УДК 517.9

ПРО СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З НЕФІКСОВАНИМИ МОМЕНТАМИ ІМПУЛЬСНОЇ ДІЇ

А. В. Дворник, В. І. Ткаченко

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01601, Україна
e-mail: a.dvornyk@gmail.com
vitk@imath.kiev.ua

We obtain conditions for stability of a bounded solution of a nonlinear evolution equation, in an abstract Banach space, with a sectorial operator in the linear part of the equation and unfixed times of impulsive effects.

В абстрактном банаховом пространстве получены условия устойчивости ограниченного решения нелинейного эволюционного уравнения с секториальным оператором в линейной части и нефиксированными моментами импульсного воздействия.

Вступ. У даній роботі ми досліджуємо еволюційне рівняння з нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t,u), \quad t \neq \tau_j(u), \tag{1}$$

$$u(\tau_j(u)+0) - u(\tau_j(u)) = g_j(u), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

де $u : \mathbb{R} \to X$, X — банаховий простір, A — секторіальний оператор в X, послідовність $\{\tau_j(u)\}$ функцій $X \to \mathbb{R}$ є строго зростаючою для u з деякої області простору X.

Наскільки відомо авторам, першою роботою, присвяченою вивченню імпульсних еволюційних рівнянь з секторіальним оператором, був препринт [1]. Останнім часом еволюційні рівняння в банаховому просторі з фіксованими моментами імпульсної дії привертають увагу багатьох дослідників (див., наприклад, [2–11]).

Складність дослідження рівняння (1), (2) з нефіксованими моментами імпульсної дії пов'язана з тим, що розв'язки, які мають різні початкові значення, мають також і різні точки розривів, оскільки моменти імпульсної дії рівняння (1), (2) залежать від розв'язків. Також у таких рівняннях може з'являтися так званий феномен биття, тобто розв'язок може перетинати поверхню $t = \tau_k(u)$ кілька разів [12–14].

Метою даної роботи є знаходження умов стійкості обмеженого розв'язку рівняння (1), (2). Означення стійкості для рівнянь з нефіксованими моментами імпульсної дії є відмінним від означення стійкості для рівнянь з фіксованими моментами імпульсної дії і враховує відмінність точок розриву різних розв'язків рівняння. Ми використовуємо означення з [16]. При дослідженні еволюційного рівняння також потрібно враховувати непродовжуваність розв'язків на від'ємну піввісь.

Нехай $(X, \|.\|)$ — абстрактний банаховий простір, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{Z}$ — множини відповідно дійсних і цілих чисел.

Позначимо через $\mathcal{PC}(J,X)$, $J\subset\mathbb{R}$, простір усіх кусково-неперервних функцій $x : J \to \to X$ таких, що:

i) множина $T=\{t_j\in J, t_{j+1}>t_j, j\in\mathbb{Z}\}$ є множиною розривів функції x;

ii) функції неперервні зліва $x(t_j-0)=x(t_j)$ та існують границі $\lim_{t\to t_j+0}x(t)=x(t_j+ +0)<\infty$.

Будемо використовувати норму $\|x\|_{PC}=\sup_{t\in J}\|x(t)\|$ у просторі $\mathcal{PC}(J,X)$.

Припустимо, що рівняння (1), (2) задовольняє умови:

$(\mathbf{H_1})$ A — секторіальний оператор в X і $\inf\{\operatorname{Re}\mu : \mu\in\sigma(A)\}\geq\delta>0$, де $\sigma(A)$ — спектр A. Для оператора A означаються степені; будемо розглядати простори $X^\alpha = =D(A^\alpha)$, утворені областями означення операторів A^α, $\alpha\geq 0$, з нормою $\|x\|_\alpha=\|A^\alpha x\|$;

$(\mathbf{H_2})$ нехай $U_\varrho^\alpha=\{x\in X^\alpha : \|x\|_\alpha\leq\varrho\}$; припускаємо, що функції $\tau_j : U_\varrho^\alpha\to\mathbb{R}$ задовольняють умову Ліпшиця

$$|\tau_j(u_1)-\tau_j(u_2)|\leq N_1\|u_1-u_2\|_\alpha,\quad j\in\mathbb{Z},$$

і рівномірно по $u\in U_\varrho^\alpha$ існують $\theta>0$ і $\Theta>0$ такі, що $\inf_u\tau_{j+1}(u)-\sup_u\tau_j(u)\geq\theta>0$ та $\sup_u\tau_{j+1}(u)-\inf_u\tau_j(u)\leq\Theta$ для $j\in\mathbb{Z}$;

$(\mathbf{H_3})$ функція $f(t,u) : \mathbb{R}\times U_\varrho^\alpha\to X$ обмежена і неперервно диференційовна по u, локально гельдерова по t рівномірно відносно $u\in U_\varrho^\alpha$ та має розриви першого роду при $t=\tau_j(u)$;

$(\mathbf{H_4})$ функції $g_j(u) : U_\varrho^\alpha\to X^1=D(A)$ неперервні, рівномірно обмежені і ліпшицеві, $\|g_j(u_1)-g_j(u_2)\|_\alpha\leq N_1\|u_1-u_2\|_\alpha$ при $u\in U_\varrho^\alpha$ і $j\in\mathbb{Z}$.

Якщо оператор A секторіальний з обмеженим оберненим, то $(-A)$ є інфінітезимальним генератором аналітичної напівгрупи e^{-At}. Для всіх $x\in X^\alpha$ справджується рівність $e^{-At}A^\alpha x=A^\alpha e^{-At}x$. Ми будемо використовувати оцінки (див. [17]):

$$\|A^\alpha e^{-At}\|\leq C_\alpha t^{-\alpha}e^{-\delta t},\quad t>0,\quad \alpha>0,$$

$$\|(e^{-At}-I)u\|\leq\frac{1}{\alpha}C_{1-\alpha}t^\alpha\|A^\alpha u\|,\quad t>0,\quad\alpha\in(0,1],\quad u\in X^\alpha,$$

де $C_\alpha>0$ обмежена при $\alpha\to+0$.

При дослідженні стійкості розв'язків імпульсних еволюційних рівнянь будемо використовувати наступну версію узагальненої нерівності Гронуолла.

Лема. *Нехай $0<\alpha,\beta<1$, $a_1\geq 0$, $a_2\geq 0$, $b>0$, $0<Q<\infty$ і локально інтегровна на $0\leq t\leq Q$ невід'ємна функція $y(t)$ задовольняє на цьому інтервалі нерівність*

$$y(t)\leq a_1+a_2t^{-\alpha}+b\int\limits_0^t(t-s)^{\beta-1}y(s)ds.$$

Тоді існує додатна стала $\tilde C=\tilde C(\beta,b,Q)<\infty$ така, що

$$y(t)\leq\left(a_1+\frac{a_2}{(1-\alpha)t^\alpha}\right)\tilde C(\beta,b,Q). \tag{3}$$

Доведення. З доведення леми 7.1.1 з [17, с. 188] випливає наступне: якщо невід'ємна локально інтегровна на $0 \le t < Q$ функція $y(t)$ задовольняє нерівність

$$y(t) \le a(t) + b \int_0^t (t-s)^{\beta-1} y(s)\, ds$$

з локально інтегровною функцією $a(t) \ge 0$ і додатною сталою b, то $y(t)$ задовольняє також нерівність

$$y(t) \le a(t) + \int_0^t \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b\Gamma(\beta))^n (t-s)^{n\beta-1} / \Gamma(n\beta) \right\} a(s) ds, \tag{4}$$

де $\Gamma(\beta)$ — гамма-функція.

Якщо $a(t) = a_1 = \mathrm{const}$, то, використовуючи (4), отримуємо

$$y(t) \le a_1 + a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(n\beta)} t^{n\beta} (n\beta)^{-1}.$$

Якщо $a(t) = a_2 t^{-\alpha}$, то

$$y(t) \le a_2 t^{-\alpha} + \frac{a_2 t^{-\alpha}}{1-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(n\beta)} t^{n\beta} 2^{\alpha - n\beta} \left(1 + \frac{1-\alpha}{n\beta} \right).$$

Отже, за функцію $\tilde{C}$ можна вибрати

$$\tilde{C} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(n\beta)} Q^{n\beta} \max\{(n\beta)^{-1}, 2^{1-n\beta}(1 + (n\beta)^{-1})\}.$$

Відмітимо також, що нерівність (3) можна записати так:

$$y(t) \le \left(a_1 + \frac{a_2}{t^\alpha} \right) \tilde{C}_1, \quad \tilde{C}_1 = \frac{\tilde{C}(\beta, b, Q)}{1-\alpha}. \tag{5}$$

Лему доведено.

Під розв'язком рівняння без імпульсної дії (1) розуміємо класичний розв'язок, тобто неперервно диференційовну функцію $u(t) \in D(A)$, яка при підстановці у співвідношення (1) перетворює його в тотожність. За теоремою 3.3.3 [17] (див. також [18, с. 196]) для кожної початкової точки $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times U_\varrho^\alpha$ рівняння (1) має єдиний локальний розв'язок $u(t)$, $u(t_0) = u_0$. Припускаємо, що розв'язки існують для всіх $t \ge t_0$. Це досягається, наприклад, при виконанні умов теореми 3.3.5 [17].

За теоремою 3.5.2 [17] для $\gamma < 1$ і $t_0 < t_1 \le t_0 + Q$ функція

$$t \to \frac{du}{dt}(t) \in X^\gamma$$

локально гельдерова при $t_0 < t \leq t_1$ і

$$\left\| \frac{du}{dt} \right\|_\gamma \leq \tilde{K}_1 (t - t_0)^{\alpha - \gamma - 1}, \tag{6}$$

де $\tilde{K}_1 = \tilde{K}_1(\gamma, Q) > 0$.

Означення 1. *Функція $u(t) : [t_0, t_1] \to X^\alpha$ є розв'язком початкової задачі $u(t_0) = u_0 \in \in X^\alpha$ для рівняння (1), (2) на відрізку $[t_0, t_1]$, якщо вона:*

(i) неперервна на відрізках $[t_0, \tau_k], (\tau_k, \tau_{k+1}], \ldots, (\tau_{k+s}, t_1]$ з розривами першого роду в моменти $t = \tau_j$ перетину з поверхнями імпульсів, $t_0 < \tau_k < \ldots < \tau_{k+s} < t_1$;

(ii) неперервно диференційовна на інтервалах (t_0, τ_k), $(\tau_k, \tau_{k+1}), \ldots, (\tau_{k+s}, t_1)$ і задовольняє рівняння (1) при $t \in (t_0, t_1), t \neq \tau_j$, та різницеві співвідношення (2) при $t = \tau_j$;

(iii) задовольняє початкову умову $u(t_0) = u_0$.

Ми припускаємо, що розв'язки $u(t)$ рівняння (1), (2) неперервні зліва, тоді $u(\tau_j) = = u(\tau_j - 0)$ при всіх точках імпульсної дії.

Ми також припускаємо, що в області U_ϱ^α розв'язки рівняння (1), (2) не мають биття з поверхнями $t = \tau_j(u)$, тобто, іншими словами, розв'язки перетинають кожну поверхню $t = \tau_j(u)$ не більше одного разу. Для імпульсних систем у скінченновимірному просторі є кілька достатніх умов відсутності биття [14, 15]. Деякі з них можна поширити на абстрактні системи (1), (2). В інших випадках перевірка умов відсутності биття у нескінченновимірному просторі вимагає конкретного дослідження.

Означення 2. *Розв'язок $u_0(t)$ рівняння (1), (2), означений для всіх $t \geq t_0$, називається стійким за Ляпуновим у просторі X^α, якщо для довільних $\varepsilon > 0$ і $\eta > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, \eta)$ таке, що довільний інший розв'язок $u(t)$ з початковою умовою $\|u_0(t_0) - u(t_0)\|_\alpha < \delta$ задовольняє нерівність $\|u_0(t) - u(t)\|_\alpha < \varepsilon$ для всіх $t \geq t_0$ таких, що $|t - \tau_j^0| > \eta$, де τ_j^0 — точки, в яких розв'язок $u_0(t)$ перетинає поверхні $t = \tau_j(u)$, $j \in \mathbb{Z}$.*

Розв'язок $u_0(t)$ називається атрактивним, якщо для довільних $\varepsilon > 0, \eta > 0$ і $t_0 \in \mathbb{R}$ існують $\delta_0 = \delta_0(t_0)$ і $T = T(\delta_0, \varepsilon, \eta) > 0$ такі, що для кожного іншого розв'язку $u(t)$ системи з $\|u_0(t_0) - u(t_0)\|_\alpha < \delta_0$ випливає $\|u_0(t) - u(t)\|_\alpha < \varepsilon$ для $t \geq t_0 + T$ і $|t - \tau_k^0| > \eta$.

Розв'язок $u_0(t)$ називається асимптотично стійким, якщо він стійкий і атрактивний.

Нехай рівняння (1), (2) має обмежений на осі розв'язок $u_0(t)$. Для дослідження його стійкості виконаємо у рівнянні заміну змінних $u = u_0(t) + z$. Тоді $z(t)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{dz}{dt} + (A + A_1(t))z = \tilde{f}(t, z) \tag{7}$$

та різницеві співвідношення у точках перетину розв'язків $u_0(t)$ і $u_0(t) + z(t)$ з поверхнями $\tau_j(u), j \in \mathbb{Z}$:

$$z(\tilde{\tau}_j(z) + 0) - z(\tilde{\tau}_j(z)) = \tilde{g}_j(z), \tag{8}$$

$$z(\tilde{\tau}_j^0 + 0) - z(\tilde{\tau}_j^0) = \tilde{g}_j^0, \tag{9}$$

де

$$\tilde{\tau}_j^0 = \tau_j(u_0(\tilde{\tau}_j^0)), \quad \tilde{\tau}_j(z) = \tau_j(u_0(\tilde{\tau}_j(z)) + z(\tilde{\tau}_j(z))),$$

$$\tilde{f}(t,z) = f(t,u_0(t)+z) - f(t,u_0(t)) + A_1(t)z, \quad A_1(t)z = \frac{\partial}{\partial u} f(t,u_0(t))z,$$

$$\tilde{g}_j^0 = -g_j(u_0(\tilde{\tau}_j^0)), \quad \tilde{g}_j(z) = g_j(u_0(\tilde{\tau}_j(z)) + z(\tilde{\tau}_j(z))).$$

Припустимо, що існує неспадна функція K_ξ, $0 \le \xi \le \varrho$, така, що $K_\xi \to 0$ при $\xi \to 0$ і рівномірно по $t \in \mathbb{R}$

$$\|\tilde{f}(t,z)\| \le K_\xi \|z\|_\alpha, \quad \|z\|_\alpha \le \xi. \tag{10}$$

Позначимо $M_0 = K_\varrho$, отже, $\sup_{t\in\mathbb{R}, \|z\|_\alpha \le \varrho} \|\tilde{f}(t,z)\| \le M_0 \varrho$.

Поряд з рівнянням (1), (2) розглянемо лінійне однорідне рівняння

$$\frac{du}{dt} + (A + A_1(t))u. \tag{11}$$

Будемо припускати, що $A_1(t)$ задовольняє умову

($\mathbf{H_5}$) функція $A_1(t) : \mathbb{R} \to L(X^\alpha, X)$, $\alpha \ge 0$, локально ліпшицева.

Позначимо через $U(t,s)$ еволюційний оператор лінійного рівняння (11). Він задовольняє умови $U(\tau,\tau) = I$, $U(t,s)U(s,\tau) = U(t,\tau)$, $t \ge s \ge \tau$.

За теоремою 7.1.3 [17, с. 190] функція $U(t,\tau)$ неперервна зі значеннями в $L(X^\gamma)$ для всіх $0 \le \gamma < 1$ і

$$\|U(t,\tau)x\|_\gamma \le L_Q (t-\tau)^{(\nu-\gamma)_-} \|x\|_\nu,$$

де $(\nu-\gamma)_- = \min(\nu-\gamma, 0)$, $t - \tau \le Q$, $L_Q = L_Q(Q)$. Крім того,

$$\|U(t,\tau)x - x\|_\gamma \le L_Q (t-\tau)^\nu \|x\|_{\gamma+\nu}, \quad \nu > 0, \quad \gamma + \nu \le 1.$$

Означення 3. *Лінійне рівняння (11) називається експоненціально стійким у X^α зі сталими $\beta > 0$ і $M \ge 1$, якщо для всіх $u \in X^\alpha$ виконується*

$$\|U(t,\tau)u\|_\alpha \le M e^{-\beta(t-\tau)} \|u\|_\alpha, \quad t \ge \tau.$$

Також існує додатна стала M_1 (залежна від α, δ, γ) така, що

$$\|U(t,s)u\|_\gamma \le M_1 e^{-\beta(t-s)} \max\{1, (t-s)^{\delta-\gamma}\} \|x\|_\delta, \quad t > s, \tag{12}$$

де $0 \le \delta \le \gamma < 1$ (див. [17, с. 226]).

Теорема. *Припустимо, що рівняння (1), (2) в області $U_\varrho^\alpha = \{u \in X^\alpha, \|u\|_\alpha \le \varrho\}$ з деяким фіксованим $\alpha \ge 0$ задовольняє умови (H_1) – (H_4) і має обмежений на осі розв'язок $u_0(t)$ такий, що виконується (10) і умова (H_5). Нехай також:*

1) усі розв'язки в області U_ϱ^α перетинають поверхні $t = \tau_j(u)$ не більше одного разу;

2) відповідне лінійне рівняння у варіаціях (11) експоненціально стійке в X^α зі сталими $\beta > 0$ та $M \ge 1$.

Тоді при досить малому $N_1 > 0$ розв'язок $u_0(t)$ є асимптотично стійким.

Доведення. Зафіксуємо довільні $\varepsilon > 0$ і $\eta > 0$. Нехай $t_0 \in [\tilde{\tau}_0^0 + \eta, \tilde{\tau}_1^0 - \eta]$ і $u_0(t_0) = u_0$. Виберемо $u_1 \in X^\alpha$ так, що $\|u_0 - u_1\|_\alpha < \delta$ з деяким $\delta > 0$. Розв'язок $z(t)$ рівняння (7) – (9) з початковим значенням $z_0 = z(t_0) = u_0 - u_1$ задовольняє інтегральне рівняння

$$z(t) = U(t,t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t} U(t,s)\tilde{f}(s,z(s))ds + \sum_{t_0<\tilde{\tau}_j^0<t} U(t,\tilde{\tau}_j^0)\tilde{g}_j^0 + \sum_{t_0<\tilde{\tau}_j^1<t} U(t,\tilde{\tau}_j^1)\tilde{g}_j(z(\tilde{\tau}_j^1)), \quad (13)$$

де $\tilde{\tau}_j^1 = \tau_j(u_0(\tilde{\tau}_j^1) + z(\tilde{\tau}_j^1))$.

На інтервалі без імпульсів розв'язок $z(t)$ задовольняє нерівність

$$\|z(t)\|_\alpha \le \|U(t,t_1)z(t_1)\|_\alpha + \int_{t_1}^{t} \|A^\alpha U(t,t_1)\tilde{f}(s,z(s))\|ds \le$$

$$\le M_1 e^{-\beta(t-t_1)}\|z(t_1)\|_\alpha + \int_{t_1}^{t} \frac{M_1 M_0 e^{-\beta(t-s)}}{(t-s)^\alpha}\,\|z(s)\|_\alpha\,ds.$$

Тоді за доведеною лемою

$$\|z(t)\|_\alpha \le M_1\tilde{C}e^{-\beta(t-t_1)}\|z(t_1)\|_\alpha, \quad t - t_1 \le Q. \quad (14)$$

Отже, якщо початкові дані належать до обмеженої області з X^α, то відповідні розв'язки рівномірно обмежені для t з обмеженого інтервалу.

Позначимо

$$\mathcal{J} = \cup_j \mathcal{J}_j, \quad \mathcal{J}_j = (\max\{\tilde{\tau}_{j-1}^0, \tilde{\tau}_{j-1}^1\}, \min\{\tilde{\tau}_j^0, \tilde{\tau}_j^1\}] = (\tilde{\tau}_{j-1}'', \tilde{\tau}_j'].$$

Покажемо, що при достатньо малому N_1 різниця $\left|\tilde{\tau}_j^1 - \tilde{\tau}_j^0\right|$ оцінюється через $z(\tilde{\tau}_j')$ так:

$$|\tilde{\tau}_j^0 - \tilde{\tau}_j^1| \le \frac{N_1}{1 - \tilde{K}_1 N_1 \theta^{-1}}\,\|z(\tilde{\tau}_j')\|_\alpha = \tilde{K}_2 N_1 \|z(\tilde{\tau}_j')\|_\alpha. \quad (15)$$

Припустимо, що $\tilde{\tau}_j^0 \ge \tilde{\tau}_j^1 = \tilde{\tau}_j'$. Тоді, використовуючи (6), отримуємо

$$|\tilde{\tau}_j^1 - \tilde{\tau}_j^0| \le N_1\|u_0(\tilde{\tau}_j^1) + z(\tilde{\tau}_j^1) - u_0(\tilde{\tau}_j^0)\|_\alpha \le N_1\|z(\tilde{\tau}_j^1)\|_\alpha + N_1\left\|\int_{\tilde{\tau}_j^1}^{\tilde{\tau}_j^0} \frac{d}{d\xi}u_0(\xi)d\xi\right\|_\alpha \le$$

$$\le N_1\|z(\tilde{\tau}_j^1)\|_\alpha + \theta^{-1}\tilde{K}_1 N_1 |\tilde{\tau}_j^0 - \tilde{\tau}_j^1|.$$

Отже, виконується (15).

Якщо $\tilde{\tau}_j^1 \geq \tilde{\tau}_j^0 = \tilde{\tau}_j'$, то

$$|\tilde{\tau}_j^1 - \tilde{\tau}_j^0| \leq N_1 \|u_0(\tilde{\tau}_j^1) + z(\tilde{\tau}_j^1) - u_0(\tilde{\tau}_j^0)\|_\alpha \leq$$

$$\leq N_1 \|u_0(\tilde{\tau}_j^1) + z(\tilde{\tau}_j^1) - u_0(\tilde{\tau}_j^0) - z(\tilde{\tau}_j^0) + z(\tilde{\tau}_j^0)\|_\alpha \leq$$

$$\leq N_1 \|z(\tilde{\tau}_j^0)\|_\alpha + N_1 \|u(\tilde{\tau}_j^1) - u(\tilde{\tau}_j^0)\|_\alpha \leq N_1 \|z(\tilde{\tau}_j^0)\|_\alpha + N_1 \left\| \int\limits_{\tilde{\tau}_j^0}^{\tilde{\tau}_j^1} \frac{d}{d\xi} u(\xi) d\xi \right\|_\alpha,$$

оскільки за означенням $u(\xi) = u_0(\xi) + z(\xi)$. Звідси отримуємо (15). З останніх формул також отримуємо оцінку

$$\|u_0(\tilde{\tau}_j^1) + z(\tilde{\tau}_j^1) - u_0(\tilde{\tau}_j^0)\|_\alpha \leq \|z(\tilde{\tau}_j')\|_\alpha + \theta^{-1} \tilde{K}_1 |\tilde{\tau}_j^1 - \tilde{\tau}_j^0| \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{\theta^{-1} N_1 \tilde{K}_1}{1 - \theta^{-1} N_1 \tilde{K}_1}\right) \|z(\tilde{\tau}_j')\|_\alpha \leq \tilde{K}_3 \|z(\tilde{\tau}_j')\|_\alpha. \tag{16}$$

Для $t \in (\tilde{\tau}_i'', \tilde{\tau}_{i+1}']$ маємо

$$\|z(t)\|_\alpha = \|U(t,t_0) z_0\|_\alpha + \int\limits_{t_0}^{t} \|U(t,s) \tilde{f}(s, z(s))\|_\alpha ds +$$

$$+ \left\| \sum_{t_0 < \tilde{\tau}_j^0 < t} U(t, \tilde{\tau}_j^0) \tilde{g}_j^0 + \sum_{t_0 < \tilde{\tau}_j^1 < t} U(t, \tilde{\tau}_j^1) \tilde{g}_j(z(\tilde{\tau}_j^1)) \right\|_\alpha \leq \|U(t,t_0) z_0\|_\alpha +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\tilde{\tau}_1'} \|U(t,s) \tilde{f}(s, z(s))\|_\alpha ds + \sum_{j=1}^{i-1} \int\limits_{\tilde{\tau}_j''}^{\tilde{\tau}_{j+1}'} \|U(t,s) \tilde{f}(s, z(s))\|_\alpha ds +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i} \int\limits_{\tilde{\tau}_j'}^{\tilde{\tau}_j''} \|U(t,s) \tilde{f}(s, z(s))\|_\alpha ds + \int\limits_{\tilde{\tau}_i''}^{t} \|U(t,s) \tilde{f}(s, z(s))\|_\alpha ds +$$

$$+ \left\| \sum_{t_0 < \tilde{\tau}_j^0 < t} U(t, \tilde{\tau}_j^0) \tilde{g}_j^0 + \sum_{t_0 < \tilde{\tau}_j^1 < t} U(t, \tilde{\tau}_j^1) \tilde{g}_j(z(\tilde{\tau}_j^1)) \right\|_\alpha. \tag{17}$$

На інтервалі $[t_0, \tilde{\tau}_1']$ розв'язок $z(t)$ задовольняє оцінку

$$\|z(t)\|_\alpha \leq M_1 \tilde{C} e^{-\beta(t-t_0)} \|z_0\|_\alpha, \quad t \in [t_0, \tilde{\tau}_1']. \tag{18}$$

Для $t \in (\tilde\tau_1'', \tilde\tau_2']$ нерівність (17) набирає вигляду

$$\|z(t)\|_\alpha \le \|U(t,t_0)z_0\|_\alpha + \int\limits_{t_0}^{\tilde\tau_1'} \|U(t,s)\tilde f(s,z(s))\|_\alpha ds + \int\limits_{\tilde\tau_1'}^{\tilde\tau_1''} \|U(t,s)\tilde f(s,z(s))\|_\alpha ds +$$

$$+ \int\limits_{\tilde\tau_1''}^{t} \|U(t,s)\tilde f(s,z(s))\|_\alpha ds + \|U(t,\tilde\tau_1^0)\tilde g_1^0 + U(t,\tilde\tau_1^1)\tilde g_j(z(\tilde\tau_1^1))\|_\alpha. \tag{19}$$

Використовуючи (12), (15) і (16), виконуємо перетворення

$$\int\limits_{\tilde\tau_1'}^{\tilde\tau_1''} \|U(t,s)\tilde f(s,z(s))\|_\alpha ds + \|U(t,\tilde\tau_1^0)\tilde g_1^0 + U(t,\tilde\tau_1^1)\tilde g_j(z(\tilde\tau_1^1))\|_\alpha \le$$

$$\le \|A^\alpha U(t,\tilde\tau_1'')\| \int\limits_{\tilde\tau_1'}^{\tilde\tau_1''} \|U(\tilde\tau_1'',s)\tilde f(s,z(s))\| ds + \|U(t,\tilde\tau_1^1)(\tilde g_j(z(\tilde\tau_1^1)) + \tilde g_j^0)\|_\alpha +$$

$$+ \|(U(t,\tilde\tau_1^0) - U(t,\tilde\tau_1^1))\tilde g_j^0\|_\alpha \le M_1 e^{-\beta(t-\tilde\tau_1'')}|t-\tilde\tau_1''|^{-\alpha} M M_0 \varrho |\tilde\tau_1'' - \tilde\tau_1'| +$$

$$+ N_1 \|U(t,\tilde\tau_1^1)\|_\alpha \|u_0(\tilde\tau_1^1) + z(\tilde\tau_1^1) - u_0(\tilde\tau_1^0)\|_\alpha + \|U(t,\tilde\tau_1'')(I - U(\tilde\tau_1'',\tilde\tau_1'))\tilde g_j^0\|_\alpha \le$$

$$\le M_1 e^{-\beta(t-\tilde\tau_1'')} \left(M M_0 \varrho \frac{|\tilde\tau_1'' - \tilde\tau_1'|}{|t-\tilde\tau_1''|^\alpha} + \tilde K_3 N_1 \|z(\tilde\tau_1')\|_\alpha + C_0 \frac{|\tilde\tau_1'' - \tilde\tau_1'|}{|t-\tilde\tau_1''|^\alpha} \|\tilde g_1^0\|_1 \right) \le$$

$$\le M_1 N_1 e^{-\beta(t-\tilde\tau_1'')} \left(\tilde K_4 + \frac{\tilde K_5}{|t-\tilde\tau_1''|^\alpha} \right) \|z(\tilde\tau_1')\|_\alpha \le$$

$$\le P_1 N_1 e^{-\beta(t-\tilde\tau_1'')} |t-\tilde\tau_1''|^{-\alpha} \|z(\tilde\tau_1')\|_\alpha, \quad t \in (\tilde\tau_1'', \tilde\tau_2'], \tag{20}$$

з деякою додатною сталою P_1. Припускаючи, що $\|z(t)\|_\alpha \le \xi$ при $t \in [t_0, \tilde\tau_1']$, і підставляючи (18) і (20) в (19), для $t \in (\tilde\tau_1'', \tilde\tau_2']$ отримуємо

$$\|z(t)\|_\alpha \le M_1 e^{-\beta(t-t_0)} \|z_0\|_\alpha + \frac{M_1 K_\xi L_Q}{(t-\tilde\tau_1'')^\alpha} e^{-\beta(t-\tilde\tau_1'')} \int\limits_{t_0}^{\tilde\tau_1'} \|z(s)\|_\alpha ds +$$

$$+ P_1 N_1 e^{-\beta(t-\tilde\tau_1'')} (t-\tilde\tau_1'')^{-\alpha} \|z(\tilde\tau_1')\|_\alpha + \int\limits_{\tilde\tau_1''}^{t} M_1 M_0 e^{-\beta(t-s)} (t-s)^{-\alpha} \|z(s)\|_\alpha ds \le$$

$$\le M_1 e^{-\beta(t-t_0)} \|z_0\|_\alpha \left(1 + \frac{\tilde C(M_2 K_\xi \tilde Q + P_2 N_1)}{(t-\tilde\tau_1'')^\alpha} \right) + \int\limits_{\tilde\tau_1''}^{t} \frac{M_1 M_0}{(t-s)^\alpha} e^{-\beta(t-s)} \|z(s)\|_\alpha ds,$$

де

$$M_2 = L_Q M_1 e^{\beta \sup_j |\tilde\tau''_{j+1} - \tilde\tau'_j|}, \quad P_2 = P_1 e^{\beta \sup_j |\tilde\tau''_j - \tilde\tau'_j|}, \quad \tilde Q = \max_j \{1, (\tilde\tau'_{j+1} - \tilde\tau''_j)\}.$$

Позначимо також $\tilde\theta = \min_j\{1, (\tilde\tau'_{j+1} - \tilde\tau''_j)\}$.

Отже, для $v(t) = e^{\beta t}\|z(t)\|_\alpha$ маємо

$$v(t) \le M_1 v(t_0) \left(1 + \frac{\tilde C(M_2 K_\xi \tilde Q + P_2 N_1)}{(t - \tilde\tau''_1)^\alpha}\right) + \int\limits_{\tilde\tau''_1}^{t} \frac{M_2 M_0}{(t-s)^\alpha}\, v(s)\, ds.$$

За доведеною лемою (формула (5))

$$\|z(t)\|_\alpha \le M_1 \tilde C_1 \|z_0\|_\alpha e^{-\beta(t-t_0)} \left(1 + \frac{\tilde C(M_2 K_\xi \tilde Q + P_2 N_1)}{(t - \tilde\tau''_1)^\alpha}\right), \quad t \in (\tilde\tau''_1, \tilde\tau'_2]. \tag{21}$$

Припустимо, що при $t \in [t_0, \tilde\tau'_i]$ розв'язок $u(t)$ лежить в U^α_ϱ так, що $\|z(t)\|_\alpha = \|u(t) - -u_0(t)\|_\alpha \le \xi$ для $t \in \cup_{j=1}^{i} \mathcal{J}_j$ з деяким $\xi > 0$. Проводячи аналогічні (20) перетворення у (17), для $t \in \mathcal{J}_{i+1}$ одержуємо

$$\|z(t)\|_\alpha \le M_1 e^{-\beta(t-t_0)} \|z_0\|_\alpha + \int\limits_{t_0}^{\tilde\tau'_1} M_1 K_\xi L_Q e^{-\beta(t-\tilde\tau''_1)} \|z(s)\|_\alpha ds +$$

$$+ \sum_{j=2}^{i-1} \int\limits_{\tilde\tau''_{j-1}}^{\tilde\tau'_j} M_1 K_\xi L_Q e^{-\beta(t-\tilde\tau''_j)} \|z(s)\|_\alpha ds + \sum_{j=1}^{i-1} P_1 N_1 e^{-\beta(t-\tilde\tau''_j)} \|z(\tilde\tau'_j)\|_\alpha +$$

$$+ \frac{1}{(t-\tilde\tau''_i)^\alpha} \left(\int\limits_{\tilde\tau''_{i-1}}^{\tilde\tau'_i} M_1 K_\xi L_Q e^{-\beta(t-\tilde\tau''_i)} \|z(s)\|_\alpha ds + P_1 N_1 e^{-\beta(t-\tilde\tau''_i)} \|z(\tilde\tau'_i)\|_\alpha \right) +$$

$$+ \int\limits_{\tau''_i}^{t} M_1 M_0 e^{-\beta(t-s)} (t-s)^{-\alpha} \|z(s)\|_\alpha\, ds. \tag{22}$$

Доведемо, що якщо $\|z(t)\|_\alpha \le \xi$ при $t \in \cup_{j=1}^{i-1} \mathcal{J}_j$, то

$$\|z(t)\|_\alpha \le M_1 \tilde C_1 \|z_0\|_\alpha e^{-\beta(t-t_0)} \left(1 + \frac{\tilde C_1(M_2 K_\xi + P_2 N_1)}{(t-\tilde\tau''_{i-1})^\alpha}\right) \left(1 + \frac{\tilde C_1(M_2 \tilde Q K_\xi + P_2 N_1)}{(1-\alpha)\tilde\theta^\alpha}\right)^{i-2} \tag{23}$$

для $t \in (\tilde\tau''_{i-1}, \tilde\tau'_i]$. Застосуємо метод математичної індукції.

Припустимо, що нерівність (23) виконується для $t \in \cup_{j=1}^{n}\mathcal{J}_j$, і доведемо її для $t \in \in (\tilde\tau_n'', \tilde\tau_{n+1}']$. Підставляючи у (22) нерівність (18) для $t \in [t_0, \tilde\tau_1']$ і нерівність (23) для $t \in \in [\tilde\tau_{j-1}'', \tilde\tau_j']$, $j = 2, \ldots, n$, для $t \in (\tilde\tau_n'', \tilde\tau_{n+1}']$ отримуємо

$$\begin{aligned}
\|z(t)\|_\alpha \le{} & M_1 e^{-\beta(t-t_0)}\|z_0\|_\alpha \Bigg\{ \Big(1 + \tilde C_1 (e^{\beta(\tilde\tau_1''-t_0)} M_1 L_Q \tilde Q K_\xi + e^{\beta(\tilde\tau_1''-\tilde\tau_1')} P_1 N_1)\Big) + \\
& + \sum_{j=2}^{n-1} \int\limits_{\tilde\tau_{j-1}''}^{\tilde\tau_j'} M_1 L_Q K_\xi \tilde C_1 e^{\beta(\tilde\tau_j''-\tilde\tau_{j-1}'')} \mathcal{A}_\xi^{j-2} \left(1 + \frac{\tilde C_1 (M_2 K_\xi \tilde Q + P_2 N_1)}{(s-\tilde\tau_{j-1}'')^\alpha}\right) ds + \\
& + \sum_{j=2}^{n-1} P_1 N_1 \tilde C_1 e^{\beta(\tilde\tau_j''-\tilde\tau_j')} \mathcal{A}_\xi^{j-2} \left(1 + \frac{\tilde C_1 (M_2 K_\xi \tilde Q + P_2 N_1)}{(\tilde\tau_j'-\tilde\tau_{j-1}'')^\alpha}\right) + \\
& + \frac{1}{(t-\tilde\tau_n'')^\alpha} \int\limits_{\tilde\tau_{n-1}''}^{\tilde\tau_n'} M_1 L_Q K_\xi \tilde C_1 e^{\beta(\tilde\tau_n''-\tilde\tau_{n-1}'')} \mathcal{A}_\xi^{n-2} \left(1 + \frac{\tilde C_1 (M_2 K_\xi \tilde Q + P_2 N_1)}{(s-\tilde\tau_{n-1}'')^\alpha}\right) ds + \\
& + \frac{1}{(t-\tilde\tau_n'')^\alpha} P_1 N_1 \tilde C_1 e^{\beta(\tilde\tau_n''-\tilde\tau_n')} \mathcal{A}_\xi^{n-2} \left(1 + \frac{\tilde C_1 (M_2 K_\xi \tilde Q + P_2 N_1)}{(\tilde\tau_n'-\tilde\tau_{n-1}'')^\alpha}\right) \Bigg\} + \mathcal{B}_n(t) \le \\
\le{} & M_1 e^{-\beta(t-t_0)}\|z_0\|_\alpha \Bigg\{ \left(1 + \tilde C_1 \left(e^{\beta(\tilde\tau_1''-t_0)} M_1 L_Q \tilde Q K_\xi + e^{\beta(\tilde\tau_1''-\tilde\tau_1')} P_1 N_1\right)\right) + \\
& + \sum_{j=2}^{n-1} M_1 L_Q K_\xi \tilde C_1 e^{\beta(\tilde\tau_j''-\tilde\tau_{j-1}'')} \mathcal{A}_\xi^{j-2} \left(\tilde Q + \frac{\tilde Q \tilde C_1 (M_2 K_\xi \tilde Q + P_2 N_1)}{(1-\alpha)\tilde\theta^\alpha}\right) ds + \\
& + \sum_{j=2}^{n-1} P_1 N_1 \tilde C_1 e^{\beta(\tilde\tau_j''-\tilde\tau_j')} \mathcal{A}_\xi^{j-2} \left(1 + \frac{\tilde C_1 (M_2 K_\xi \tilde Q + P_2 N_1)}{\tilde\theta^\alpha}\right) + \\
& + \frac{1}{(t-\tilde\tau_n'')^\alpha} M_1 L_Q K_\xi \tilde C_1 e^{\beta(\tilde\tau_n''-\tilde\tau_{n-1}'')} \mathcal{A}_\xi^{n-2} \left(\tilde Q + \frac{\tilde Q \tilde C_1 (M_2 K_\xi \tilde Q + P_2 N_1)}{(1-\alpha)\tilde\theta^\alpha}\right) + \\
& + \frac{1}{(t-\tilde\tau_n'')^\alpha} P_1 N_1 \tilde C_1 e^{\beta(\tilde\tau_n''-\tilde\tau_n')} \mathcal{A}_\xi^{n-2} \left(1 + \frac{\tilde C_1 (M_2 K_\xi \tilde Q + P_2 N_1)}{\tilde\theta^\alpha}\right) \Bigg\} + \mathcal{B}_n(t),
\end{aligned}$$

де

$$\mathcal{A}_\xi = 1 + \frac{\tilde C (M_2 \tilde Q K_\xi + P_2 N_1)}{(1-\alpha)\tilde\theta^\alpha}, \quad \mathcal{B}_n(t) = \int\limits_{\tilde\tau_n''}^{t} \frac{M_2 N_1}{(t-s)^\alpha} e^{-\beta(t-s)} v(s) ds.$$

Як і раніше, $M_2 = M_1 L_Q e^{\beta \sup_j |\tilde\tau''_j - \tilde\tau''_{j-1}|}$, $P_2 = P_1 e^{\beta \sup_j |\tilde\tau''_j - \tilde\tau'_j|}$. Тому

$$\|z(t)\|_\alpha \le M_1 e^{-\beta(t-t_0)} \|z_0\|_\alpha \Bigg\{ \mathcal{A}_\xi + \sum_{j=2}^{n-1} \mathcal{A}_\xi^{j-2} M_2 K_\xi \tilde C_1 \tilde Q \left(1 + \frac{\tilde C_1 (M_2 K_\xi \tilde Q + P_2 N_1)}{(1-\alpha)\tilde\theta^\alpha}\right) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{n-1} P_2 N_1 \tilde C_1 \mathcal{A}_\xi^{j-2} \left(1 + \frac{\tilde C_1 (M_2 K_\xi \tilde Q + P_2 N_1)}{\tilde\theta^\alpha}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(t-\tilde\tau''_n)^\alpha} M_2 K_\xi \tilde C_1 \tilde Q \mathcal{A}_\xi^{n-2} \left(1 + \frac{\tilde C_1 (M_2 K_\xi \tilde Q + P_2 N_1)}{(1-\alpha)\tilde\theta^\alpha}\right) ds +$$

$$+ \frac{1}{(t-\tilde\tau''_n)^\alpha} P_2 N_1 \tilde C_1 \mathcal{A}_\xi^{n-2} \left(1 + \frac{\tilde C_1 (M_2 K_\xi \tilde Q + P_2 N_1)}{\tilde\theta^\alpha}\right) \Bigg\} + \mathcal{B}_n(t) \le$$

$$\le M_1 e^{-\beta(t-t_0)} \|z_0\|_\alpha \Bigg\{ \mathcal{A}_\xi + \sum_{j=2}^{n-1} \mathcal{A}_\xi^{j-1} \Big(M_2 K_\xi \tilde C_1 \tilde Q + P_2 N_1 \tilde C_1 + 1 - 1 \Big) +$$

$$+ \frac{\mathcal{A}_\xi^{n-1}}{(t-\tilde\tau''_n)^\alpha} \Big(M_2 K_\xi \tilde C_1 \tilde Q + P_2 N_1 \tilde C_1 \Big) \Bigg\} + \mathcal{B}_n(t) \le$$

$$\le M_1 e^{-\beta(t-t_0)} \|z_0\|_\alpha \left\{ \mathcal{A}_\xi + \sum_{j=2}^{n-1} \mathcal{A}_\xi^{j-1} (\mathcal{A}_\xi - 1) + \frac{\mathcal{A}_\xi^{n-1}}{(t-\tilde\tau''_n)^\alpha} \Big(M_2 K_\xi \tilde C_1 \tilde Q + P_2 N_1 \tilde C_1 \Big) \right\} +$$

$$+ \mathcal{B}_n(t) \le M_1 e^{-\beta(t-t_0)} \|z_0\|_\alpha \mathcal{A}_\xi^{n-1} \left(1 + \frac{\tilde C_1 (M_2 K_\xi \tilde Q + P_2 N_1)}{(t-\tilde\tau''_n)^\alpha}\right) + \mathcal{B}_n(t).$$

Отже, для $t \in (\tilde\tau''_n, \tilde\tau'_{n+1}]$ функція $v(t) = e^{\beta t} \|z(t)\|_\alpha$ задовольняє нерівність

$$v(t) \le \mathcal{A}_\xi^{n-1} \left(1 + \frac{\tilde C_1 (M_2 K_\xi \tilde Q + P_2 N_1)}{(t-\tilde\tau''_n)^\alpha}\right) + M_2 N_1 \int_{\tilde\tau''_n}^{t} (t-s)^{-\alpha} v(s) ds.$$

Застосовуючи (5), отримуємо (23).

За формулою (18), якщо $\|z_0\|_\alpha \le \delta = \dfrac{\varepsilon}{M_1 \tilde C}$, то $\|z(t)\|_\alpha \le \varepsilon$ при $t \in [t_0, \tilde\tau'_1]$.

За формулою (21) розв'язок $z(t)$ задовольняє нерівність $\|z(t)\|_\alpha < \varepsilon$ на інтервалі $t \in \in [\tilde\tau''_1 + \eta, \tilde\tau'_2]$, якщо

$$\|z_0\|_\alpha \le \frac{\varepsilon}{M_1 \tilde C_1} e^{\beta(\tilde\tau'_2 - t_0)} \left(1 + \frac{\tilde C_1 (M_2 K_\varepsilon \tilde Q + P_2 N_1)}{\eta^\alpha}\right)^{-1}.$$

Відповідно, розв'язок $z(t)$ задовольняє нерівність $\|z(t)\|_\alpha < \varepsilon$ на інтервалі $t \in [\tilde\tau''_i + \eta, \tilde\tau'_{i+1}]$,

якщо
$$\|z_0\|_\alpha \le \frac{\varepsilon}{M_1\tilde{C}_1}e^{\beta(\tilde{\tau}_i'-t_0)}\left(1+\frac{\tilde{C}_1(M_2K_\varepsilon\tilde{Q}+P_2N_1)}{\eta^\alpha}\right)^{-1}\mathcal{A}_\varepsilon^{-i+1}.$$

Оскільки $K_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то при досить малих $\varepsilon > 0$ і $N_1 > 0$ виконується $e^{-\beta(\tilde{\tau}_i'-t_0)}\mathcal{A}_\varepsilon^{i-1} < 1$ при всіх i. Це доводить асимптотичну стійкість розв'язку $u_0(t)$.

Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо параболічне рівняння з нефіксованими моментами імпульсної дії
$$u_t = u_{xx} + f(t,x), \tag{24}$$
$$\Delta u|_{t=\tau_j(u)} = u(\tau_j(u)+0,x) - u(\tau_j(u)) = c_j u(\tau_j(u)), \tag{25}$$

з граничними умовами Діріхле
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \tag{26}$$

та поверхнями імпульсної дії $\tau_j(u)$ вигляду
$$\tau_j(u) = \sigma j - b_j\int\limits_0^\pi u^2(\xi)d\xi, \tag{27}$$

де $x \in [0,\pi]$, $t \ge 0$, функція $f(t,x)$ гельдерова та ω-періодична по t і належить до $L_2(0,\pi)$ при кожному фіксованому t, послідовності додатних чисел $\{b_j\}$ і $\{c_j\}$ p-періодичні, $b_{j+p} = b_j$, $c_{j+p} = c_j$, $j \in \mathbb{Z}$, додатне число σ задовольняє рівність $\sigma p = \omega$.

Позначимо
$$X = L_2(0,\pi), \quad A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad X^1 = D(A) = H^2(0,\pi)\cap H_0^1(0,\pi).$$

Оператор A є секторіальним із простими власними числами $\lambda_k = k^2$ і відповідними власними функціями
$$\varphi_k(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\sin kx, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Оператор $(-A)$ генерує аналітичну напівгрупу e^{-At}.

Для функції $v \in X$ має місце розклад $v = \sum_{k=1}^\infty a_k \sin kx$, $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi v(x)\sin kx dx$. Тоді
$$Av = \sum_{k=1}^\infty k^2 a_k \sin kx, \quad A^\alpha v = \sum_{k=1}^\infty k^{2\alpha}a_k\sin kx, \quad e^{-At}v = \sum_{k=1}^\infty e^{-k^2t}a_k\sin kx,$$

а також
$$X^{1/2} = D(A^{1/2}) = H_0^1(0,\pi).$$

Розглянемо імпульсне рівняння (24) – (26) як абстрактне рівняння у просторі $H_0^1(0,\pi)$:

$$\frac{dv}{dt} + Av = f(t), \tag{28}$$

$$v(\tau_j(v) + 0) - v(\tau_j(v)) = g_j(v(\tau_j(v))), \tag{29}$$

де $f : \mathbb{R} \times X^{1/2} \to X$, $g_j(v) = c_j v$.

Аналогічно [1] перевіряємо, що в області $\mathcal{D} = \{v : \|v\|_{1/2} \leq \rho\}$ з деяким $\rho > 0$ немає биття, тобто розв'язки перетинають кожну з поверхонь імпульсів $\tau_j(v)$ не більше одного разу.

Розглянемо простір $\mathfrak{N}$ p-періодичних послідовностей $y = \{y_j\}$, $y_j \in X^{1/2}$, $y_{j+p} = y_j$, з нормою $\|y\|_S = \sup_j \|y_j\|_{1/2}$.

Зафіксуємо $y = \{y_j\} \in \mathfrak{N}$, $\|y\|_S = \sup_j \|y_j\|_{1/2} \leq \rho$, і розглянемо рівняння з фіксованими моментами імпульсної дії

$$\frac{dv}{dt} + Av = f(t), \quad t \neq \tau_j(y_j), \tag{30}$$

$$v(\tau_j(y_j) + 0) - v(\tau_j(y_j)) = c_j v(\tau_j(y_j)), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{31}$$

Очевидно, що послідовність $\{\tau_j(y_j)\}$ задовольняє умову періодичності $\tau_{j+p}(y_{j+p}) - -\tau_j(y_j) = \omega$. Рівняння (30), (31) має єдиний періодичний розв'язок $v^*(t,y)$, який задовольняє інтегральне рівняння

$$v(t,y) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-A(t-\tau)} f(\tau) d\tau + \sum_{\tau_j < t} e^{-A(t-\tau_j(y_j))} c_j v(\tau_j(y_j)).$$

Якщо вибрати періодичну послідовність $y^* = \{y_j^*\}$, $y_j^* \in X^{1/2}$, так, що

$$v^*(\tau_j(y_j^*), y^*) = y_j^*$$

для всіх $j \in \mathbb{Z}$, то функція $v^*(t,y^*)$ буде періодичним розв'язком рівняння (28), (29). Для доведення у просторі $\mathfrak{N}$ розглянемо відображення $S : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$,

$$S(y) = \{v^*(\tau_j(y_j), y)\}_{j \in \mathbb{Z}}.$$

Відображення S переводить деяку область $\mathcal{U}_0 = \{y \in \mathfrak{N}, \|y\|_S \leq \rho\}$ в себе. Аналогічно [1], застосовуючи теорему Шаудера, доводимо, що в області $\mathcal{U}_0$ відображення S має нерухому точку. При достатньо малих $c = \sup_j c_j$ та $b = \sup_j b_j$ нерухома точка єдина. Їй відповідає єдиний у $\mathcal{D}$ періодичний розв'язок рівняння (28), (29). За доведеною теоремою він є асимптотично стійким відповідно до означення 2.

1. *Роговченко Ю. В., Трофимчук С. И.* Периодические решения слабо нелинейных уравнений в частных производных параболического типа с импульсным воздействием и их устойчивость. — Киев, 1986. — 44 с. — (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 86.65).

2. *Ahmed N. U.* Some remarks on the dynamics of impulsive systems in Banach spaces // Dynam. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A. Math. Anal. — 2001. — **8**, № 2. — P. 261–274.
3. *Barreira L., Valls C.* Robustness for impulsive equations // Nonlinear Anal. — 2010. — **72**, № 5. — P. 2542–2563.
4. *Hernández E., Aki S. M. T., Henríquez H.* Global solutions for impulsive abstract partial differential equations // Comput. Math. and Appl. — 2008. — **56**, № 5. — P. 1206–1215.
5. *Liu J. H.* Nonlinear impulsive evolution equations // Dynam. Contin. Discrete Impuls. Syst. — 1999. — **6**, № 1. — P. 77–85.
6. *Struk O. O., Tkachenko V. I.* On impulsive Lotka–Volterra systems with diffusion // Ukr. Math. J. — 2002. — **54**, № 4. — P. 629–646.
7. *Tkachenko V. I.* On the exponential dichotomy of pulse evolution systems // Ukr. Math. J. — 1994. — **46**, № 4. — P. 441–448.
8. *Tkachenko V.* Almost periodic solutions of parabolic type equations with impulsive action // Funct. Different. Equat. — 2014. — **21**, № 3–4. — P. 155–169.
9. *Trofimchuk S. I.* Almost periodic solutions of linear abstract impulse systems // Different. Equat. — 1996. — **31**, № 4. — P. 559–568.
10. *Vlasenko L. A., Myshkis A. D., Rutkas A. G.* On a class of differential equations of parabolic type with impulse actions // Different. Equat. — 2008. — **44**, № 2. – P. 231–240.
11. *Wang J. R., Xiang X., Peng Y.* Periodic solutions of semilinear impulsive periodic system on Banach space // Nonlinear Anal. — 2009. — **71**, № 12. — P. e1344–e1353.
12. *Akhmet M.* Principles of discontinuous dynamical systems. — New York: Springer, 2010. — xii + 176 p.
13. *Rontó M., Trofimchuk S. I.* Periodic solutions of abstract impulsive systems with non-fixed moments of impulsive effect // Publ. Univ. Miskolc. Ser. D. Nat. Sci. Math. — 1995. — **36**, № 1. — P. 91–99.
14. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 288 с.
15. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A., Trofimchuk S. I.* Generalized solutions of impulse systems, and the beats phenomenon // Ukr. Math. J. — 1991. — **43**, № 5. — P. 610–615.
16. *Lakshmikantham V., Bainov D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations // Ser. Modern Appl. Math. — Singapore: World Sci. Publ., 1989. — **6**. — xii + 273 p.
17. *Henry D.* Geometric theory of semilinear parabolic equations // Lect. Notes Math. — Berlin; New York: Springer-Verlag, 1981. — **840**. — iv + 348 p.
18. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations // Appl. Math. Sci. — New York: Springer-Verlag, 1983. — **44**. — viii + 279 p.

Одержано 27.05.15