Gamma_1 \subset \partial D \subset \mathbb{R}^{l-1}$, що $S_T^1 = \Omega \times \Gamma_1 \times \times(0,T)$;

функції $f_0(x,y,t)$, $f_1(x,y,t)$, $f_2(x,y,t)$, $f_3(x,y,t)$, $u_0(x,y)$, $K_1(y,t)$, $K_2(x,y)$, $K_3(x,t)$, $E_1(x)$, $E_2(t)$, $E_3(y)$ справджують умови

(F) $f_1 \in C(\Omega; L^2(\Pi_1))$, $f_2 \in C([0,T]; L^2(G))$, $f_3 \in C(D; L^2(\Pi_2))$, $f_0 \in L^2(Q_T)$;

(U) $u_0 \in V_0(G)$, де $V_0(G) := \{w : w, w_{y_j} \in L^2(G), j = 1,\ldots,l, \; w|_{\partial\Omega\times D} = 0, \; w|_{\Omega\times\Gamma_1} = 0\}$;

(K_1) $K_1 \in C^1([0,T]; C^1(\overline{D}))$, $K_1(y,0) = K_1(y,T) = 0$ для всіх $y \in D$, $K_1|_{\Gamma_2\times(0,T)} = 0$, де $\Gamma_2 = \partial D\backslash\Gamma_1$;

(K_2) $K_2 \in C^1(D; C^1(\overline{\Omega}))$, $K_2|_{\partial\Omega\times D} = 0$, $K_2|_{\Omega\times\Gamma_2} = 0$;

(K_3) $K_3 \in C^1(0,T; C^2(\overline{\Omega}))$, $K_3|_{\partial\Omega\times D} = 0$, $K_3(x,0) = K_3(x,T) = 0$ для всіх $x \in \Omega$;

(E) $E_1 \in W_0^{2,2}(\Omega)$, $E_2 \in W^{1,2}(0,T)$, $E_3 \in W^{2,2}(D)$,

а коефіцієнти лівої частини рівняння (1) задовольняють умови

(A) $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $i,j = 1,\ldots,n$, $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2$ для майже всіх $x \in \Omega$ та для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, a_0 — додатна стала;

(C) $c \in L^\infty(Q_T)$, $c(x,y,t) \geq c_0$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$, c_0 — стала;

(L) $\lambda_i \in C(\overline{D})$, $\lambda_{iy_i} \in L^\infty(D)$ для всіх $i = 1,\ldots,l$;

(H) $g(x,y,t,\xi)$ вимірна за змінними (x,y,t) в області Q_T для всіх $\xi \in \mathbb{R}^1$ і неперервна по ξ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$, причому існує додатна стала g^0 така, що $|g(x,y,t,\xi) - -g(x,y,t,\eta)| \leq g^0|\xi-\eta|$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ та всіх $\xi,\eta \in \mathbb{R}^1$.

4. Існування та єдиність розв'язку прямої задачі. Припустимо спочатку, що в рівнянні (1) $q_1(x) = q_1^*(x)$, $q_2(t) = q_2^*(t)$, $q_3(y) = q_3^*(y)$, де $q_1^* \in L^2(\Omega)$, $q_2^* \in L^2(0,T)$, $q_3^* \in W^{1,2}(D)$, — відомі функції. Розглянемо мішану задачу для рівняння (1) з початковою умовою (2) та крайовими умовами (3).

Введемо простір $V_3(Q_T) := \{w : w, w_{x_i}, w_{y_j} \in L^2(Q_T), i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,l, \; w|_{S_T^1} = = 0, \; w|_{\Sigma_T} = 0\}$.

Означення 1. *Функцію $u^*(x,y,t)$ назвемо узагальненим розв'язком задачі (1) – (3), якщо $u^* \in V_3(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$, $u_t^* \in L^2(0,T; V_2^*(G)) + L^2(Q_T)$, справджується умова (2)* *та для всіх функцій* $v \in V_1(Q_T)$ *виконується рівність*

$$\int_0^T \langle u_t^*, v\rangle \, dt + \int_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^{l} \lambda_i(y) u_{y_i}^* v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i}^* v_{x_i} + c(x,y,t) u^* v + g(x,y,t,u^*) v \right] dx\, dy\, dt =$$

$$= \int_{Q_T} [f_1(x,y,t) q_1^*(x) + f_2(x,y,t) q_2^*(t) + f_3(x,y,t) q_3^*(y) + f_0(x,y,t)]\, v\, dx\, dy\, dt. \qquad (7)$$

Із результатів статті [14] випливають наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай справджуються умови (A), (C), (H), (L), (F), (U), (S) і, крім того:*
1) $a_{ijx_i} \in L^\infty(\Omega)$, $c_{y_k} \in L^\infty(Q_T)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, l$, $q_1^* \in L^2(\Omega)$, $q_2^* \in L^2(0,T)$, $q_3^* \in W^{1,2}(D)$, $f_{sy_k} \in L^2(Q_T)$, $s = 0,1,2,3$, $k = 1, \ldots, l$;
2) існує така стала g^1, *що для майже всіх* $(x,y,t) \in Q_T$ *та всіх* $\xi \in \mathbb{R}^1$ *виконуються нерівності* $|g_{y_i}(x,y,t,\xi)| \le g^1$, $i = 1, \ldots, l$, $g(x,y,t,0)|_{S_T^1} = 0$;
3) $f_0|_{S_T^1} = 0$, $f_1|_{S_T^1} = 0$, $f_2|_{S_T^1} = 0$, $q_3^*|_{\Gamma_1} = 0$.
Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1) – (3).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (A), (C), (H), (L), (F), (U), (S). Тоді задача (1) – (3) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Доведення обидвох теорем проводиться за схемами доведення теорем 1, 2 із [14].

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 1 та* $u_{0,x_i} \in L^2(G)$, $i = 1, \ldots, n$. *Тоді узагальнений розв'язок задачі (1) – (3) належить до простору* $u^* \in V_3(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$, $u_t^* \in L^2(Q_T)$, *справджується умова (2) та для всіх функцій* $v \in V_1(Q_T)$ *виконується рівність*

$$\int_{Q_T} \left[u_t^* v + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(y) u_{y_i}^* v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i}^* v_{x_i} + c(x,y,t) u^* v + g(x,y,t,u^*) v \right] dx\, dy\, dt =$$

$$= \int_{Q_T} [f_1(x,y,t) q_1^*(x) + f_2(x,y,t) q_2^*(t) + f_3(x,y,t) q_3^*(y) + f_0(x,y,t)] v\, dx\, dy\, dt. \qquad (8)$$

Доведення. При доведенні теореми 1 використано метод Фаедо – Гальоркіна [14]: нехай $\{\varphi^k\}_{k=1}^\infty$ — ортогональна база простору $W_0^{1,2}(\Omega)$, ортонормована в $L^2(\Omega)$, де φ^k — власні функції задачі

$$\Delta_x u = \nu u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

які відповідають власним значенням ν_k; $\{\psi^m\}_{m=1}^\infty$ — ортогональна база простору $H_{1,0}^1(D) := \{v : v \in W^{1,2}(D), v|_{\Gamma_1} = 0\}$, ортонормована в $L^2(D)$, де ψ^m, $m \ge 1$, — власні функції задачі

$$\Delta_y u = \mu u, \quad u|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial v}\right|_{\Gamma_2} = 0, \qquad (9)$$

які відповідають власним значенням μ_m. Тут $\Delta_x = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$; $\Delta_y = \dfrac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial y_l^2}$.

Нехай $u^{*,N}(x,y,t) = \sum_{k,m=1}^{N} c_{k,m}^N(t)\varphi^k(x)\psi^m(y)$, $N \in \mathbb{N}$, де $c_{k,m}^N(t)$, $k,m = 1,\ldots,N$, — розв'язки задачі

$$\int\limits_G \Bigg[u_t^{*,N}\varphi^k(x)\psi^m(y) + \sum_{i=1}^{l}\lambda_i(y)u_{y_i}^{*,N}\varphi^k(x)\psi^m(y) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}^{*,N}\varphi_{x_i}^k(x)\psi^m(y) +$$

$$+ c(x,y,t)u^{*,N}\varphi^k(x)\psi^m(y) + g(x,y,t,u^{*,N})\varphi^k(x)\psi^m(y) - (f_1(x,y,t)q_1^*(x) +$$

$$+ f_2(x,y,t)q_2^*(t) + f_3(x,y,t)q_3^*(y) + f_0(x,y,t))\varphi^k(x)\psi^m(y)\Bigg] dx\,dy = 0, \qquad (10)$$

$$c_{k,m}^N(0) = u_{0,k,m}^N, \quad u_0^N(x,y) = \sum_{k,m=1}^{N} u_{0,k,m}^N\varphi^k(x)\psi^m(y), \quad \lim_{N\to\infty}\|u_0^N - u_0; V_0(G)\| = 0. \qquad (11)$$

При доведенні теореми 1 [14] встановлено, що розв'язок цієї задачі існує і належить до простору $C^1([0,T])$.

Для наближень $u^{*,N}$ встановлено такі оцінки (аналогічним чином, як (13) та (16) у [14]):

$$\int\limits_{G_\tau} |u^{*,N}|^2 dx\,dy \le M\Bigg(\int\limits_{Q_T} (|f_1(x,y,t)|^2|q_1^*(x)|^2 + |f_2(x,y,t)|^2|q_2^*(t)|^2 + |f_3(x,y,t)|^2|q_3^*(y)|^2 +$$

$$+ |f_0(x,y,t)|^2)\,dxdydt + \int\limits_G |u_0(x,y)|^2\,dxdy\Bigg), \quad \tau \in [0,T], \qquad (12)$$

$$\int\limits_{G_\tau} \sum_{i=1}^{l} |u_{y_i}^{*,N}|^2 dx\,dy \le M\Bigg(\int\limits_{Q_T} \Bigg(|f_1(x,y,t)|^2|q_1^*(x)|^2 + |f_2(x,y,t)|^2|q_2^*(t)|^2 + |f_3(x,y,t)|^2|q_3^*(y)|^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} |f_{1y_i}(x,y,t)|^2|q_1^*(x)|^2 + \sum_{i=1}^{l} |f_{2y_i}(x,y,t)|^2|q_2^*(t)|^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} |f_{3y_i}(x,y,t)|^2|q_3^*(y)|^2 + |f_0(x,y,t)|^2 + \sum_{i=1}^{l} |f_{0y_i}(x,y,t)|^2\Bigg) dxdydt +$$

$$+ \int\limits_G \left(|u_0(x,y)|^2 + \sum_{i=1}^{l} |u_{0y_i}(x,y)|^2 \, dxdy \right) \Bigg) +$$

$$+ M_0 \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{l} |f_3(x,y,t)|^2 |q^*_{3y_i}(y)|^2 \, dxdydt, \quad \tau \in [0,T], \tag{13}$$

де стала M не залежить від N, $\lambda^1 = \max_i \operatorname{esssup}_D |\lambda_{iy_i}(y)|$, а $M_0 = \dfrac{4}{\lambda^1 + 2c_0 - 2g^1}$, якщо $\lambda^1 + 2c_0 - 2g^1 > 0$, і $M_0 = 4T^2 e^{-(\lambda^1+2c_0-2g^1)T+1}$, якщо $\lambda^1 + 2c_0 - 2g^1 < 0$.

Встановимо оцінку для $\|u_t^{*,N}; L^2(Q_T)\|$. Домножимо (10) на $(c^N_{k,m}(t))'$, підсумуємо по k і m від 1 до N та зінтегруємо по t від 0 до τ, $\tau \in (0,T]$. В результаті отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg[|u_t^{*,N}|^2 + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(y) u^{*,N}_{y_i} u^{*,N}_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u^{*,N}_{x_i} u^{*,N}_{x_i t} + c(x,y,t) u^{*,N} u^{*,N}_t + g(x,y,t,u^{*,N}) u^{*,N}_t -$$

$$-(f_1(x,y,t)q_1^*(x) + f_2(x,y,t)q_2^*(t) + f_3(x,y,t)q_3^*(y) + f_0(x,y,t)) u^{*,N}_t \Bigg] \, dx\, dy\, dt = 0. \tag{14}$$

Позначимо $\lambda^0 = \max_i \operatorname{esssup}_D |\lambda_i(y)|^2$, $a^0 = \max_{ij} \operatorname{esssup}_\Omega |a_{ij}(x)|^2$, $c^0 = \operatorname{esssup}_{Q_T} |c(x,y,t)|^2$. Перетворимо та оцінимо кожний доданок рівності (14) окремо, врахувавши умови теореми:

$$\mathcal{I}_1 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(y) u^{*,N}_{y_i} u^{*,N}_t \, dx\, dy\, dt \le \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[4l\lambda^0 \sum_{i=1}^{l} |u^{*,N}_{y_i}|^2 + \frac{1}{4} |u^{*,N}_t|^2 \right] dx\, dy\, dt,$$

$$\mathcal{I}_2 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u^{*,N}_{x_i} u^{*,N}_{x_j t} \, dx\, dy\, dt \ge \frac{a_0}{2} \int\limits_{G_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u^{*,N}_{x_i}|^2 \, dxdy - \frac{na^0}{2} \int\limits_{G} \sum_{i=1}^{n} |u^{*,N}_{0,x_i}|^2 \, dxdy,$$

$$\mathcal{I}_3 := \int\limits_{Q_\tau} c(x,y,t) u^{*,N} u^{*,N}_t \, dx\, dy\, dt \le \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[4c^0 |u^{*,N}|^2 + \frac{1}{4} |u^{*,N}_t|^2 \right] dx\, dy\, dt,$$

$$\mathcal{I}_4 := \int\limits_{Q_\tau} g(x,y,t,u^{*,N}) u^{*,N}_t \, dx\, dy\, dt \le \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[8L^2 |u^{*,N}|^2 + 8|g(x,y,t,0)|^2 + \frac{1}{4} |u^{*,N}_t|^2 \right] dx\, dy\, dt,$$

$$\mathcal{I}_5 := \int\limits_{Q_\tau} \left(f_1(x,y,t)q_1^*(x) + f_2(x,y,t)q_2^*(t) + f_3(x,y,t)q_3^*(y) + f_0(x,y,t) \right) u^{*,N}_t \, dx\, dy\, dt \le$$

$$\le \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[\frac{1}{4} |u^{*,N}|^2 + 16(f_1(x,y,t)q_1^*(x))^2 + 16(f_2(x,y,t)q_2^*(t))^2 +$$

$$+ 16(f_3(x,y,t)q_3^*(y))^2 + 16(f_0(x,y,t))^2 \Bigg] \, dx\, dy\, dt.$$

На підставі оцінок $\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_5$ з (14) одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau} |u_t^{*,N}|^2 dx\, dy\, dt + a_0 \int\limits_{G_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^{*,N}|^2\, dx\, dy \le \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[4l\lambda^0 \sum_{i=1}^{l} |u_{y_i}^{*,N}|^2 + (4c^0 + 8L^2)|u^{*,N}|^2 +$$

$$+ 8|g(x,y,t,0)|^2 + 16(f_1(x,y,t)q_1^*(x))^2 + 16(f_2(x,y,t)q_2^*(t))^2 +$$

$$+ 16(f_3(x,y,t)q_3^*(y))^2 + 16(f_0(x,y,t))^2)\Bigg] dx\, dy\, dt + na^0 \int\limits_{G} \sum_{i=1}^{n} |u_{0,x_i}^{*,N}|^2 dxdy. \qquad (15)$$

Врахувавши (11) – (13) і (15), отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau} |u_t^{*,N}|^2 dx\, dy\, dt \le C_0, \qquad (16)$$

де стала C_0 не залежить від N. Звідси та з (12), (13), (16) випливає існування такої підпослідовності послідовності $\{u^{*,N}\}_{N=1}^{\infty}$ (за якою збережемо те саме позначення), що при $N \to \infty$

$$u^{*,N} \to u^* \quad \text{слабко в} \quad V_3(Q_T),$$

$$u_t^{*,N} \to u_t^* \quad \text{слабко в} \quad L^2(Q_T).$$

Із отриманих збіжностей та (10) випливає, що $u_t^* \in L^2(Q_T)$ та для всіх функцій $v \in V_1(Q_T)$ виконується рівність (8).

Теорему 3 доведено.

Лема 1. *Якщо $u^* \in V_3(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$, $u_t^* \in L^2(Q_T)$, справджується умова (2) та для всіх функцій $v \in V_1(Q_T)$ виконується рівність (8), то функція u^* є розв'язком майже скрізь задачі (1) – (3).*

Доведення. Із (8) випливає, що виконується рівність

$$\int\limits_{\Omega} \Bigg[u_t^* v_1 + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(y) u_{y_i}^* v_1 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i}^* v_{1,x_i} + c(x,y,t)u^* v_1 + g(x,y,t,u^*)v_1 \Bigg]\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} [f_1(x,y,t)q_1^*(x) + f_2(x,y,t)q_2^*(t) + f_3(x,y,t)q_3^*(y) + f_0(x,y,t)] v_1\, dx \qquad (17)$$

для майже всіх $(y,t) \in \Pi_1$ та довільної функції $v_1 \in W_0^{1,2}(\Omega)$. З (17) випливає, що функція u^* є узагальненим розв'язком задачі Діріхле для еліптичного рівняння

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) u_{x_i}^*)_{x_j} = F(x,y,t),\ x \in \Omega, \quad u|_{\Omega} = 0, \qquad (18)$$

де $F(x,y,t) = f_1(x,y,t)q_1^*(x)+f_2(x,y,t)q_2^*(t)+f_3(x,y,t)q_3^*(y)+f_0(x,y,t)-u_t^*-\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(y)u_{y_i}^*-$ $-c(x,y,t)u^*-g(x,y,t,u^*)$. Оскільки виконується умова (2), а функція $F(x,y,t)$ належить $L^2(\Omega)$ для майже всіх $(y,t)\in\Pi_1$, то існує єдиний узагальний розв'язок задачі (18) — функція u^*. Тоді з теореми 7.3 [16] та умови $\partial\Omega\in C^2$ випливає, що $u^*_{x_ix_j}(\cdot,y,t)$ належить $L^2(\Omega)$. Отже, $u^*(\cdot,y,t)$ належить $W_0^{2,2}(\Omega)$. Використовуючи схему [16, с. 219], доводимо, що функція $u^*(x,y,t)$ є розв'язком майже скрізь задачі (1) – (3).

Лему 1 доведено.

5. Існування та єдиність розв'язку оберненої задачі.

Означення 2. *Четвірку функцій* $(u(x,y,t),q_1(x),q_2(t),q_3(y))$ *назвемо узагальненим розв'язком задачі (1) – (6), якщо* $u\in V_3(Q_T)\cap C([0,T];L^2(G))$, $u_t\in L^2(Q_T)$, $q_1\in L^2(\Omega)$, $q_2\in L^2(0,T), q_3\in W^{1,2}(D), q_3|_{\Gamma_1}=0$, *причому ці функції для всіх* $v\in V_1(Q_T)$ *задовольняють інтегральну рівність*

$$\int\limits_{Q_T}\left[u_tv+\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(y)u_{y_i}v+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j}+c(x,y,t)uv+g(x,y,t,u)v\right]dx\,dy\,dt=$$

$$=\int\limits_{Q_T}(f_1(x,y,t)q_1(x)+f_2(x,y,t)q_2(t)+f_3(x,y,t)q_3(y)+f_0(x,y,t))v\,dx\,dy\,dt \tag{19}$$

і, крім того, функція $u(x,y,t)$ *задовольняє умови (2) та (4) – (6).*

Позначимо

$$K_{11}(x):=\int\limits_{\Pi_1}K_1(y,t)f_1(x,y,t)dydt,$$

$$K_{22}(t):=\int\limits_{G_t}K_2(x,y)f_2(x,y,t)dxdy,$$

$$K_{33}(y):=\int\limits_{\Pi_2}K_3(x,t)f_3(x,y,t)dxdt,$$

$$A_1(x):=-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)E_{1x_i}(x))_{x_j}-\int\limits_{\Pi_1}K_1(y,t)f_0(x,y,t)dydt,$$

$$A_2(t):=E_2'(t)-\int\limits_{G_t}K_2(x,y)f_0(x,y,t)dxdy,$$

$$A_3(y):=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(y)E_{3y_i}(y)-\int\limits_{\Pi_2}K_3(x,t)f_0(x,y,t)dxdt,$$

$$B_1(x,y,t) := -\sum_{i=1}^{l}(\lambda_i(y)K_1(y,t))_{y_i} - K_{1t}(y,t) + K_1(y,t)c(x,y,t),$$

$$B_2(x,y,t) := -\sum_{i=1}^{l}(\lambda_i(y)K_2(x,y))_{y_i} + K_2(x,y)c(x,y,t),$$

$$B_3(x,y,t) := -K_{3t}(x,t) + K_3(x,t)c(x,y,t) - \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)K_{3x_j}(x,t))_{x_i},$$

$$F_{12}(x,y,t) := K_1(y,t)f_2(x,y,t), \quad F_{13}(x,y,t) := K_1(y,t)f_3(x,y,t),$$

$$F_{21}(x,y,t) := K_2(x,y)f_1(x,y,t), \quad F_{23}(x,y,t) := K_2(x,y)f_3(x,y,t),$$

$$F_{31}(x,y,t) := K_3(x,t)f_1(x,y,t), \quad F_{32}(x,y,t) := K_3(x,y)f_2(x,y,t).$$

Зауважимо, що з умов (4) та (6) випливають рівності

$$\int\limits_{\Pi_1} K_1(y,t)\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}dydt = \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)E_{1x_i}(x))_{x_j}, \tag{20}$$

$$\int\limits_{\Pi_2} K_3(x,y)\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(y)u_{y_i}dxdt = \sum_{i=1}^{l}\lambda_i(y)E_{3y_i}(y). \tag{21}$$

Із (19) та леми 1 випливає, що четвірка функцій $(u^*(x,y,t), q_1^*(x), q_2^*(t), q_3^*(y))$ задовольняє рівняння (1) для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$. Тому з (4) – (6), (19) – (21) отримуємо, що узагальнений розв'язок задачі (1) – (6) задовольняє систему рівнянь

$$K_{11}(x)q_1(x) = A_1(x) + \int\limits_{\Pi_1} B_1(x,y,t)udydt + \int\limits_{\Pi_1} K_1(y,t)g(x,y,t,u)dydt -$$

$$-\int\limits_{\Pi_1} F_{12}(x,y,t)q_2(t)dydt - \int\limits_{\Pi_1} F_{13}(x,y,t)q_3(y)dydt, \tag{22}$$

$$K_{22}(t)q_2(t) =$$

$$= A_2(t) + \int\limits_{G_t}\left(B_2(x,y,t)u + \sum_{i,j=1}^{n}K_{2x_j}(x,y)a_{ij}(x)u_{x_i} + K_2(x,y)g(x,y,t,u)\right)dxdy -$$

$$-\int\limits_{G_t} F_{21}(x,y,t)q_1(x)dxdy - \int\limits_{G_t} F_{23}(x,y,t)q_3(y)dxdy, \tag{23}$$

$$K_{33}(y)q_3(y) = A_3(y) + \int\limits_{\Pi_2} B_3(x,y,t)u\,dxdt + \int\limits_{\Pi_2} K_3(x,t)g(x,y,t,u)dxdt -$$

$$- \int\limits_{\Pi_2} F_{31}(x,y,t)q_1(x)dxdt - \int\limits_{\Pi_2} F_{32}(x,y,t)q_2(t)dxdt, \tag{24}$$

причому рівняння (22) виконується для майже всіх $x \in \Omega$, рівняння (23) — для майже всіх $t \in [0,T]$, а рівняння (24) — для майже всіх $y \in D$. Спосіб отримання рівнянь (22)–(24) наведено в ході доведення наступної леми.

Лема 2. *Нехай виконуються умови теореми 3 та умови (K$_1$), (K$_2$), (K$_3$), (E),* $f_{3y_k} \in C(D; L^2(\Pi_2))$, $k = 1, \ldots, l$. *Для того щоб четвірка функцій* $(u(x,y,t), q_1(x), q_2(t), q_3(y))$, *де* $u \in V_3(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$, $u_t \in L^2(Q_T)$, $q_1 \in L^2(\Omega)$, $q_2 \in L^2(0,T)$, $q_3 \in W^{1,2}(D)$, $q_3|_{\Gamma_1} = 0$, *була узагальненим розв'язком задачі (1)–(6), необхідно і достатньо, щоб ця четвірка задовольняла рівність (19) для всіх* $v \in V_1(Q_T)$, *а також (2), (22)–(24).*

Доведення. *Необхідність.* Нехай $(u^*(x,y,t), q_1^*(x), q_2^*(t), q_3^*(y))$ — узагальнений розв'язок задачі (1)–(6). Тоді згідно з лемою 1 він задовольняє рівняння (1) майже для всіх $(x,y,t) \in Q_T$. Помножимо (1) на $K_1(y,t)$ та зінтегруємо по Π_1 :

$$\int\limits_{\Pi_1} K_1(y,t) \left(u_t^* + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(y) u_{y_i}^* - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) u_{x_i}^*)_{x_j} + c(x,y,t)u^* + g(x,y,t,u^*) \right) dydt =$$

$$= q_1^*(x)K_{11}(x) + \int\limits_{\Pi_1} F_{12}(x,y,t)q_2^*(t)dydt + \int\limits_{\Pi_1} F_{13}(x,y,t)q_3^*(y)dydt +$$

$$+ \int\limits_{\Pi_1} K_1(y,t)f_0(x,y,t)dydt \tag{25}$$

для майже всіх $x \in \Omega$. Зінтегруємо частинами в (25), врахувавши умову (K$_1$) і (20) :

$$\int\limits_{\Pi_1} (B_1(x,y,t)u^* + K_1(y,t)g(x,y,t,u^*))\,dy\,dt + A_1(x) =$$

$$= q_1^*(x)K_{11}(x) + \int\limits_{\Pi_1} F_{12}(x,y,t)q_2^*(t)dydt + \int\limits_{\Pi_1} F_{13}(x,y,t)q_3^*(y)dydt. \tag{26}$$

З (26) випливає, що четвірка функцій $(u^*(x,y,t), q_1^*(x), q_2^*(t), q_3^*(y))$ задовольняє (22). Здиференціюємо умову (5) один раз по t:

$$\int\limits_{G_t} K_2(x,y)u_t^*(x,y,t)dxdy = E_2'(t), \quad t \in [0,T]. \tag{27}$$

На підставі (1) і (27) отримуємо

$$\int\limits_{G_t} K_2(x,y)\Bigg(f_1(x,y,t)q_1^*(x)+f_2(x,y,t)q_2^*(t)+f_3(x,y,t)q_3^*(y)+f_0(x,y,t)-\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(y)u_{y_i}^*+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i}^*)_{x_j}-c(x,y,t)u^*-g(x,y,t,u^*)\Bigg)dxdy=E_2'(t) \tag{28}$$

для майже всіх $t\in[0,T]$. Зінтегруємо частинами в (28), врахувавши умову (K_2):

$$\int\limits_{G_t}\Bigg(F_{21}(x,y,t)q_1^*(x)+K_2(x,y)f_2(x,y,t)q_2^*(t)+F_{23}(x,y,t)q_3^*(y)+K_2(x,y)f_0(x,y,t)+$$

$$+B_2(x,y,t)u^*-\sum_{i,j=1}^{n}K_{2x_j}(x,y)a_{ij}(x)u_{x_i}^*-K_2(x,y)g(x,y,t,u^*)\Bigg)dxdy=E_2'(t). \tag{29}$$

З (29) випливає, що $(u^*(x,y,t),q_1^*(x),q_2^*(t),q_3^*(y))$ задовольняє рівність (23).

Помножимо (1) на $K_3(x,t)$ та зінтегруємо по Π_2:

$$\int\limits_{\Pi_2}K_3(x,t)\left(u_t^*+\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(y)u_{y_i}^*-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i}^*)_{x_j}+c(x,y,t)u^*+g(x,y,t,u^*)\right)dxdt=$$

$$=\int\limits_{\Pi_2}\left[F_{31}(x,y,t)q_1^*(x)+F_{32}(x,y,t)q_2^*(t)+K_3(x,t)f_0(x,y,t)\right]dxdt+K_{33}(y)q_3^*(y) \tag{30}$$

для майже всіх $y\in D$. Зінтегруємо частинами в (30), врахувавши умову (K_3) і (21):

$$\int\limits_{\Pi_2}[B_3(x,y,t)u^*+K_3(x,t)g(x,y,t,u^*)]dxdt+A_3(y)=$$

$$=\int\limits_{\Pi_2}F_{31}(x,y,t)q_1^*(x)dxdt+\int\limits_{\Pi_2}F_{32}(x,y,t)q_2^*(t)dxdt+K_{33}(y)q_3^*(y). \tag{31}$$

З (31) випливає, що четвірка функцій $(u^*(x,y,t),q_1^*(x),q_2^*(t),q_3^*(y))$ задовольняє (24). Крім того, u^* задовольняє умову (2), а також рівність (19) для всіх $v\in V_1(Q_T)$ при $q_1(x)=q_1^*(x)$, $q_2(t)=q_2^*(t)$, $q_3(y)=q_3^*(y)$.

Достатність. Нехай $q_1^*\in L^2(\Omega)$, $q_2^*\in L^2(0,T)$, $q_3^*\in W^{1,2}(D)$, $q_3^*|_{\Gamma_1}=0$, $u^*\in$ $\in V_3(Q_T)\cap C([0,T];L^2(G))$, $u_t^*\in L^2(Q_T)$ і для них виконуються (2), (22) – (24) та (19) для всіх $v\in V_1(Q_T)$. Тоді u^* — узагальнений розв'язок задачі (1) – (3) з правою частиною $f_1(x,y,t)q_1^*(x)+f_2(x,y,t)q_2^*(t)+f_3(x,y,t)q_3^*(y)+f_0(x,y,t)$ в рівнянні (1). За умов леми цей розв'язок існує та єдиний.

Покладемо $E_1^*(x) = \int_{\Pi_1} K_1(y,t)u^*(x,y,t)\,dydt$, $x \in \Omega$, $E_2^*(t) = \int_{G_t} K_2(x,y)u^*(x,y,t)dxdy$, $t \in [0,T]$, $E_3^*(y) = \int_{\Pi_2} K_3(x,t)u^*(x,y,t)dxdt$, $y \in D$.

Так само, як і при доведенні необхідності, знаходимо

$$K_{11}(x)q_1^*(x) = -\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)E_{1x_i}^*(x))_{x_j} + \int\limits_{\Pi_1}\bigg(- K_1(y,t)f_0(x,y,t) - F_{12}(x,y,t)q_2^*(t) -$$

$$- F_{13}(x,y,t)q_3^*(y) + B_1(x,y,t)u^* + K_1(y,t)g(x,y,t,u^*)\bigg)dydt, \tag{32}$$

$$K_{22}(t)q_2^*(t) = (E_2^*(t))' + \int\limits_{G_t}\bigg(- K_2(x,y)f_0(x,y,t) - F_{21}(x,y,t)q_1^*(x) - F_{23}(x,y,t)q_3^*(y) +$$

$$+ B_2(x,y,t)u^* + \sum_{i,j=1}^{n} K_{2x_j}(x,y)a_{ij}(x)u_{x_i}^* + K_2(x,y)g(x,y,t,u^*)\bigg)\,dxdy, \tag{33}$$

$$K_{33}(y)q_3^*(y) = \sum_{i=1}^{l}\lambda_i(y)E_{3y_i}^*(y) + \int\limits_{\Pi_2}\bigg(- K_3(x,t)f_0(x,y,t) - F_{31}(x,y,t)q_1^*(x) -$$

$$- F_{32}(x,y,t)q_2^*(t) + B_3(x,y,t)u^* + K_3(x,t)g(x,y,t,u^*)\bigg)dxdt. \tag{34}$$

З іншого боку, $q_1^*(x)$, $q_2^*(t)$, $q_3^*(y)$ та $u^*(x,y,t)$ задовольняють рівності

$$K_{11}(x)q_1^*(x) = -\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)E_{1x_i}(x))_{x_j} + \int\limits_{\Pi_1}\bigg(- K_1(y,t)f_0(x,y,t) - F_{12}(x,y,t)q_2^*(t) -$$

$$- F_{13}(x,y,t)q_3^*(y) + B_1(x,y,t)u^* + K_1(y,t)g(x,y,t,u^*)\bigg)dydt, \tag{35}$$

$$K_{22}(t)q_2^*(t) = (E_2(t))' + \int\limits_{G_t}\bigg(- K_2(x,y)f_0(x,y,t) - F_{21}(x,y,t)q_1^*(x) - F_{23}(x,y,t)q_3^*(y) +$$

$$+ B_2(x,y,t)u^* + \sum_{i,j=1}^{n} K_{2x_j}(x,y)a_{ij}(x)u_{x_i}^* + K_2(x,y)g(x,y,t,u^*)\bigg)\,dxdy, \tag{36}$$

$$K_{33}(y)q_3^*(y) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(y) E_{3y_i}(y) + \int\limits_{\Pi_2} \Bigg(- K_3(x,t) f_0(x,y,t) - F_{31}(x,y,t) q_1^*(x) -$$

$$- F_{32}(x,y,t) q_2^*(t) + B_3(x,y,t) u^* + K_3(x,t) g(x,y,t,u^*) \Bigg) dxdt. \qquad (37)$$

Із (32) – (37) випливає

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) E_{1x_i}^*(x))_{x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) E_{1x_i}(x))_{x_j}, \quad x \in \Omega, \qquad (38)$$

$$(E_2^*(t))' = E_2'(t), \quad t \in [0,T], \qquad (39)$$

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i(y) E_{3y_i}^*(y) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(y) E_{3y_i}(y), \quad y \in D. \qquad (40)$$

Оскільки $u^*(x,y,t)$ справджує умову (3), то з (38) знаходимо $E_1^*(x) = E_1(x) = 0,\ x \in \partial\Omega$. Тому $E_1^*(x) = E_1(x),\ x \in \Omega$. Зінтегрувавши рівність (39), отримаємо

$$E_2^*(t) - E_2^*(0) = E_2(t) - E_2(0), \quad t \in [0,T].$$

Крім того, з (5) випливає, що $E_2(0) = \int_G K_2(x,y) u_0(x,y) dxdy$. Отже, $E_2^*(0) = E_2(0)$. Тому $E_2^*(t) = E_2(t),\ t \in [0,T]$. З рівності (40) та умови (3) отримуємо $E_3^*(y) = E_3(y)$, а отже, для $u^*(x,y,t)$ виконуються умови перевизначення (4) – (6).

Лему 2 доведено.

Позначимо

$$C_1 := \frac{2\,\mathrm{mes}\, D}{\inf\limits_{[0,T]} |K_{22}(t)|^2} \int\limits_{Q_T} (F_{21}(x,y,t))^2 dxdydt + \frac{2T}{\inf\limits_{D} |K_{33}(y)|^2} \int\limits_{Q_T} (F_{31}(x,y,t))^2\, dxdydt,$$

$$C_2 := \frac{2\,\mathrm{mes}\, D}{\inf\limits_{\Omega} |K_{11}(x)|^2} \int\limits_{Q_T} (F_{12}(x,y,t))^2 dxdydt + \frac{2\,\mathrm{mes}\,\Omega}{\inf\limits_{D} |K_{33}(y)|^2} \int\limits_{Q_T} (F_{32}(x,y,t))^2 dxdydt,$$

$$C_3 := \frac{2T}{\inf\limits_{\Omega} |K_{11}(x)|^2} \int\limits_{Q_T} (F_{13}(x,y,t))^2 dxdydt + \frac{2\,\mathrm{mes}\,\Omega}{\inf\limits_{[0,T]} |K_{22}(t)|^2} \int\limits_{Q_T} (F_{23}(x,y,t))^2 dxdydt,$$

$$C_4 := \max\{C_1, C_2, C_3\}.$$

Лема 3. *Нехай* $C_4 < 1$ *і* $A_3(y)|_{\Gamma_1} = 0$, *виконуються умови (A), (C), (L), (U), (H), (E), (K*$_1$*) – (K*$_3$*), (F) та* $a_{ijx_i} \in L^\infty(\Omega)$, $c_{y_k} \in L^\infty(Q_T)$, $f_{sy_k} \in L^2(Q_T)$, $s = 0,1,2$, $f_{3y_k} \in C(D; L^2(\Pi_2))$, $i,j = 1,\ldots,n$, $k = 1,\ldots,l$, $f_s|_{S_T^1} = 0$, $s = 0,1,2$, *і, крім того,* $K_{11}(x) \neq 0$

для всіх $x \in \Omega$, $K_{22}(t) \neq 0$ *для всіх* $t \in (0,T)$, $K_{33}(y) \neq 0$ *для всіх* $y \in D$. *Тоді при фіксованому* $u^* \in V_3(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$ *система рівнянь (22)–(24) має єдиний розв'язок* $(q_1(x), q_2(t), q_3(y))$, *де* $q_1 \in L^2(\Omega), q_2 \in L^2(0,T), q_3 \in W^{1,2}(D), q_3|_{\Gamma_1} = 0$.

Доведення. *Існування розв'язку.* Використаємо метод послідовних наближень. Побудуємо наближення $(q_1^m(x), q_2^m(t), q_3^m(y))$ розв'язку системи рівнянь (22)–(24), де функції $q_1^m(x), q_2^m(t), q_3^m(y)$, $m \in \mathbb{N}$, визначаються так, що вони задовольняють систему рівностей

$$q_1^1(x) := 0, \quad q_2^1(t) := 0, \quad q_3^1(y) := 0,$$

$$q_1^m(x) = \frac{1}{K_{11}(x)} \Bigg[A_1(x) + \int\limits_{\Pi_1} \Big(B_1(x,y,t)u^* + K_1(y,t)g(x,y,t,u^*) -$$

$$- F_{12}(x,y,t)q_2^{m-1}(t) - F_{13}(x,y,t)q_3^{m-1}(y)\Big)dydt\Bigg], \quad x \in \Omega, \quad m \geq 2, \tag{41}$$

$$q_2^m(t) = \frac{1}{K_{22}(t)} \Bigg[A_2(t) + \int\limits_{G_t} \Bigg(B_2(x,y,t)u^* + \sum_{i,j=1}^{n} K_{2x_j}(x,y)a_{ij}(x)u^*_{x_i} + K_2(x,y)g(x,y,t,u^*) -$$

$$- F_{21}(x,y,t)q_1^{m-1}(x) - F_{23}(x,y,t)q_3^{m-1}(y)\Bigg)dxdy\Bigg], \quad t \in [0,T], \quad m \geq 2, \tag{42}$$

$$q_3^m(y) = \frac{1}{K_{33}(y)} \Bigg[A_3(y) + \int\limits_{\Pi_2} \Bigg(B_3(x,y,t)u^* + K_3(x,t)g(x,y,t,u^*) -$$

$$- F_{31}(x,y,t)q_1^{m-1}(x) - F_{32}(x,y,t)q_2^{m-1}(t)\Bigg)dxdt\Bigg], \quad y \in D, \quad m \geq 2. \tag{43}$$

Із (41)–(43) видно, що $q_1^m \in L^2(\Omega)$, $q_2^m \in L^2(0,T)$, $q_3^m \in W^{1,2}(D)$, $m \geq 2$, $q_3^m|_{\Gamma_1} = 0$.

Покажемо, що послідовності $\{q_1^m(x)\}_{m=1}^\infty$, $\{q_2^m(t)\}_{m=1}^\infty$, $\{q_3^m(y)\}_{m=1}^\infty$ є фундаментальними в $L^2(\Omega)$, $L^2(0,T)$, $L^2(D)$ відповідно та збігаються до розв'язку системи рівнянь (22)–(24). Позначимо

$$\tilde{q}_1^m(x) = q_1^m(x) - q_1^{m-1}(x), \quad \tilde{q}_2^m(t) = q_2^m(t) - q_2^{m-1}(t), \quad \tilde{q}_3^m(y) = q_3^m(y) - q_3^{m-1}(y), \quad m \geq 2.$$

Оцінимо значення $|\tilde{q}_1^m(x)|$, $|\tilde{q}_2^m(t)|$, $|\tilde{q}_3^m(y)|$, $|\tilde{q}_{3y_i}^m(y)|$, $m \geq 3$. На підставі (41)–(43) отримуємо

$$\tilde{q}_1^m(x) = -\frac{1}{K_{11}(x)} \int\limits_{\Pi_1} \left[F_{12}(x,y,t)\tilde{q}_2^{m-1}(t) + F_{13}(x,y,t)\tilde{q}_3^{m-1}(y)\right] dydt, \quad x \in \Omega, \quad m \geq 3, \tag{44}$$

$$\tilde{q}_2^m(t) = -\frac{1}{K_{22}(t)} \int\limits_{G_t} \left[F_{21}(x,y,t)\tilde{q}_1^{m-1}(x) + F_{23}(x,y,t)\tilde{q}_3^{m-1}(y)\right] dxdy, \;\; t \in [0,T], \;\; m \geq 3, \quad (45)$$

$$\tilde{q}_3^m(y) = -\frac{1}{K_{33}(y)} \int\limits_{\Pi_2} \left[F_{31}(x,y,t)\tilde{q}_1^{m-1}(x) + F_{32}(x,y,t)\tilde{q}_2^{m-1}(t)\right] dxdt, \;\; y \in D, \;\; m \geq 3. \quad (46)$$

Піднесемо обидві частини (44) – (46) до квадрата і зінтегруємо їх по x, t, y відповідно. Тоді, використавши нерівність Гельдера, одержимо

$$\int\limits_{\Omega} |\tilde{q}_1^m(x)|^2 \, dx \leq \frac{2}{\inf\limits_{\Omega} |K_{11}(x)|^2} \Bigg[\operatorname{mes} D \int\limits_{Q_T} (F_{12}(x,y,t))^2 \, dxdydt \int\limits_0^T |\tilde{q}_2^{m-1}(t)^2 dt +$$

$$+ T \int\limits_{Q_T} (F_{13}(x,y,t))^2 dxdydt \int\limits_D |\tilde{q}_3^{m-1}(y)|^2 dy\Bigg], \quad m \geq 3, \quad (47)$$

$$\int\limits_0^T |\tilde{q}_2^m(t)|^2 \, dt \leq \frac{2}{\inf\limits_{[0,T]} |K_{22}(t)|^2} \Bigg[\operatorname{mes} D \int\limits_{Q_T} (F_{21}(x,y,t))^2 dxdydt \int\limits_{\Omega} |\tilde{q}_1^{m-1}(x)|^2 dx +$$

$$+ \operatorname{mes} \Omega \int\limits_{Q_T} (F_{23}(x,y,t))^2 dxdydt \int\limits_D |\tilde{q}_3^{m-1}(y)|^2 dy\Bigg], \quad m \geq 3, \quad (48)$$

$$\int\limits_D |\tilde{q}_3^m(y)|^2 \, dy \leq \frac{2}{\inf\limits_{D} |K_{33}(y)|^2} \Bigg[T \int\limits_{Q_T} (F_{31}(x,y,t))^2 dxdydt \int\limits_{\Omega} |\tilde{q}_1^{m-1}(x)|^2 dx +$$

$$+ \operatorname{mes} \Omega \int\limits_{Q_T} (F_{32}(x,y,t))^2 \, dxdydt \int\limits_0^T |\tilde{q}_2^{m-1}(t)|^2 dt\Bigg], \quad m \geq 3. \quad (49)$$

Додавши нерівності (47) – (49), отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} |\tilde{q}_1^m(x)|^2 dx + \int\limits_0^T |\tilde{q}_2^m(t)|^2 \, dt + \int\limits_D |\tilde{q}_3^m(y)|^2 dy \leq$$

$$\leq C_4 \left[\int\limits_{\Omega} |\tilde{q}_1^{m-1}(x)|^2 dx + \int\limits_0^T |\tilde{q}_2^{m-1}(t)|^2 dt + \int\limits_D |\tilde{q}_3^{m-1}(y)|^2 \, dy\right] \leq$$

$$\leq (C_4)^{m-2} \left[\int\limits_{\Omega} |\tilde{q}_1^2(x)|^2 \, dx + \int\limits_0^T |\tilde{q}_2^2(t)|^2 \, dt + \int\limits_D |\tilde{q}_3^2(y)|^2 \, dy\right], \quad m \geq 3. \quad (50)$$

Крім того, з (46) випливає, що

$$\tilde{q}^m_{3y_i}(y) = -\frac{1}{K_{33}(y)}\left[K_{33y_i}(y)\tilde{q}^m_3(y) + \int\limits_{\Pi_2} K_3(x,t) f_{1y_i}(x,y,t)\tilde{q}^{m-1}_1(x)dxdt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Pi_2} K_3(x,t) f_{2y_i}(x,y,t)\tilde{q}^{m-1}_2(t)dx\,dt\right], \quad y \in D, \quad i = 1,\ldots,l, \quad m \geq 3. \qquad (51)$$

З (51) та нерівності Гельдера отримуємо

$$\int\limits_D \sum_{i=1}^{l} |\tilde{q}^m_{3y_i}(y)|^2 dy \leq C_5 \left[\int\limits_D |\tilde{q}^m_3(y)|^2 dy + \int\limits_\Omega |\tilde{q}^{m-1}_1(x)|^2 dx + \int\limits_0^T |\tilde{q}^{m-1}_2(t)|^2 dt\right] \leq$$

$$\leq (C_4)^{m-3}(1 + C_4)C_5 \left[\int\limits_D |\tilde{q}^2_3(y)|^2 dy + \int\limits_\Omega |\tilde{q}^2_1(x)|^2 dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^T |\tilde{q}^2_2(t)|^2 dt\right], \quad y \in D, \quad m \geq 3, \qquad (52)$$

де $C_5 = \dfrac{3}{\inf_D |K_{33}(y)|^2}\ \max\Big\{\sum_{i=1}^l \sup_D |K_{33y_i}(y)|^2, T\int_{Q_T}\sum_{i=1}^l (K_3(x,t)f_{1y_i}(x,y,t))^2 dxdydt,$ $\operatorname{mes}\Omega\int_{Q_T}\sum_{i=1}^l (K_3(x,t)f_{2y_i}(x,y,t))^2 dxdydt\Big\}.$

Оскільки $|C_4| < 1$, то з (50) випливає, що для всіх k, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$ справджується оцінка

$$\int\limits_\Omega |q^{m+k}_1(x) - q^m_1(x)|^2\, dx + \int\limits_0^T |q^{m+k}_2(t) - q^m_2(t)|^2\, dt + \int\limits_D |q^{m+k}_3(y) - q^m_3(y)|^2\, dy \leq$$

$$\leq \sum_{i=m+1}^{m+k}\left[\int\limits_\Omega |\tilde{q}^i_1(x)|^2\, dx + \int\limits_0^T |\tilde{q}^i_2(t)|^2\, dt + \int\limits_D |\tilde{q}^i_3(y)|^2\, dy\right] \leq$$

$$\leq \sum_{i=m+1}^{m+k} (C_4)^{i-2}\left[\int\limits_\Omega |\tilde{q}^2_1(x)|^2\, dx + \int\limits_0^T |\tilde{q}^2_2(t)|^2\, dt + \int\limits_D |\tilde{q}^2_3(y)|^2\, dy\right] \leq$$

$$\leq \frac{(C_4)^{m-1}(1-(C_4)^k)}{1-C_4}\left[\int\limits_{\Omega}|\tilde{q}_1^2(x)|^2\,dx+\int\limits_0^T|\tilde{q}_2^2(t)|^2\,dt+\int\limits_D|\tilde{q}_3^2(y)|^2\,dy\right]\leq$$

$$\leq \frac{(C_4)^{m-1}}{1-C_4}\left[\int\limits_{\Omega}|\tilde{q}_1^2(x)|^2\,dx+\int\limits_0^T|\tilde{q}_2^2(t)|^2\,dt+\int\limits_D|\tilde{q}_3^2(y)|^2\,dy\right], \tag{53}$$

а врахувавши (52), отримаємо

$$\int\limits_D\sum_{i=1}^{l}|q_{3y_i}^{m+k}(y)-q_{3y_i}^{m}(y)|^2\,dy\leq\frac{(C_4)^{m-2}C_5(1+C_4)}{1-C_4}\times$$

$$\times\left[\int\limits_{\Omega}|\tilde{q}_1^2(x)|^2\,dx+\int\limits_0^T|\tilde{q}_2^2(t)^2\,dt+\int\limits_D|\tilde{q}_3^2(y)|^2\,dy\right],\quad m\geq 3. \tag{54}$$

Із (53) та (54) випливає, що для довільного $\varepsilon>0$ існує таке m_0, що для всіх $k,m\in\mathbb{N}$, $m>m_0$, виконуються нерівності $\|q_1^{m+k}(x)-q_1^m(x);L^2(\Omega)\|\leq\varepsilon$, $\|q_2^{m+k}(t)-q_2^m(t);L^2(0,T)\|\leq$ $\leq\varepsilon$, $\|q_3^{m+k}(y)-q_3^m(y);L^2(D)\|\leq\varepsilon$, $\|q_{3y_i}^{m+k}(y)-q_{3y_i}^m(y);L^2(D)\|\leq\varepsilon$, $i=1,\ldots,l$. Отже, послідовність $\{q_1^m\}_{m=1}^{\infty}$ є фундаментальною в $L^2(\Omega)$, $\{q_2^m\}_{m=1}^{\infty}$ — фундаментальною в $L^2(0,T)$, $\{q_3^m\}_{m=1}^{\infty}$ — фундаментальною в $W^{1,2}(D)$, а отже, $q_1^m\to q_1$ в $L^2(\Omega)$, $q_2^m\to q_2$ в $L^2(0,T)$, $q_3^m\to q_3$ в $W^{1,2}(D)$. Перейшовши в (41)–(43) до границі при $m\to\infty$, отримаємо твердження леми.

Єдиність розв'язку. Припустимо, що $(q_1^{(1)}(x),q_2^{(1)}(t),q_3^{(1)}(y))$, $(q_1^{(2)}(x),q_2^{(2)}(t),q_3^{(2)}(y))$ — два розв'язки системи рівнянь (22)–(24). Тоді їхня різниця $(\tilde{q}_1(x),\tilde{q}_2(t),\tilde{q}_3(y))$, де $\tilde{q}_1(x)=$ $=q_1^{(1)}(x)-q_1^{(2)}(x)$, $\tilde{q}_2(t)=q_2^{(1)}(t)-q_2^{(2)}(t)$, $\tilde{q}_3(y)=q_3^{(1)}(y)-q_3^{(2)}(y)$, задовольняє систему рівнянь

$$\tilde{q}_1(x)=-\frac{1}{K_{11}(x)}\int\limits_{\Pi_1}[F_{12}(x,y,t)\tilde{q}_2(t)+F_{13}(x,y,t)\tilde{q}_3(y)]\,dydt,\quad x\in\Omega, \tag{55}$$

$$\tilde{q}_2(t)=-\frac{1}{K_{22}(t)}\int\limits_{G_t}[F_{21}(x,y,t)\tilde{q}_1(x)+F_{23}(x,y,t)\tilde{q}_3(y)]\,dxdy,\quad t\in[0,T], \tag{56}$$

$$\tilde{q}_3(y)=-\frac{1}{K_{33}(y)}\int\limits_{\Pi_2}[F_{31}(x,y,t)\tilde{q}_1(x)+F_{32}(x,y,t)\tilde{q}_2(t)]\,dxdt,\quad y\in D. \tag{57}$$

З (55)–(57), як і при доведенні існування розв'язку, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega}|\tilde{q}_1(x)|^2dx+\int\limits_0^T|\tilde{q}_2(t)|^2dt+\int\limits_D|\tilde{q}_3(y)|^2dy\leq C_4\left[\int\limits_{\Omega}|\tilde{q}_1(x)|^2\,dx+\int\limits_0^T|\tilde{q}_2(t)|^2dt+\int\limits_D|\tilde{q}_3(y)|^2dy\right].$$

Отже, $(1-C_4)\left[\int_\Omega |\tilde q_1(x)|^2\,dx+\int_0^T|\tilde q_2(t)|^2\,dt+\int_D|\tilde q_3(y)|^2\,dy\right]\le 0$ і $\tilde q_1(x)\equiv 0$, $\tilde q_2(t)\equiv 0$, $\tilde q_3(y)\equiv 0$, а тому $q_1^{(1)}(x)\equiv q_1^{(2)}(x)$, $q_2^{(1)}(t)\equiv q_2^{(2)}(t)$, $q_3^{(1)}(y)\equiv q_3^{(2)}(y)$.

Лему 3 доведено.

Наведемо один із прикладів задачі (1)–(6), для якої виконується умова $C_4<1$.

Приклад 1. Нехай $n=l=1$, $\Omega=(0,x_0)$, $D=(0,y_0)$, $x\in\Omega$, $y\in D$, $t\in(0,T)$, $Q_T=(0,x_0)\times(0,y_0)\times(0,T)$. Припустимо, що коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови (A), (C), (L), (H) та $\lambda_1(y)>0$ для всіх $y\in(0,y_0)$, а функції K_i та f_i, $i\in\{1,2,3\}$, є такими:

$$K_1(y,t):=(y_0-y)^8(T-t)^5t,\quad K_2(x,y):=(y_0-y)^2(x_0-x)^4x,$$
$$K_3(x,y):=(T-t)t(x_0-x)x^{100},\tag{58}$$
$$f_1(x,y,t):=\frac{y^3}{t^{0,35}},\quad f_2(x,y,t):=\frac{y^{30}}{x^{0,35}},\quad f_3(x,y,t):=x^{5000}t^{5000}.$$

Зауважимо, що функції (58) задовольняють умови (K_1)–(K_3), (F) та $f_1(x,0,t)==f_2(x,0,t)=0$, $(x,t)\in(0,x_0)\times(0,T)$, $f_{1y},f_{2y}\in L^2(Q_T)$. Тоді

$$C_1=476769,5146\cdot\frac{T^{3/10}}{y_0^{54}\cdot x_0^{3/10}}+0,1802097096\cdot10^{22}\cdot\frac{y_0^7}{T^{100007/10}\cdot x_0^{10001}},$$
$$C_2=0,1972237446\cdot10^{-10}\cdot\frac{y_0^{54}\cdot x_0^{3/10}}{T^{3/10}}+0,1136653859\cdot10^{21}\cdot\frac{y_0^{61}}{T^{10001}\cdot x_0^{100007/10}},\tag{59}$$
$$C_3=0,8956534444\cdot10^{-33}\cdot\frac{T^{100007/10}\cdot x_0^{10001}}{y_0^7}+0,1310445716\cdot10^{-24}\cdot\frac{x_0^{100007/10}\cdot T^{10001}}{y_0^{61}}.$$

Для трійок чисел (x_0,y_0,T), де

x_0 — довільне додатне число,

$y_0=(0,4100631820\cdot10^{-30})^{-1/1800119}\cdot(0,1048724771\cdot10^{-7})^{-100007/5400357}\cdot x_0^{-200017/18001190}$,

$T=(0,1048724771\cdot10^{-7})^{-70/5400357}\cdot(0,4100631820\cdot10^{-30})^{-180/1800119}\cdot x_0^{-1800187/1800119}$,

сталі C_1, C_2, C_3, визначені формулами (59), є меншими за 1, тому $C_4:=\max\{C_1,C_2,C_3\}$ також є меншою за 1 ($C_1=0,005000000739$, $C_2=0,006325049825$, $C_3=0,005535611162$, $C_4=0,00632504982$).

Позначимо

$$f_1=\sup_\Omega\int_{\Pi_1}(f_1(x,y,t))^2\,dydt,\quad f_2=\sup_{[0,T]}\int_G(f_2(x,y,t))^2\,dxdy,$$
$$f_3=\sup_D\int_{\Pi_2}(f_3(x,y,t))^2\,dxdt,\quad \alpha_1=l\lambda^1-2c_0+2g^0+1+\frac{3}{T},$$
$$M_1:=\frac{\max\{f_1,f_2,f_3\}e^{\alpha_1T}}{\min\{1;2a_0\}},$$

$$M_2 := \max\left\{\frac{3}{\inf\limits_{\Omega}|K_{11}(x)|^2}\int\limits_{Q_T}(B_1(x,y,t)+K_1(y,t)g^0)^2dxdydt+\right.$$

$$+\frac{4}{\inf\limits_{[0,T]}|K_{22}(t)|^2}\int\limits_{Q_T}(B_2(x,y,t)+K_2(x,y)g^0)^2dxdydt+$$

$$+\frac{3}{\inf\limits_{D}|K_{33}(y)|^2}\int\limits_{Q_T}(B_3(x,y,t)+K_3(x,t)g^0)^2dxdydt;$$

$$\left.\frac{4}{\inf\limits_{[0,T]}|K_{22}(t)|^2}\int\limits_{Q_T}\sum_{i,j=1}^{n}(K_{2x_j}(x,y)a_{ij}(x))^2dxdydt\right\},$$

$$M_3 := \max\left\{\frac{4\,\mathrm{mes}\,D}{\inf\limits_{[0,T]}|K_{22}(t)|^2}\int\limits_{Q_T}(F_{21}(x,y,t))^2\,dxdydt+\frac{3T}{\inf\limits_{D}|K_{33}(y)|^2}\int\limits_{Q_T}(F_{31}(x,y,t))^2dxdydt;\right.$$

$$\frac{3\,\mathrm{mes}\,D}{\inf\limits_{\Omega}|K_{11}(x)|^2}\int\limits_{Q_T}(F_{12}(x,y,t))^2dxdydt+\frac{3\,\mathrm{mes}\,\Omega}{\inf\limits_{D}|K_{33}(y)|^2}\int\limits_{Q_T}(F_{32}(x,y,t))^2dxdydt;$$

$$\left.\frac{3T}{\inf\limits_{\Omega}|K_{11}(x)|^2}\int\limits_{Q_T}(F_{13}(x,y,t))^2\,dxdydt+\frac{4\,\mathrm{mes}\,\Omega}{\inf\limits_{[0,T]}|K_{22}(t)|^2}\int\limits_{Q_T}(F_{23}(x,y,t))^2\,dxdydt\right\},$$

$$M_4 := \frac{M_2}{1-M_3}, \quad M_5 := M_1M_4.$$

Нехай число T таке, що виконуються нерівності

$$\alpha_1 > 0 \text{ та } |TM_5| < 1, \quad \frac{8M_0Tf_3}{\inf\limits_{D}|K_{33}(y)|^2}\sup_{D}\int\limits_{\Pi_2}\left[(B_3(x,y,t))^2+(K_3(x,t)g^1)^2\right]dxdt < 1. \qquad (60)$$

Теорема 4. *Нехай $M_3 < 1$ і $A_3(y)|_{\Gamma_1} = 0$, виконуються умови (A), (C), (L), (U), (H), (E), (K_1) – (K_3), (F), (S) та $a_{ijx_i} \in L^\infty(\Omega)$, $c_{y_k} \in L^\infty(Q_T)$, $f_{sy_k} \in L^2(Q_T)$, $s = 0,1,2$, $f_{3y_k} \in C(D; L^2(\Pi_2))$, $u_{0,x_i} \in L^2(G)$, $i,j = 1,\ldots,n$, $k = 1,\ldots,l$, $f_s|_{S_T^1} = 0$, $s = 0,1,2$, і, крім того, $K_{11}(x) \neq 0$ для всіх $x \in \Omega$, $K_{22}(t) \neq 0$ для всіх $t \in (0,T)$, $K_{33}(y) \neq 0$ для всіх $y \in D$, а число T задовольняє умову (60). Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1) – (6).*

Доведення. Використаємо метод послідовних наближень. Як у [7], побудуємо наближення $(u^m(x,y,t), q_1^m(x), q_2^m(t), q_3^m(y))$ розв'язку задачі (1) – (6), де функції $u^m(x,y,t)$ і $q_1^m(x)$, $q_2^m(t)$, $q_3^m(y)$, $m \in \mathbb{N}$, визначаються так, що вони задовольняють систему рівностей

$$q_1^1(x) := 0, \quad q_2^1(t) := 0, \quad q_3^1(y) := 0,$$

$$q_1^m(x) = \frac{1}{K_{11}(x)}\left[A_1(x) + \int\limits_{\Pi_1}\left(B_1(x,y,t)u^{m-1} + K_1(y,t)g(x,y,t,u^{m-1}) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - F_{12}(x,y,t)q_2^m(t) - F_{13}(x,y,t)q_3^m(y)\right)dydt\right], \quad x \in \Omega, \quad m \geq 2, \qquad (61)$$

$$q_2^m(t) = \frac{1}{K_{22}(t)}\left[A_2(t) + \int\limits_{G_t}\left(B_2(x,y,t)u^{m-1} + \sum_{i,j=1}^{n} K_{2x_j}(x,y)a_{ij}(x)u_{x_i}^{m-1} + \right.\right.$$

$$+ K_2(x,y)g(x,y,t,u^{m-1}) - F_{21}(x,y,t)q_1^m(x) -$$

$$\left.\left. - F_{23}(x,y,t)q_3^m(y)\right)dxdy\right], \quad t \in [0,T], \quad m \geq 2, \qquad (62)$$

$$q_3^m(y) = \frac{1}{K_{33}(y)}\left[A_3(y) + \int\limits_{\Pi_2}\left(B_3(x,y,t)u^{m-1} + K_3(x,t)g(x,y,t,u^{m-1}) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - F_{31}(x,y,t)q_1^m(x) - F_{32}(x,y,t)q_2^m(t)\right)dxdt\right], \quad y \in D, \quad m \geq 2, \qquad (63)$$

u^m задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_T}\left[u_t^m v + \sum_{i=1}^{l}\lambda_i(y)u_{y_i}^m v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}^m v_{x_j} + c(x,y,t)u^m v + g(x,y,t,u^m)v\right]dxdydt =$$

$$= \int\limits_{Q_T}(f_1(x,y,t)q_1^m(x) + f_2(x,y,t)q_2^m(t) + f_3(x,y,t)q_3^m(y) + f_0(x,y,t))v\,dxdydt, \;\; m \geq 1, \qquad (64)$$

$$u^m(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in G, \qquad (65)$$

причому (64) виконується для всіх $v \in V_1(Q_T)$.

На підставі теорем 2 і 3 для кожного $m \in \mathbb{N}$ існує єдина функція $u^m \in V_3(Q_T) \cap \cap C([0,T]; L^2(G))$ така, що $u_t^m \in L^2(Q_T)$, і справджуються рівності (64), (65), а на підставі леми 2 для кожної функції $u^{m-1} \in V_3(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$ існує єдина трійка функцій $(q_1^m(x), q_2^m(t), q_3^m(y))$, яка задовольняє (61) – (63), причому $q_1^m \in L^2(\Omega)$, $q_2^m \in L^2(0,T)$, $q_3^m \in \in W^{1,2}(D)$, $q_3|_{\Gamma_1} = 0$.

Покажемо, що послідовність $\{(u^m(x,y,t), q_1^m(x), q_2^m(t), q_3^m(y))\}_{m=1}^{\infty}$ збігається до узагальненого розв'язку задачі (1) – (6). Позначимо

$$z^m := z^m(x,y,t) = u^m(x,y,t) - u^{m-1}(x,y,t), \quad r_1^m(x) = q_1^m(x) - q_1^{m-1}(x),$$

$$r_2^m(t) = q_2^m(t) - q_2^{m-1}(t), \quad r_3^m(y) = q_3^m(y) - q_3^{m-1}(y), \quad m \geq 2.$$

Використовуючи (64), знаходимо, що для всіх функцій $v \in V_1(Q_T)$ справджуються рівності

$$\int\limits_{Q_T} \Bigg[z_t^m v + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(y) z_{y_i}^m v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) z_{x_i}^m v_{x_j} + c(x,y,t) z^m v + \\ + (g(x,y,t,u^m) - g(x,y,t,u^{m-1}))v \Bigg] dxdydt = \\ = \int\limits_{Q_T} (r_1^m(x) f_1(x,y,t) + r_2^m(t) f_2(x,y,t) + r_3^m(y) f_3(x,y,t)) v dxdydt, \quad m \geq 2. \tag{66}$$

Оскільки із (65) випливає, що $z^m(x,y,0) = 0$, $(x,y) \in G$, $m \geq 2$, то, як і при доведенні леми 1 [14], із (66) отримуємо

$$\frac{1}{2} \int\limits_{G_\tau} |z^m|^2 e^{-\alpha\tau} dxdy + \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[\frac{\alpha}{2} |z^m|^2 + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(y) z_{y_i}^m z^m + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) z_{x_i}^m z_{x_j}^m + c(x,y,t)|z^m|^2 + \\ + (g(x,y,t,u^m) - g(x,y,t,u^{m-1})) z^m \Bigg] e^{-\alpha t} dxdydt = \int\limits_{Q_\tau} (r_1^m(x) f_1(x,y,t) + \\ + r_2^m(t) f_2(x,y,t) + r_3^m(y) f_3(x,y,t)) z^m e^{-\alpha t} dxdydt, \quad \tau \in (0,T], \quad m \geq 2, \tag{67}$$

для довільного $\alpha \geq 0$. Оскільки, використовуючи нерівність $|ab| \leq \dfrac{\delta}{2} a^2 + \dfrac{1}{2\delta} b^2$, $\delta > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, отримуємо

$$2 \int\limits_{Q_\tau} (r_1^m(x) f_1(x,y,t) + r_2^m(t) f_2(x,y,t) + r_3^m(y) f_3(x,y,t)) z^m e^{-\alpha t} dxdydt \leq \\ \leq \delta f_1 \int\limits_{\Omega} |r_1^m(x)|^2 dx + \delta f_2 \int\limits_0^T |r_2^m(t)|^2 dt + \\ + \delta f_3 \int\limits_D |r_3^m(y)|^2 dy + \frac{3}{\delta} \int\limits_{Q_\tau} |z^m|^2 e^{-\alpha t} dxdydt, \quad \tau \in (0,T], \quad m \geq 2,$$

та на підставі умови (H)

$$\int\limits_{Q_\tau} (g(x,y,t,u^m) - g(x,y,t,u^{m-1})) z^m e^{-\alpha t} dxdydt \leq g^0 \int\limits_{Q_\tau} |z^m|^2 e^{-\alpha t} dxdydt, \ \tau \in (0,T], \ m \geq 2,$$

то з (67) випливають оцінки

$$\int_{G_\tau}|z^m|^2 e^{-\alpha\tau}dxdy + \int_{S_\tau^2}\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(y)|z^m|^2\cos(\nu,y_i)e^{-\alpha t}dxd\sigma dt+$$

$$+\int_{Q_\tau}\left[\left(\alpha - l\lambda^1 + 2c_0 - \frac{3}{\delta} - 2g^0\right)|z^m|^2 + 2a_0\sum_{i=1}^{n}\left|z_{x_i}^m\right|^2\right]e^{-\alpha t}dxdydt \le$$

$$\le \delta f_1\int_{\Omega}|r_1^m(x)|^2dx + \delta f_2\int_0^T|r_2^m(t)|^2dt + \delta f_3\int_D|r_3^m(y)|^2dy,\ \tau\in(0,T],\ m\ge 2. \qquad (68)$$

Покладемо в (68) $\alpha = \alpha_1$, $\delta = T$. Тоді з (68) для $\tau \in (0,T]$, $m \ge 2$ випливають такі нерівності:

$$\int_{Q_\tau}\left[|z^m|^2 + \sum_{i=1}^{n}|z_{x_i}^m|^2\right]dxdydt \le TM_1\left[\int_{\Omega}|r_1^m(x)|^2dx + \int_0^T|r_2^m(t)|^2dt + \int_D|r_3^m(y)|^2dy\right], \quad (69)$$

$$\int_{G_\tau}|z^m|^2dxdy \le T\max\{f_1,f_2,f_3\}e^{\alpha_1 T}\left[\int_{\Omega}|r_1^m(x)|^2dx + \int_0^T|r_2^m(t)|^2dt + \int_D|r_3^m(y)|^2dy\right]. \quad (70)$$

Оцінимо значення $|r_1^m(x)|$, $|r_2^m(t)|$, $|r_3^m(y)|$, $m \ge 3$. На підставі (61)– (63) отримуємо

$$r_1^m(x) = \frac{1}{K_{11}(x)}\int_{\Pi_1}\Big[B_1(x,y,t)z^{m-1} + K_1(y,t)(g(x,y,t,u^{m-1}) - g(x,y,t,u^{m-2})) -$$

$$- F_{12}(x,y,t)r_2^m(t) - F_{13}(x,y,t)r_3^m(y)\Big]dydt,\ \ x\in\Omega,\ \ m\ge 3, \qquad (71)$$

$$r_2^m(t) = \frac{1}{K_{22}(t)}\int_{G_t}\Big[B_2(x,y,t)z^{m-1} + \sum_{i,j=1}^{n}K_{2x_j}(x,y)a_{ij}(x)z_{x_i}^{m-1} + K_2(x,y)(g(x,y,t,u^{m-1}) -$$

$$- g(x,y,t,u^{m-2})) - F_{21}(x,y,t)r_1^m(x) - F_{23}(x,y,t)r_3^m(y)\Big]dxdy,\ t\in[0,T],\ m\ge 3, \quad (72)$$

$$r_3^m(y) = \frac{1}{K_{33}(y)}\int_{\Pi_2}\Big[B_3(x,y,t)z^{m-1} + K_3(x,t)(g(x,y,t,u^{m-1}) - g(x,y,t,u^{m-2})) -$$

$$- F_{31}(x,y,t)r_1^m(x) - F_{32}(x,y,t)r_2^m(t)\Big]dxdt,\quad y\in D,\quad m\ge 3. \qquad (73)$$

Піднісши обидві частини рівностей (71) – (73) до квадрата і зінтегрувавши їх за змінними x, t, y з використанням нерівності Гельдера, одержимо

$$\int\limits_{\Omega}|r_1^m(x)|^2\,dx \le \frac{3}{\inf\limits_{\Omega}|K_{11}(x)|^2}\left[\int\limits_{Q_T}\big(B_1(x,y,t)+K_1(y,t)g^0\big)^2\,dxdydt\int\limits_{Q_T}\left|z^{m-1}\right|^2dxdydt+\right.$$
$$+\operatorname{mes}D\int\limits_{Q_T}(F_{12}(x,y,t))^2\;dxdydt\int\limits_0^T|r_2^m(t)|^2\,dt+$$
$$\left.+\,T\int\limits_{Q_T}(F_{13}(x,y,t))^2\;dxdydt\int\limits_{D}|r_3^m(y)|^2dy\right],\quad m\ge 3, \tag{74}$$

$$\int\limits_0^T|r_2^m(t)|^2\,dt \le \frac{4}{\inf\limits_{[0,T]}|K_{22}(t)|^2}\left[\int\limits_{Q_T}\big(B_2(x,y,t)+K_2(x,y)g^0\big)^2\,dxdydt\int\limits_{Q_T}|z^{m-1}|^2dxdydt+\right.$$
$$+\,n^2\int\limits_{Q_T}\sum_{i,j=1}^{n}(K_{2x_j}(x,y)a_{ij}(x))^2dxdydt\int\limits_{Q_T}\sum_{i=1}^{n}|z_{x_i}^{m-1}|^2dxdydt+$$
$$+\operatorname{mes}D\int\limits_{Q_T}(F_{21}(x,y,t))^2\;dxdydt\int\limits_{\Omega}|r_1^m(x)|^2\,dx+$$
$$\left.+\operatorname{mes}\Omega\int\limits_{Q_T}(F_{23}(x,y,t))^2\;dxdydt\int\limits_{D}|r_3^m(y)|^2\,dy\right],\quad m\ge 3, \tag{75}$$

$$\int\limits_{D}|r_3^m(y)|^2\,dy \le \frac{3}{\inf\limits_{D}|K_{33}(y)|^2}\left[\int\limits_{Q_T}\big(B_3(x,y,t)+K_3(x,t)g^0\big)^2\;dxdydt\int\limits_{Q_T}|z^{m-1}|^2\,dxdydt+\right.$$
$$+\,T\int\limits_{Q_T}(F_{31}(x,y,t))^2\,dxdydt\int\limits_{\Omega}|r_1^m(x)|^2\,dx+$$
$$\left.+\operatorname{mes}\Omega\int\limits_{Q_T}(F_{32}(x,y,t))^2\;dxdydt\int\limits_0^T|r_2^m(t)|^2\;dt\right],\quad m\ge 3. \tag{76}$$

Додаючи нерівності (74) – (76), отримуємо

$$\int\limits_{\Omega} |r_1^m(x)|^2\,dx + \int\limits_0^T |r_2^m(t)|^2\,dt + \int\limits_D |r_3^m(y)|^2\,dy \leq$$

$$\leq M_4 \int\limits_{Q_T} \left[|z^{m-1}|^2 + \sum_{i=1}^n |z_{x_i}^{m-1}|^2 \right] dxdydt, \quad m \geq 3. \tag{77}$$

Із (69) та (77) випливає, що

$$\int\limits_{\Omega} |r_1^{m+1}(x)|^2\,dx + \int\limits_0^T |r_2^{m+1}(t)|^2\,dt + \int\limits_D |r_3^{m+1}(y)|^2\,dy \leq M_4 \int\limits_{Q_T} \left[|z^m|^2 + \sum_{i=1}^n |z_{x_i}^m|^2 \right] dxdydt \leq$$

$$\leq TM_5 \left[\int\limits_{\Omega} |r_1^m(x)|^2\,dx + \int\limits_0^T |r_2^m(t)|^2\,dt + \int\limits_D |r_3^m(y)|^2\,dy \right], \quad m \geq 3.$$

Звідси отримуємо

$$\int\limits_{\Omega} |r_1^m(x)|^2\,dx + \int\limits_0^T |r_2^m(t)|^2\,dt + \int\limits_D |r_3^m(y)|^2\,dy \leq$$

$$\leq TM_5 \left[\int\limits_{\Omega} |r_1^{m-1}(x)|^2\,dx + \int\limits_0^T |r_2^{m-1}(t)|^2\,dt + \int\limits_D |r_3^{m-1}(y)|^2\,dy \right] \leq$$

$$\leq (TM_5)^{m-2} \left[\int\limits_{\Omega} |r_1^2(x)|^2\,dx + \int\limits_0^T |r_2^2(t)|^2\,dt + \int\limits_D |r_3^2(y)|^2\,dy \right], \quad m \geq 3. \tag{78}$$

Використовуючи (78) та умову $|TM_5| < 1$, переконуємося, що для всіх $k, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, справджується оцінка

$$\int\limits_{\Omega} |q_1^{m+k}(x) - q_1^m(x)|^2\,dx + \int\limits_0^T |q_2^{m+k}(t) - q_2^m(t)|^2\,dt + \int\limits_D |q_3^{m+k}(y) - q_3^m(y)|^2\,dy \leq$$

$$\leq \sum_{i=m+1}^{m+k} \left[\int\limits_{\Omega} |r_1^i(x)|^2\,dx + \int\limits_0^T |r_2^i(t)|^2\,dt + \int\limits_D |r_3^i(y)|^2\,dy \right] \leq$$

$$\le \sum_{i=m+1}^{m+k}(TM_5)^{i-2}\left[\int\limits_{\Omega}|r_1^2(x)|^2\,dx + + \int\limits_0^T|r_2^2(t)|^2\,dt + \int\limits_D|r_3^2(y)|^2\,dy\right] \le$$

$$\le \frac{(TM_5)^{m-1}(1-(TM_5)^k)}{1-TM_5}\left[\int\limits_{\Omega}|r_1^2(x)|^2\,dx + \int\limits_0^T|r_2^2(t)|^2\,dt + \int\limits_D|r_3^2(y)|^2\,dy\right] \le$$

$$\le \frac{(TM_5)^{m-1}}{1-TM_5}\left[\int\limits_{\Omega}|r_1^2(x)|^2\,dx + \int\limits_0^T|r_2^2(t)|^2\,dt + \int\limits_D|r_3^2(y)|^2\,dy\right], \quad m \ge 3. \tag{79}$$

Із (79) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке m_0, що для всіх $k, m \in \mathbb{N}$, $m > m_0$, виконуються нерівності $\|q_1^{m+k}(x) - q_1^m(x); L^2(\Omega)\| \le \varepsilon$, $\|q_2^{m+k}(t) - q_2^m(t); L^2(0,T)\| \le \varepsilon$, $\|q_3^{m+k}(y) - q_3^m(y); L^2(D)\| \le \varepsilon$. Отже, послідовність $\{q_1^m\}_{m=1}^{\infty}$ є фундаментальною в $L^2(\Omega)$, $\{q_2^m\}_{m=1}^{\infty}$ — фундаментальною в $L^2(0,T)$, а $\{q_3^m\}_{m=1}^{\infty}$ — фундаментальною в $L^2(D)$.

Тоді з (69) та (70) випливає, що $\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$ є фундаментальною в $L^2(Q_T)\cap C([0,T];L^2(G))$, послідовність $\{u_{x_i}^m\}_{m=1}^{\infty}$ — фундаментальною в $L^2(Q_T)$, а тому при $m \to \infty$

$$u^m \to u \text{ сильно в } L^2(Q_T)\cap C([0,T];L^2(G)),\ u_{x_i}^m \to u_{x_i} \text{ сильно в } L^2(Q_T),\ i=1,\ldots,n, \tag{80}$$

$$q_1^m \to q_1^m \text{ сильно в } L^2(\Omega),\ q_2^m \to q_2^m \text{ сильно в } L^2(0,T),\ q_3^m \to q_3^m \text{ сильно в } L^2(D). \tag{81}$$

Встановимо оцінки для $u_{y_i}^m$, $i = 1,\ldots,l$, та для u_t^m. Як і при доведенні теореми 3, будуємо послідовність $\{u^{m,N}\}_{N=1}^{\infty}$, яка у просторі $V_3(Q_T)$ збігається слабко при $N \to \infty$ до розв'язку u^m задачі (64), (65), а послідовність $\{u_t^{m,N}\}_{N=1}^{\infty}$ — до u_t^m у просторі $L^2(Q_T)$. Для наближень $u^{m,N}$ встановлено оцінки (13) та (16) з функціями $u^{m,N}$ замість $u^{*,N}$. Зінтегрувавши нерівність (13) по τ від 0 до T, перейдемо до границі при $N \to \infty$, врахувавши, що $\|v; L^2(Q_T)\|^2 \le \lim_{N\to\infty}\|v^N; L^2(Q_T)\|^2$ [17, с. 20]:

$$\int\limits_{Q_T}\sum_{i=1}^{l}|u_{y_i}^m|^2 dx\,dy \le MT\left(f_4\int\limits_{\Omega}|q_1^m(x)|^2\,dx + f_5\int\limits_0^T|q_2^m(t)|^2\,dt + f_6\int\limits_D|q_3^m(y)|^2\,dy + C_6\right) +$$

$$+ f_3M_0T\int\limits_D\sum_{i=1}^{l}|q_{3y_i}^m(y)|^2\,dy, \tag{82}$$

де

$$C_6 = \int\limits_{Q_T}(|f_0(x,y,t)|^2 + \sum_{i=1}^{l}|f_{0y_i}(x,y,t)|^2)\,dxdydt + \int\limits_G\left(|u_0(x,y)|^2 + \sum_{i=1}^{l}|u_{0y_i}(x,y)|^2\right)dxdy,$$

$$f_4 = f_1 + \sup_{\Omega}\int\limits_{\Pi_1}\sum_{i=1}^{l}|f_{1y_i}(x,y,t)|^2\,dy\,dt, \quad f_5 = f_2 + \sup_{[0,T]}\int\limits_G\sum_{i=1}^{l}|f_{2y_i}(x,y,t)|^2\,dx\,dy,$$

$$f_6 = f_3 + \sup_D \int\limits_{\Pi_2} \sum_{i=1}^{l} |f_{1y_i}(x,y,t)|^2 \, dx \, dt.$$

З (63) випливає, що

$$q_{3y_i}^m(y) = \frac{1}{K_{33}(y)} \Bigg[- K_{33y_i}(y) q_3^m(y) + A_{3y_i}(y) + \int\limits_{\Pi_2} \Bigg(B_{3y_i}(x,y,t) u^{m-1} + B_3(x,y,t) u_{y_i}^{m-1} +$$

$$+ K_3(x,t) g_{y_i}(x,y,t,u^{m-1}) + K_3(x,t) g_{u^{m-1}}(x,y,t,u^{m-1}) u_{y_i}^{m-1} -$$

$$- K_3(x,t) f_{1y_i}(x,y,t) q_1^m(x) - K_3(x,t) f_{2y_i}(x,y,t) q_2^m(t) \Bigg) dxdt \Bigg], \ y \in D, \ m \geq 2. \quad (83)$$

Піднесемо (83) до квадрата і зінтегруємо по області D. Тоді, застосувавши нерівність Гельдера, отримаємо

$$\int\limits_D \sum_{i=1}^{l} |q_{3y_i}^m(y)|^2 \, dy \leq \frac{8}{\inf\limits_D |K_{33}(y)|^2} \Bigg[\sum_{i=1}^{l} \sup_D |K_{33y_i}(y)|^2 \int\limits_D |q_3^m(y)|^2 \, dy + \int\limits_D \sum_{i=1}^{l} |A_{3y_i}(y)|^2 \, dy +$$

$$+ \int\limits_{\Pi_2} \left(\sum_{i=1}^{l} \sup_D (B_{3y_i}(x,y,t))^2 + l(K_3(x,t) g^0)^2 \right) dxdt \int\limits_{Q_T} |u^{m-1}|^2 \, dxdydt +$$

$$+ \int\limits_{\Pi_2} \left(\sup_D (B_3(x,y,t))^2 + (K_3(x,t) g^1)^2 \right) dxdt \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{l} |u_{y_i}^{m-1}|^2 \, dxdydt +$$

$$+ T \int\limits_{\Omega} |q_1^m(x)|^2 dx \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{l} |K_3(x,t) f_{1y_i}(x,y,t)|^2 \, dxdydt +$$

$$+ \operatorname{mes} \Omega \int\limits_0^T |q_2^m(t)|^2 dt \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{l} |K_3(x,t) f_{2y_i}(x,y,t)|^2 dxdydt \Bigg], \ m \geq 2. \quad (84)$$

Враховуючи (84), із (82) отримуємо оцінку

$$\int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{l} |u_{y_i}^m|^2 dx \, dy \leq \frac{C_8}{C_7} \Bigg(\int\limits_{\Omega} |q_1^m(x)|^2 \, dx + \int\limits_0^T |q_2^m(t)|^2 \, dt + \int\limits_D |q_3^m(y)|^2 \, dy + 1 +$$

$$+ \int\limits_{Q_T} |u^{m-1}|^2 \, dxdydt \Bigg), \quad (85)$$

де

$$C_7 = 1 - \frac{8M_6Tf_3}{\inf\limits_D |K_{33}(y)|^2} \sup_D \int\limits_{\Pi_2} [(B_3(x,y,t))^2 + (K_3(x,t)g^1)^2] dxdt,$$

$$C_8 = T\max\left\{ Mf_4 + \frac{8f_3M_0T}{\inf\limits_D |K_{33}(y)|^2} \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{l} |K_3(x,t)f_{1y_i}(x,y,t)|^2\, dxdydt;\right.$$

$$Mf_5 + \frac{8f_3M_0 \mathrm{mes}\,\Omega}{\inf\limits_D |K_{33}(y)|^2} \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{l} |K_3(x,t)f_{2y_i}(x,y,t)|^2\, dxdydt;$$

$$Mf_6 + \frac{8f_3M_0}{\inf\limits_D |K_{33}(y)|^2} \sum_{i=1}^{l} \sup_D |K_{33y_i}(y)|^2;$$

$$MC_6 + \frac{8f_3M_0}{\inf\limits_D |K_{33}(y)|^2} \int\limits_D \sum_{i=1}^{l} |A_{3y_i}(y)|^2\, dy;$$

$$\left.\frac{8f_3M_0}{\inf\limits_D |K_{33}(y)|^2} \left(\sum_{i=1}^{l} \sup_D \int\limits_{\Pi_2} (B_{3y_i}(x,y,t))^2\, dx\, dt + l\int\limits_{\Pi_2} (K_3(x,t)g^0)^2\, dxdt \right) \right\}.$$

З (80) та (81) випливає обмеженість правої частини нерівності (85). Тому

$$\int\limits_{G_\tau} \sum_{i=1}^{l} |u^m_{y_i}|^2 dx\, dy \le C_9, \quad \tau \in [0,T], \quad \|u^m_t; L^2(Q_T)\| \le C_{10}, \tag{86}$$

де сталі C_9, C_{10} не залежать від m. З (86) випливає, що з послідовності $\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$ можна вибрати таку підпослідовність (збережемо для неї те саме позначення), що

$$u^m_{y_i} \to u_{y_i} \text{ слабко в } L^2(Q_T),\ i = 1,\ldots,l,\ u^m_t \to u_t \text{ слабко в } L^2(Q_T). \tag{87}$$

Тоді права частина (84) обмежена зверху сталою, яка не залежать від m, а отже,

$$q^m_{3y_i} \to q_{3y_i} \text{ слабко в } L^2(D),\ i = 1,\ldots,l. \tag{88}$$

Врахувавши (80), (81), (87), (88) і лему 2, з (64) та (61)–(63) отримаємо, що $(u(x,y,t)$, $q_1(x), q_2(t), q_3(y))$ — узагальнений розв'язок задачі (1)–(6) в області Q_T.

Теорему 4 доведено.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови теореми 4. Тоді задача (1)–(6) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Доведення. Припустимо, що $(u^{(1)}(x,y,t),\ q_1^{(1)}(x),\ q_2^{(1)}(t),\ q_3^{(1)}(y))$, $(u^{(2)}(x,y,t),\ q_1^{(2)}(x)$, $q_2^{(2)}(t),\ q_3^{(2)}(y))$ — два узагальнені розв'язки задачі (1)–(6). Тоді їхня різниця $(\tilde{u}(x,y,t)$,

$\tilde{q}_1(x)$, $\tilde{q}_2(t)$, $\tilde{q}_3(y)$), де $\tilde{u}(x,y,t) = u^{(1)}(x,y,t) - u^{(2)}(x,y,t)$, $\tilde{q}_1(x) = q_1^{(1)}(x) - q_1^{(2)}(x)$, $\tilde{q}_2(t) = q_2^{(1)}(t) - q_2^{(2)}(t)$, $\tilde{q}_3(y) = q_3^{(1)}(y) - q_3^{(2)}(y)$, задовольняє умову $\tilde{u}(x,y,0) \equiv 0$, рівність

$$\int\limits_{Q_T} \left[\tilde{u}_t v + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(y)\tilde{u}_{y_i} v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\tilde{u}_{x_i} v_{x_j} + c(x,y,t)\tilde{u}v + \right.$$

$$\left. + (g(x,y,t,u^{(1)}) - g(x,y,t,u^{(2)}))v\right] dxdydt =$$

$$= \int\limits_{Q_T} [f_1(x,y,t)\tilde{q}_1(x) + f_2(x,y,t)\tilde{q}_2(t) + f_3(x,y,t)\tilde{q}_3(y)] v dxdydt \qquad (89)$$

для всіх $v \in V_1(Q_T)$ та систему рівностей

$$\tilde{q}_1(x) = \frac{1}{K_{11}(x)} \int\limits_{\Pi_1} \left[B_1(x,y,t)\tilde{u} + K_1(y,t)(g(x,y,t,u^{(1)}) - g(x,y,t,u^{(2)})) - \right.$$

$$\left. - F_{12}(x,y,t)\tilde{q}_2(t) - F_{13}(x,y,t)\tilde{q}_3(y)\right] dydt, \quad x \in \Omega, \qquad (90)$$

$$\tilde{q}_2(t) = \frac{1}{K_{22}(t)} \int\limits_{G_t} \left[B_2(x,y,t)\tilde{u} + \sum_{i,j=1}^{n} K_{2x_j}(x,y) a_{ij}(x)\tilde{u}_{x_i} + K_2(x,y)(g(x,y,t,u^{(1)}) - \right.$$

$$\left. - g(x,y,t,u^{(1)})) - F_{21}(x,y,t)\tilde{q}_1(x) F_{23}(x,y,t)\tilde{q}_3(y)\right] dxdy, \quad t \in [0,T], \qquad (91)$$

$$\tilde{q}_3(y) = \frac{1}{K_{33}(y)} \int\limits_{\Pi_2} \left[B_3(x,y,t)\tilde{u} + K_3(x,t)(g(x,y,t,u^{(1)}) - g(x,y,t,u^{(2)})) - \right.$$

$$\left. - F_{31}(x,y,t)\tilde{q}_1(x) - F_{32}(x,y,t)\tilde{q}_2(t)\right] dxdt, \quad y \in D. \qquad (92)$$

Згідно із (89), для четвірки функцій $(\tilde{u}(x,y,t), \tilde{q}_1(x), \tilde{q}_2(t), \tilde{q}_3(y))$ та $\alpha = l\lambda^1 - 2c_0 + \frac{3}{\delta} + 1 - 2g^0$, $\delta > 0$, виконується рівність

$$\int\limits_{G_T} |\tilde{u}|^2 e^{-\alpha T} dxdy + \int\limits_{Q_T} \left[\alpha|\tilde{u}|^2 + 2\sum_{i=1}^{l} \lambda_i(y)\tilde{u}_{y_i}\tilde{u} + 2\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x)\tilde{u}_{x_i}\tilde{u}_{x_j} + 2c(x,y,t)|\tilde{u}|^2 + \right.$$

$$+ 2(g(x,y,t,u^{(1)}) - g(x,y,t,u^{(2)}))\tilde{u}\Big] e^{-\alpha t} dxdydt =$$

$$= 2\int\limits_{Q_T} \left[f_1(x,y,t)\tilde{q}_1(x) + f_2(x,y,t)\tilde{q}_2(t) + f_3(x,y,t)\tilde{q}_3(y)\right] \tilde{u} e^{-\alpha t} dxdydt.$$

Звідси, як із (67), отримаємо оцінку

$$\int\limits_{G_T} |\tilde{u}|^2 e^{-\alpha\tau} dxdy + \int\limits_{S_T^2} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(y)|\tilde{u}|^2 \cos(\nu, y_i) e^{-\alpha t} dxd\sigma dt +$$
$$+ \int\limits_{Q_T} \left[\left(\alpha - l\lambda^1 + 2c_0 - \frac{3}{\delta} - 2g^0\right) |\tilde{u}|^2 + 2a_0 \sum_{i=1}^{n} |\tilde{u}_{x_i}|^2 \right] e^{-\alpha t} dxdydt \le$$
$$\le \delta f_1 \int\limits_{\Omega} |\tilde{q}_1(x)|^2 dx + \delta f_2 \int\limits_0^T |\tilde{q}_2(t)|^2 dt + \delta f_3 \int\limits_D |\tilde{q}_3(y)|^2 dy. \quad (93)$$

Покладемо у (93) $\delta = T$, $\alpha = \alpha_1$. Тоді з (93) випливає оцінка

$$\int\limits_{Q_T} \left[|\tilde{u}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\tilde{u}_{x_i}|^2 \right] dxdydt \le TM_1 \left[\int\limits_{\Omega} |\tilde{q}_1(x)|^2 dx + \int\limits_0^T |\tilde{q}_2(t)|^2 dt + \int\limits_D |\tilde{q}_3(y)|^2 dy \right]. \quad (94)$$

Використавши (90) – (92), як і при доведенні існування розв'язку, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} |\tilde{q}_1(x)|^2 dx + \int\limits_0^T |\tilde{q}_2(t)|^2 dt + \int\limits_D |\tilde{q}_3(y)|^2 dy \le M_4 \int\limits_{Q_T} \left[|\tilde{u}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\tilde{u}_{x_i}|^2 \right] dxdydt.$$

Врахувавши оцінку (94), знайдемо

$$(1 - M_5 T) \left[\int\limits_{\Omega} |\tilde{q}_1(x)|^2 dx + \int\limits_0^T |\tilde{q}_2(t)|^2 dt + \int\limits_D |\tilde{q}_3(y)|^2 dy \right] \le 0. \quad (95)$$

Оскільки $|TM_5| < 1$, то $\tilde{q}_1(x) \equiv 0$, $\tilde{q}_2(t) \equiv 0$, $\tilde{q}_3(y) \equiv 0$, а тому $q_1^{(1)}(x) \equiv q_1^{(2)}(x)$, $q_2^{(1)}(t) \equiv q_2^{(2)}(t)$, $q_3^{(1)}(y) \equiv q_3^{(2)}(y)$. Тоді з (94) випливає $\int_{Q_T} |\tilde{u}|^2 dxdydt \le 0$, а тому $u^{(1)} = u^{(2)}$ в Q_T.

Теорему доведено.

Позначимо $\alpha_2 = -l\lambda^1 + 2c_0 - 2g^0 + \dfrac{a_0}{\theta}$, $\theta = \theta(\Omega)$ — коефіцієнт із нерівності Фрідріхса

$$\int\limits_{\Omega} |v(x)|^2\,dx \le \theta \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} |v_{x_i}(x)|^2 dx, \tag{96}$$

яка виконується для функцій $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$;

$$M_7 := \frac{3\theta \max\{f_1, f_2, f_3\}}{\alpha_2 a_0}(1 - e^{-\alpha_2 T}),$$

$$M_8 := \frac{3}{\inf\limits_{\Omega} |K_{11}(x)|^2} \int\limits_{Q_T} (B_1(x,y,t) + K_1(y,t)g^0)^2 dxdydt +$$

$$+ \frac{3}{\inf\limits_{[0,T]} |K_{22}(t)|^2} \int\limits_{Q_T} \left(B_2(x,y,t) + K_2(x,y)g^0 - \sum_{i,j=1}^{n} (K_{2x_j}(x,y)a_{ij}(x))_{x_i} \right)^2 dxdydt +$$

$$+ \frac{3}{\inf\limits_{D} |K_{33}(y)|^2} \int\limits_{Q_T} (B_3(x,y,t) + K_3(x,t)g^0)^2\,dxdydt,$$

$$M_9 := \frac{M_8}{1 - M_3}, \quad M_{10}(T) := M_{10} = M_7 M_9.$$

Зауваження 1. Теореми 4 і 5 є правильними і для випадку, коли число T справджує нерівності

$$|M_{10}(T)| < 1, \frac{8M_0 T f_3}{\inf\limits_{D} |K_{33}(y)|^2} \sup_{D} \int\limits_{\Pi_2} \left[(B_3(x,y,t))^2 + (K_3(x,t)g^1)^2 \right] dxdt < 1, \text{ якщо } \alpha_2 > 0. \tag{97}$$

Покажемо це для теореми 4. Побудуємо наближення $(u^m(x,y,t), q_1^m(x), q_2^m(t), q_3^m(y))$ розв'язку задачі (1) – (6), де функції $u^m(x,y,t)$ і $q_1^m(x)$, $q_2^m(t)$, $q_3^m(y)$, $m \in \mathbb{N}$, визначаються, як і при доведенні теореми 4.

Покладемо в нерівності (68) $\alpha = 0$, $\delta = 3\theta/a_0$, де θ — стала з нерівності (96). Застосувавши (96) до (68), отримаємо

$$\int\limits_{G_\tau} |z^m|^2 dxdy + \int\limits_{S_\tau^2} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(y)|z^m|^2 \cos(\nu, y_i) dxd\sigma dt + \alpha_2 \int\limits_{Q_\tau} |z^m|^2 dxdydt \le$$

$$\le \frac{3\theta}{a_0} \left[f_1 \int\limits_{\Omega} |r_1^m(x)|^2 dx + f_2 \int\limits_{0}^{T} |r_2^m(t)|^2 dt + f_3 \int\limits_{D} |r_3^m(y)|^2 dy \right], \tag{98}$$

$\tau \in (0, T]$, $m \geq 2$. Оскільки $\alpha_2 > 0$, то з (98) випливає

$$(w^m(\tau))' + \alpha_2 w^m(\tau) \leq \frac{3\theta}{a_0} \left[f_1 \int\limits_{\Omega} |r_1^m(x)|^2 dx + f_2 \int\limits_0^T |r_2^m(t)|^2 dt + \right.$$

$$\left. + f_3 \int\limits_D |r_3^m(y)|^2 dy \right], \quad m \geq 2, \quad \tau \in (0, T],$$

де $w^m(\tau) = \int_{Q_\tau} |z^m|^2 \, dxdydt$.

Розв'яжемо отримані нерівності, домноживши їх на $e^{\alpha_2 \tau}$ та зінтегрувавши по τ від 0 до T. В результаті отримаємо

$$w^m(T) \leq \frac{3\theta}{\alpha_2 a_0} \left(1 - e^{-\alpha_2 T}\right) \left[f_1 \int\limits_{\Omega} |r_1^m(x)|^2 dx + f_2 \int\limits_0^T |r_2^m(t)|^2 dt + f_3 \int\limits_D |r_3^m(y)|^2 dy \right], \quad m \geq 2,$$

отже,

$$\int\limits_{Q_T} |z^m|^2 dxdydt \leq M_7 \left[\int\limits_{\Omega} |r_1^m(x)|^2 dx + \int\limits_0^T |r_2^m(t)|^2 dt + \int\limits_D |r_3^m(y)|^2 dy \right], \quad m \geq 2, \tag{99}$$

$$\int\limits_{G_\tau} |z^m|^2 dxdy \leq \frac{3\theta}{a_0} \left[f_1 \int\limits_{\Omega} |r_1^m(x)|^2 dx + f_2 \int\limits_0^T |r_2^m(t)|^2 dt + \right.$$

$$\left. + f_3 \int\limits_D |r_3^m(y)|^2 dy \right], \quad m \geq 2, \quad \tau \in (0, T], \tag{100}$$

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |z_{x_i}^m|^2 dxdydt \leq \left[\left(\frac{|l\lambda^1 - 2c_0 + \frac{a_0}{\theta} + 2g^0|}{2a_0} M_7 + \frac{6\theta}{a_0^2} f_1 \right) \int\limits_{\Omega} |r_1^m(x)|^2 \, dx + \right.$$

$$+ \left(\frac{|l\lambda^1 - 2c_0 + \frac{a_0}{\theta} + 2g^0|}{2a_0} M_7 + \frac{6\theta}{a_0^2} f_2 \right) \int\limits_0^T |r_2^m(t)|^2 \, dt +$$

$$\left. + \left(\frac{|l\lambda^1 - 2c_0 + \frac{a_0}{\theta} + 2g^0|}{2a_0} M_7 + \frac{6\theta}{a_0^2} f_3 \right) \int\limits_D |r_3^m(y)|^2 dy \right], \tau \in (0, T], m \geq 2. \tag{101}$$

Оцінимо значення $|r_1^m(x)|$, $|r_2^m(t)|$, $|r_3^m(y)|$, $m \geq 3$. На підставі (61) – (63) отримуємо

$$r_2^m(t) = \frac{1}{K_{22}(t)} \int\limits_{G_t} \Bigg[\Bigg(B_2(x,y,t) - \sum_{i,j=1}^{n} (K_{2x_j}(x,y)a_{ij}(x))_{x_i} \Bigg) z^{m-1} +$$
$$+ K_2(x,y)(g(x,y,t,u^{m-1}) - g(x,y,t,u^{m-2})) - F_{21}(x,y,t) r_1^m(x) -$$
$$- F_{23}(x,y,t) r_3^m(y) \Bigg] dxdy, \quad t \in [0,T], \quad m \geq 3. \tag{102}$$

Піднісши обидві частини (71), (102), (73) до квадрата, зінтегрувавши за змінними x, t, y і використавши нерівність Гельдера, одержимо (74), (76) та

$$\int\limits_0^T |r_2^m(t)|^2 dt \leq \frac{3}{\inf\limits_{[0,T]} |K_{22}(t)|^2} \Bigg[\int\limits_{Q_T} \Bigg(B_2(x,y,t) + K_2(x,y) g^0 -$$
$$- \sum_{i,j=1}^{n} (K_{2x_j}(x,y)a_{ij}(x))_{x_i} \Bigg)^2 dxdydt \int\limits_{Q_T} |z^{m-1}|^2 dxdydt +$$
$$+ \operatorname{mes} D \int\limits_{Q_T} (F_{21}(x,y,t))^2 dxdydt \int\limits_{\Omega} |r_1^m(x)|^2 dx +$$
$$+ \operatorname{mes} \Omega \int\limits_{Q_T} (F_{23}(x,y,t))^2 dxdydt \int\limits_{D} |r_3^m(y)|^2 \, dy \Bigg], \quad m \geq 3. \tag{103}$$

Додавши нерівності (74), (76), (103), будемо мати

$$\int\limits_{\Omega} |r_1^m(x)|^2 dx + \int\limits_0^T |r_2^m(t)|^2 dt + \int\limits_{D} |r_3^m(y)|^2 dy \leq M_9 \int\limits_{Q_T} |z^{m-1}|^2 dxdydt. \tag{104}$$

Із (100) та (104) випливає, що

$$\int\limits_{\Omega} |r_1^{m+1}(x)|^2 dx + \int\limits_0^T |r_2^{m+1}(t)|^2 dt + \int\limits_{D} |r_3^{m+1}(y)|^2 dy \leq M_9 \int\limits_{Q_T} |z^m|^2 dxdydt \leq$$
$$\leq M_{10} \Bigg[\int\limits_{\Omega} |r_1^m(x)|^2 dx + \int\limits_0^T |r_2^m(t)|^2 dt + \int\limits_{D} |r_3^m(y)|^2 dy \Bigg], \quad m \geq 2.$$

Звідси отримуємо

$$\int\limits_{\Omega} |r_1^m(x)|^2 dx + \int\limits_0^T |r_2^m(t)|^2 dt + \int\limits_D |r_3^m(y)|^2 dy \leq$$

$$\leq M_{10} \left[\int\limits_{\Omega} |r_1^{m-1}(x)|^2 dx + \int\limits_0^T |r_2^{m-1}(t)|^2 dt + \int\limits_D |r_3^{m-1}(y)|^2 \, dy \right] \leq$$

$$\leq (M_{10})^{m-2} \left[\int\limits_{\Omega} |r_1^2(x)|^2 dx + \int\limits_0^T |r_2^2(t)|^2 dt + \int\limits_D |r_3^2(y)|^2 \, dy \right], \; x \in \Omega, \; m \geq 3.$$

Оскільки $|M_{10}| < 1$, то знову переконуємося, що послідовність $\{q_1^m\}_{m=1}^{\infty}$ є фундаментальною в $L^2(\Omega)$, $\{q_2^m\}_{m=1}^{\infty}$ — фундаментальною в $L^2(0,T)$, а $\{q_3^m\}_{m=1}^{\infty}$ — фундаментальною в $L^2(D)$.

Тоді з (99) та (101) випливає, що $\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$ є фундаментальною в $L^2(Q_T) \cap C([0,T];L^2(G))$, послідовність $\{u_{x_i}^m\}_{m=1}^{\infty}$ — фундаментальною в $L^2(Q_T)$, а тому виконуються (80), (81).

Доведення теореми 5 для випадку умов (97) проводиться аналогічно.

Висновки. У статті встановлено достатні умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі (1) – (6) для слабконелінійного ультрапараболічного рівняння. Накладання умов $f_1|_{S_T^1} = 0, \; f_2|_{S_T^1} = 0$, (K_1) – (K_3), $C_4 < 1$ спричинено нашою методикою дослідження задачі (1) – (6), в якій використовується метод Фаедо – Гальоркіна, метод послідовних наближень та результати статті [14]. Наведено приклад задачі (1) – (6), для якої ці умови виконуються. Наступним кроком у дослідженні задачі (1) – (6) буде відшукання необхідних умов її однозначної розв'язності.

1. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. — Birkhäuser, 2004. — 390 p.
2. *Lanconelli E., Pascucci A., Polidoro S.* Linear and nonlinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type arising in diffusion theory and in finance // Nonlinear Problems in Mathematical Physics and Related Topics II. In honour of Prof. O. A. Ladyzhenskaya. — New York, NY: Kluwer Acad. Publ., 2002. — P. 243 – 265.
3. *Ivanchov M. I.* Inverse problems for equations of parabolic type // Math. Stud. Monogr. Ser. — 2003. — 238 p.
4. *Cannon J. R.* Determination of an unknown heat source from overspecified boundary data // SIAM J. Numer. Anal. — 1968. — **5**, № 2. — P. 275 – 286.
5. *Искендеров А. Д.* Некоторые обратные задачи об определении правых частей дифференциальных уравнений // Изв. АН АзССР. Сер. физ-тех. и мат. наук. — 1976. — № 2. — С. 58 – 63.
6. *Lorenzi A., Prilepko A. I.* Global existence results for first-order integrodifferential identification problems // Rend. Semin. mat. Univ. Padova. — 1996. — **96**. — P. 51 – 84.
7. *Бейлина Н. В.* О разрешимости обратной задачи для гиперболического уравнения с интегральным условием переопределения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2011. — **23**, № 2. — С. 34 – 39.
8. *Borukhov V. T., Vabishchevich P. N.* Numerical solution of the inverse problem of recovering a distributed right-hand side of a parabolic equation // Comput. Phys. Communs. — 2000. — **126**. — P. 32 – 36.
9. *Kozhanov A. I.* An inverse problem with an unknown coefficient and right-hand side for a parabolic equation II // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2003. — **11**, № 5. — P. 505 – 522.

10. *Камынин В. Л.* Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения // Мат. заметки. — 2005. — **77**, № 4. — С. 522 – 534.

11. *Сафиуллова Р. Р.* О разрешимости линейной обратной задачи нахождения правой части составного вида в гиперболическом уравнении // Вестн. ЮУрГУ. Серия Мат. моделирование и программирование. — 2009. — **170**, № 37. — С. 93 – 105.

12. *Кожанов А. И.* Задача определения решения и правой части специального вида в параболическом уравнении // Обратные задачи и информационные технологии. — 2002. — **1**, № 3. — С. 13 – 41.

13. *Lavrenyuk S., Protsakh N.* Boundary value problem for nonlinear ultraparabolic equation in unbounded with respect to time variable domain // Tatra Mt. Math. Publ. — 2007. — **38**. — P. 131 – 146.

14. *Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння, яке узагальнює рівняння дифузії з інерцією // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 9. — С. 1192 – 1210.

15. *Protsakh N.* Properties of solution for mixed problem for ultraparabolic equation with the memory term // Укр. мат. вісн. — 2012. — **9**, № 1. — С. 98 – 113.

16. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — 407 с.

17. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 336 с.

Одержано 14.04.13,
після доопрацювання — 29.01.15