УДК 517.9

ЧУТЛИВІСТЬ ІНДУКОВАНОЇ СИСТЕМИ НА ВІДРІЗКУ

О. В. Рибак

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна

We consider dynamical systems $(C(I), f)$, where the function f maps a segment I into itself and is naturally extended to closed connected subsets of the given segment. For the mentioned systems we investigate their sensitivity to the initial conditions. In partial, it is proved that there is always a Lyapunov-stable point in the system $(C(I), f)$.

Рассматриваются динамические системы $(C(I), f)$, в которых функция f отображает отрезок I в себя и естественным образом распространяется на замкнутые связные подмножества данного отрезка. Для упомянутых систем исследуется их чувствительность к начальным условиям. В частности, доказано, что в системе $(C(I), f)$ всегда есть точка, устойчивая по Ляпунову.

Вступ. Дану статтю присвячено дослідженню чутливості певних динамічних систем. Тут *динамічною системою* називатимемо конструкцію (X, f), де X — деяка множина, а f — функція, що відображає цю множину в себе. Зазвичай X є простором з метрикою d, а f — неперервним відображенням відносно цієї метрики. Саме такий випадок ми розглядатимемо.

При дослідженні динамічних систем, як правило, аналізуються послідовності вигляду $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$, де a_0 — довільний елемент множини X, а для всіх наступних елементів справджується рівність $a_n = f(a_{n-1})$. Такі послідовності називають *орбітами* або *траєкторіями*.

Для зручності введемо деякі умовні позначення. Запис $f^n(x)$ позначатиме n-кратну ітерацію f, тобто вираз $\underbrace{f(f(\ldots f}_{n \text{ разів}}(x)\ldots))$. Зокрема, f^0 означає тотожне відображення $f^0(x) = x$ для всіх $x \in X$. Тоді кожну орбіту динамічної системи можна виразити як $(x, f(x), \ldots, f^n(x), \ldots)$ або $(f^0(x), f(x), \ldots, f^n(x), \ldots)$, де x — деяка точка в X.

Під $\mathbb{N}_0$ розумітимемо множину невід'ємних цілих чисел. Таким чином, множину точок орбіти можна записати як $\{f^n(x) | n \in \mathbb{N}_0\}$.

Одним із важливих питань у дослідженні динамічних систем є те, чи може незначний зсув початкового елемента x викликати істотні зміни деякого $f^n(x)$. Якщо це можливо при як завгодно малих змінах точки x, то прогнозування поведінки системи пов'язане з певними труднощами. Вказане явище називають *чутливістю до початкових умов*.

Строге означення чутливої системи уперше наведено у [2, 6]. У цих роботах виділено системи з наступною властивістю.

Означення 1. *Систему (X, f) називають чутливою до початкових умов (або просто чутливою), якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для довільної точки $x \in X$ та довільного її відкритого околу U знайдуться $n \in \mathbb{N}_0$ та $y \in U$, для яких $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$.*

У роботі [1] наведено кілька інших означень і показано, що всі вони рівносильні. А саме, доведено таке твердження.

Твердження. *Якщо для системи (X, f) з компактним простором X та неперервною функцією f виконується одна з наступних умов, то виконуються і всі інші.*

1. Знайдеться таке ε_1, що для довільної відкритої непорожньої множини $U \subset X$ існують $n \in \mathbb{N}_0$ та $x, y \in U$, для яких виконується $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon_1$.

2. Знайдеться таке ε_2, що для довільної відкритої непорожньої множини $U \subset X$ існують $x, y \in U$, для яких виконується $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon_2$.

3. Знайдеться таке ε_3, що для довільної точки $x \in X$ та довільного її відкритого околу U існують $n \in \mathbb{N}_0$ та $y \in U$, для яких виконується $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon_3$, тобто система (X, f) чутлива у сенсі означення 1.

4. Знайдеться таке ε_4, що для довільної точки $x \in X$ та довільного її відкритого околу U існує точка $y \in U$, для якої виконується $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon_4$.

Наведені означення чутливості пов'язані з поняттям стійкості точки, яке було введене О. М. Ляпуновим.

Означення 2. *Точка x системи (X, f) називається стійкою (у сенсі Ляпунова) або рівномірно неперервною, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий відкритий окіл U точки x, що для всіх $y \in U$ та всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$.*

Це означення можна розуміти таким чином. Кожна ітерація f^n є неперервною функцією. Тому якщо розглянути якусь окрему f^n, то для довільного $\varepsilon > 0$ можна знайти такий окіл $U_{n,\varepsilon}$ точки x (залежний від n та ε), що для всіх $y \in U_{n,\varepsilon}$ виконується нерівність $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$. Але якщо розглянути одночасно всі f^n, то можливі два випадки. Перший полягає в тому, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий універсальний окіл U_ε (залежний від ε, але не від n), що для всіх $y \in U_\varepsilon$ та всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$. Цей варіант відповідає означенню 2. Другий випадок має місце тоді, коли знайдеться $\varepsilon > 0$, для якого не існує згаданого універсального U_ε, тобто відповідні $U_{n,\varepsilon}$ у своєму перетині дають множину, яка не містить відкритого околу точки x. Саме цей варіант ми будемо аналізувати далі.

Якщо другий випадок спостерігається для всіх точок системи, то можна розглянути верхню грань відповідних ε, для яких усі $x \in X$ демонструють нестійкість. Цю верхню грань та деякі подібні параметри у [3] названо числами Ляпунова. Наведемо їхні означення.

Означення 3. *Для системи (X, f) числами Ляпунова є наступні параметри:*

1) першим числом Ляпунова називається таке найбільше $\mathcal{L}_1$, що для всіх $\varepsilon_1 < \mathcal{L}_1$ виконується така умова: для довільної відкритої непорожньої множини $U \subset X$ існують $n \in \mathbb{N}_0$ та $x, y \in U$, для яких $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon_1$;

2) другим числом Ляпунова називається таке найбільше $\mathcal{L}_2$, що для всіх $\varepsilon_2 < \mathcal{L}_2$ виконується така умова: для довільної відкритої непорожньої множини $U \subset X$ існують $x, y \in U$, для яких $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon_2$;

3) третім числом Ляпунова називається таке найбільше $\mathcal{L}_3$, що для всіх $\varepsilon_3 < \mathcal{L}_3$ виконується така умова: для довільної $x \in X$ та довільного її відкритого околу U існують такі $n \in \mathbb{N}_0$ та $y \in U$, що $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon_3$;

4) четвертим числом Ляпунова називається таке найбільше $\mathcal{L}_4$, що для всіх $\varepsilon_4 < \mathcal{L}_4$ виконується така умова: для довільної $x \in X$ та довільного її відкритого околу U існує така точка $y \in U$, що $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon_4$.

З очевидних міркувань випливає, що $\mathcal{L}_1 \geq \mathcal{L}_2 \geq \mathcal{L}_4$ та $\mathcal{L}_1 \geq \mathcal{L}_3 \geq \mathcal{L}_4$. Також у [3] доведено, що для систем (X, f) з компактним простором X та неперервним відображенням f виконується $\mathcal{L}_1 \leq 2\mathcal{L}_4$. Звідси випливає, що будь-які два числа Ляпунова для таких систем відрізняються не більше, ніж удвічі.

Згідно з означеннями 1 та 3, динамічна система є чутливої тоді і тільки тоді, коли її число Ляпунова $\mathcal{L}_3$ більше 0. Якщо простір є компактним, а відображення f — неперервним, то (X, f) чутлива тоді і тільки тоді, коли хоча б одне її $\mathcal{L}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, відмінне від нуля.

Також у [3, 7] показано, що для певних класів систем (X, f) має місце рівність між деякими $\mathcal{L}_i$. Наприклад, для транзитивної системи виконується $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$, а для мінімальної — $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ та $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.

У [7] введено локальні числа Ляпунова $\mathcal{L}_3(x)$ та $\mathcal{L}_4(x)$.

Означення 4. *Для системи (X, f) локальними числами Ляпунова називаються такі величини:*

1) третім локальним числом Ляпунова для точки $x \in X$ називається таке найбільше $\mathcal{L}_3(x)$, що для всіх $\varepsilon_3 < \mathcal{L}_3(x)$ виконується умова: для довільної відкритої множини $U \subset X$, що містить x, існують $n \in \mathbb{N}_0$ та $y \in U$, для яких $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon_3$;

2) четвертим локальним числом Ляпунова для точки $x \in X$ називається таке найбільше $\mathcal{L}_4(x)$, що для всіх $\varepsilon_4 < \mathcal{L}_4(x)$ виконується умова: для довільної відкритої $U \subset X$, що містить x, існує така точка $y \in U$, що $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon_4$.

З наведених означень очевидно, що $\mathcal{L}_3 = \inf_{x\in X} \mathcal{L}_3(x)$ та $\mathcal{L}_4 = \inf_{x\in X} \mathcal{L}_4(x)$. Точка $x \in X$ є стійкою тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{L}_3(x) = 0$.

Постановка задачі. Останнім часом у роботах багатьох авторів вивчаються індуковані динамічні системи (див., наприклад, [4, 5]). *Індукованою системою* називається пара (S, f), побудована на основі динамічної системи (X, f) таким чином. За S вибирається деяка сім'я підмножин множини X. Функція f природним чином розповсюджується на підмножини згаданої сім'ї: для всіх $A \in S$ відображення задається рівністю $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$. При цьому S повинна задовольняти таку умову: для кожної $A \in S$ має виконуватися включення $f(A) \in M$.

Наприклад, у випадку неперервної функції f можна використати простір $C(X)$ усіх замкнених зв'язних непорожніх підмножин простору X, оскільки для кожної $A \in C(X)$ образ $f(A)$ теж буде замкненим, зв'язним та непорожнім. У згаданому просторі бажано задати метрику, яка дозволить досліджувати збіжність і подібні явища. Для розглядуваного випадку підходить *метрика Гаусдорфа*, згідно з якою відстань між $U, V \subset X$ визначається як

$$d_H(U, V) = \max\left\{\sup_{u\in U}\inf_{v\in V} d(u, v), \sup_{v\in V}\inf_{u\in U} d(u, v)\right\},$$

де $d(u, v)$ дорівнює відстані між u та v у просторі X. Іншими словами, відстань Гаусдорфа — це нижня межа таких r, для яких замкнений r-окіл множини U містить V, а замкнений r-окіл множини V — U.

Для довільних різних непорожніх замкнених $U, V \subset X$ виконується $d_H(U, V) > 0$. Також справджуються рівність $d_H(U, U) = 0$ та нерівність трикутника $d_H(U, W) \leq d_H(U, V) + d_H(V, W)$. Отже, d_H задає коректну метрику в просторі $C(X)$.

Ще метрика Гаусдорфа цікава тим, що відносно неї простір $C(X)$ буде компактним, якщо компактним є сам X. Для відображень виконується аналогічне правило: $f\colon C(X) \to C(X)$ буде неперервним відносно метрики Гаусдорфа, якщо неперервним є вихідне відображення $f\colon X \to X$.

У даній статті розглядається випадок, коли простір X є відрізком I. Тоді простір $C(I)$ є множиною всіх відрізків, що містяться в I (включаючи окремі точки), а відстань d_H $([a, b],$ $[c, d])$ дорівнює $\max\{|a - c|, |b - d|\}$. Легко довести, що множина $C(I)$ (з метрикою d_H) гомеоморфна трикутнику $\{(a, b)|a, b \in I, a \leq b\}$.

Основні результати. Перейдемо до аналізу чутливості індукованих систем вигляду $(C(I), f)$. Спочатку доведемо дві леми.

Лема 1. *Якщо функція* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *нестрого монотонна, то вона має не більш ніж зліченну множину точок розриву.*

Доведення. Розглянемо випадок, коли функція f є неспадаючою. (Випадок незростаючої функції є аналогічним.)

Нехай $u(x) = \sup\{f(y)|y < x\}$, $v(x) = \inf\{f(y)|y > x\}$, D — множина точок, де f має розрив. Тоді для кожної точки $x \in D$ виконується нерівність $u(x) < v(x)$, тобто інтервал $(u(x), v(x))$ є непорожнім. Поставимо кожній $x \in D$ у відповідність деяке раціональне число $q(x)$ з $(u(x), v(x))$. Нехай x_1 та x_2 $(x_1 < x_2)$ — деякі точки множини D. З монотонності f випливає, що $v(x_1) \leq f(x_1) \leq f(x_2) \leq u(x_2)$, тобто інтервали $(u(x_1), v(x_1))$ та $(u(x_2), v(x_2))$ не мають спільних точок. Отже, для всіх $x \in D$ відповідні $q(x)$ будуть різними. Звідси випливає, що множина D не потужніша, ніж $\mathbb{Q}$, тобто не більш ніж зліченна.

Лему 1 доведено.

Наступна лема є частковим випадком результату статті [8]. Доведення для зазначеного випадку є досить коротким, тому наведемо його для повноти викладу.

Лема 2. *Якщо відрізок J містить нерухому точку функції f, то послідовність відрізків $f^{2n}(J)$ збігається. Збіжність відрізків будемо розуміти як збіжності координат лівих та правих вершин (тобто у сенсі метрики Гаусдорфа).*

Доведення. Нехай J — відрізок, що містить нерухому точку s. Для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ через J_n позначатимемо відрізок $f^n(J)$.

Випадок 1. Нехай для деякого цілого невід'ємного m має місце включення $J_m \subset J_{m+1}$ або $J_{m+1} \subset J_m$. Тоді для всіх $n > m$ також виконується $J_n \subset J_{n+1}$ або $J_{n+1} \subset J_n$ відповідно. Отже, всі відрізки J_n $(n \geq m)$ вкладені один в одного. Звідси випливає, що послідовність відрізків J_n збігається. А тоді цю властивість мають і $f^{2n}(J)$.

Випадок 2. Нехай для деякого цілого невід'ємного m виконується $J_m \subset J_{m+2}$ або $J_{m+2} \subset J_m$. Тоді, як і в попередньому випадку, відрізки $f^{2n}(J)$ для $n \geq m$ утворюють послідовність вкладених множин.

Випадок 3. Припустимо, що для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ відрізок J_n не містить ані J_{n+1}, ані J_{n+2}, а також сам не міститься в жодному з останніх двох відрізків.

Введемо такі позначення. Для $U = [a, b]$ та $V = [c, d]$ будемо використовувати запис $U < V$, якщо $a < c$ та $b < d$. Аналогічно, записуватимемо $U > V$, якщо $a > c$ та $b > d$. Зауважимо, що для відрізків U та V, жоден з яких не містить інший, завжди буде $U < V$ або $U > V$.

Випадок 3.1. Нехай для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ виконується $J_n < J_{n+1}$ або $J_n > J_{n+1}$. Тоді за теоремою Вейєрштрасса координати кінців J_n збігаються.

Випадок 3.2. Тепер розглянемо ситуацію, коли для деякого $m \in \mathbb{N}$ одночасно виконуються нерівності $J_m < J_{m-1}$ та $J_m < J_{m+1}$ або $J_m > J_{m-1}$ і $J_m > J_{m+1}$. Нехай $K = J_{m-1} \cup J_m$. Множина K є відрізком, тому що J_{m-1} та J_m містять точку s. Застосовуючи відображення f до обох частин рівності $K = J_{m-1} \cup J_m$, отримуємо $f(K) = J_m \cup J_{m+1}$. Отже, згідно з розглянутим випадком, виконується $f(K) \subset K$ або $K \subset f(K)$. Розглянемо варіант $f(K) \subset K$ (інший є аналогічним). Застосовуючи функцію f^n до обох частин останнього включення, отримуємо, що для будь-якого натурального n виконується $f^{n+1}(K) \subset f^n(K)$.

Оскільки в розглянутому випадку відрізки J_{m-1} і J_m не містять один одного, виконується умова $J_{m-1} < J_m$ або $J_{m-1} > J_m$. Вважатимемо, що $J_{m-1} < J_m$ (протилежний варіант аналізується так само). Зі співвідношення $f(K) \subset K$ випливає, що $J_{m+1} \subset K = J_{m-1} \cup J_m$. Тому лівий кінець J_{m+1} має бути не лівіше лівого кінця J_{m-1}, а правий кінець J_{m+1} — не правіше правого кінця J_m. За умовою випадку 3 відрізок J_{m+1} не міститься ані в J_{m-1}, ані в J_m. Тому $J_{m-1} < J_{m+1} < J_m$. Тепер із $f^2(K) \subset f(K)$ та нерівності $J_m > J_{m+1}$ так само виводимо, що $J_m > J_{m+2} > J_{m+1}$.

Застосовуючи індукцію та включення $f^{n+1}(K) \subset f^n(K)$, $n \in \mathbb{N}_0$, приходимо до висновку, що для всіх натуральних k виконуються нерівності $J_{m-1+2k} < J_{m+1+2k} < J_{m+2k}$ і $J_{m+2k} > J_{m+2+2k} > J_{m+1+2k}$.

Отже, відрізки вигляду J_{m+2k} утворюють спадну послідовність, а J_{m-1+2k} — зростаючу. Тому координати кінців J_{2n} для $n \geq m$ утворюють монотонні послідовності. Звідси випливає, що послідовність відрізків $f^{2n}(J)$ збігається.

Лему 2 доведено.

Теорема. *Нехай I — відрізок. Тоді в індукованій системі $(C(I), f)$ з метрикою d_H існує такий елемент $J \in C(I)$, що $\mathcal{L}_3(J) = 0$.*

Доведення. Для зручності введемо систему координат, у якій I стане відрізком [0,1]. Розглянемо кілька випадків.

Випадок 1. Нехай на інтервалі $(0, 1)$ немає такої точки s, що $f(s) = s$. У цьому випадку для всіх $x \in (0, 1)$ виконується нерівність $f(x) > x$ або $f(x) < x$.

Розглянемо випадок, коли для всіх $x \in (0, 1)$ маємо $f(x) > x$ (інший випадок є аналогічним). У цьому випадку виконується рівність $f(1) = 1$, оскільки функція f є неперервною.

Розглянемо довільний відрізок $J = [a, b]$, для якого $a > 0$. Покажемо, що в системі $(C(I), f)$ виконується $\mathcal{L}_3(J) = 0$. Нехай $a_0 = a/2$. Розглянемо відрізки $J_n = f^n([a_0, 1])$, $n \in \mathbb{N}_0$. Оскільки справджується рівність $f(1) = 1$, для довільного цілого невід'ємного n відрізок J_n міститиме точку 1. Отже, кожен такий відрізок має вигляд $[a_n, 1]$. Для лівих кінців згаданих відрізків при всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність $a_n = \min\{f(x) | x \in [a_{n-1}, 1]\}$.

За вибором випадку для всіх $x \in [a_{n-1}, 1]$ виконується $f(x) > x \geq a_{n-1}$. Тому $a_n \geq a_{n-1}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Отже, за теоремою Вейєрштрасса $\{a_n\}$ має границю. Покажемо, що зазначена границя дорівнює 1. Нехай $\lim_{n\to\infty} a_n = d$. Тоді для всіх n виконується нерівність $a_n \leq d$. Отже, з неперервності f та рівності $f([a_n, 1]) = [a_{n+1}, 1]$ випливає, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ на відрізку $[a_n, 1]$ є така точка x_n, що $f(x_n) = d$. За умовою випадку, який ми розглядаємо, $x \leq f(x)$ для всіх x. Тому для будь-якого натурального n виконується $x_n \leq f(x_n) = d$. З того, що $a_n \leq x_n \leq d$ та $\lim_{n\to\infty} a_n = d$, маємо $\lim_{n\to\infty} x_n = d$. Отже, $f(d) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = d$.

У розглянутому випадку рівність $f(d) = d$ можлива лише при $d = 0$ або $d = 1$. З нерівності $d \geq a_0 > 0$ випливає, що $d = 1$.

Тепер покажемо, що відрізок $J = [a, b]$ не є чутливим. Відрізок $J_0 = [a_0, 1]$ містить J, тому для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується включення $f^n(J) \subset f^n(J_0) = J_n$. Розглянемо довільне $\varepsilon > 0$. Як показано вище, для послідовності $\{a_n\}$, де $[a_n, 1] = f^n(J)$, справджується рівність $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Тому знайдеться такий індекс m, що для всіх натуральних $n > m$ виконується нерівність $1 - a_n < \varepsilon$. Якщо для деякого $K = [c, d]$ виконано $d_H(J, K) \leq \dfrac{a}{2}$, то за вибором a_0 відрізок K також міститься в J_0, а тоді при всіх $n \in \mathbb{N}$ має місце співвідношення $f^n(K) \subset J_n$. За вибором індексу m для всіх $n > m$ відрізки $f^n(J)$ та $f^n(K)$ лежать всередині J_n, довжина якого менша за ε. Тому для цих n виконується нерівність $d_H(f^n(J), f^n(K)) < \varepsilon$. Розглянемо таке $\delta \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$, що для всіх відрізків L, що задовольняють умову $d_H(J, L) < \delta$, та для всіх цілих невід'ємних $n \leq m$ має місце нерівність $d_H(f^n(J), f^n(L)) < \varepsilon$. Потрібне δ знайдеться, тому що відображення $f \colon C(I) \to C(I)$ є неперервним відносно метрики Гаусдорфа. Тоді для будь-якого $K \in C(I)$, що задовольняє нерівність $d_H(J, K) < \delta$, маємо нерівність $d_H(f^n(J), f^n(K)) < \varepsilon$ при всіх $n \in \mathbb{N}_0$. Дійсно, для $n \leq m$ ця нерівність виконується за вибором δ. А для $n > m$ вона справджується за вибором m. Отже, за означенням 4 виконується рівність $\mathcal{L}_3(J) = 0$.

Випадок 2. Нехай існує точка $s \in (0, 1)$, для якої $f(s) = s$, $I_x = [s - sx, s + (1 - s)x]$ для кожного $x \in [0, 1]$. Тоді відрізок I_0 збігається з $\{s\}$, а I_1 — з відрізком $[0, 1]$. Також якщо $0 \leq x < y \leq 1$, то $I_x \subset I_y$. За лемою 2 для всіх $x \in [0, 1]$ послідовність $\{f^{2n}(I_x)\}$ має границю. Нехай для кожного $x \in [0, 1]$ функції $g(x)$ та $h(x)$ задано рівністю $[g(x), h(x)] = \lim_{n\to\infty} f^{2n}(I_x)$. Оскільки відрізки I_x, $0 \leq x \leq 1$, вкладені один в одного, так само побудовано й граничні відрізки $[g(x), h(x)]$. Тобто $g(x)$ нестрого монотонно спадає, а $h(x)$ нестрого монотонно зростає. За лемою 1 функції $g(x)$ та $h(x)$ мають максимум зліченну множину точок розриву.

Нехай $y \in (0, 1)$ — точка неперервності функцій g та h. Покажемо, що відрізок I_y не є чутливим у динамічній системі $(C(I), f)$. Задамо функції $p(x)$ та $q(x)$ за допомогою рівності $[p(x), q(x)] = \lim_{n\to\infty} f^{2n+1}(I_x)$. Оскільки $[p(x), q(x)] = f([g(x), h(x)])$, а відображення f неперервне відносно метрики Гаусдорфа, функції p та q також неперервні в точці y. Для зручності введемо позначення $J_x = [g(x), h(x)]$ та $K_x = [p(x), q(x)]$. Тоді, якщо розглядати J_x та K_x як функції від x, вони неперервні в точці y відносно метрики d_H.

Розглянемо довільне $\varepsilon > 0$. Нехай $\delta > 0$ таке, що $d_H(J_{y-\delta}, J_y) < \frac{\varepsilon}{4}$, $d_H(J_{y+\delta}, J_y) < \frac{\varepsilon}{4}$, $d_H(K_{y-\delta}, K_y) < \frac{\varepsilon}{4}$ і $d_H(K_{y+\delta}, K_y) < \frac{\varepsilon}{4}$. Розглянемо таке m, що для всіх парних $n > m$ виконуються нерівності $d_H(f^n(I_{y-\delta}), J_{y-\delta}) < \frac{\varepsilon}{4}$ та $d_H(f^n(I_{y+\delta}), J_{y+\delta}) < \frac{\varepsilon}{4}$, а для всіх непарних $n > m$ справджуються $d_H(f^n(I_{y-\delta}), K_{y-\delta}) < \frac{\varepsilon}{4}$ та $d_H(f^n(I_{y+\delta}), K_{y+\delta}) < \frac{\varepsilon}{4}$. Тоді для парних $n > m$, за нерівністю трикутника, маємо співвідношення

$$d_H(f^n(I_{y-\delta}), J_y) \leq d_H(f^n(I_{y-\delta}), J_{y-\delta}) + d_H(J_{y-\delta}, J_y) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$d_H(f^n(I_{y+\delta}), J_y) \leq d_H(f^n(I_{y+\delta}), J_{y+\delta}) + d_H(J_{y+\delta}, J_y) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогічно, для непарних $n > m$ справджуються оцінки

$$d_H(f^n(I_{y+\delta}), K_y) \leq d_H(f^n(I_{y+\delta}), K_{y+\delta}) + d_H(K_{y+\delta}, K_y) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$d_H(f^n(I_{y+\delta}), K_y) \leq d_H(f^n(I_{y+\delta}), K_{y+\delta}) + d_H(K_{y+\delta}, K_y) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зрозуміло, що довільний відрізок U, для якого $I_{y-\delta} \subset U \subset I_{y+\delta}$, також задовольняє нерівності $d_H(f^n(U), J_y) < \frac{\varepsilon}{2}$ (для парних n) та $d_H(f^n(U), K_y) < \frac{\varepsilon}{2}$ (для непарних n) при всіх $n > m$. Для відрізка I_y теж виконується умова $I_{y-\delta} \subset I_y \subset I_{y+\delta}$, тому з нерівності трикутника отримуємо, що для парних $n > m$ та для всіх відрізків U, які задовольняють умову $I_{y-\delta} \subset U \subset I_{y+\delta}$, справджується

$$d_H(f^n(I_y), f^n(U)) < d_H(f^n(I_y), J_y) + d_H(J_y, f^n(U)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Аналогічно, для непарних $n > m$ та тих самих U виконується

$$d_H(f^n(I_y), f^n(U)) < d_H(f^n(I_y), K_y) + d_H(K_y, f^n(U)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже, $d_H(f^n(I_y), f^n(U)) < \varepsilon$ для всіх $n > m$.

Тепер підберемо таке $\delta_1 > 0$, що $\delta_1 < d_H(I_y, I_{y-\delta}) = d_H(I_y, I_{y+\delta})$ і для всіх цілих невід'ємних $n \leq m$ з нерівності $d_H(I_y, U) < \delta_1$ випливатиме $d_H(f^n(I_y), f^n(U)) < \varepsilon$. З умови $d_H(I_y, U) < \delta_1$ також випливатиме, що $I_{y-\delta} \subset U \subset I_{y+\delta}$. Тому для вибраного δ_1 нерівність $d_H(f^n(I_y), f^n(U)) < \varepsilon$ виконується і для всіх $n > m$, якщо тільки $d_H(I_y, U) < \delta_1$. Отже, відрізок I_y є стійким в індукованій системі $(C(I), f)$, для нього виконується $\mathcal{L}_3(I_y) = 0$.

Теорему доведено.

Висновки. З доведеної теореми, зокрема, випливає, що для системи $(C(I), f)$ число Ляпунова $\mathcal{L}_3$ дорівнює 0.

Результат, отриманий у статті, свідчить про більшу стійкість індукованої системи $(C(I), f)$ у порівнянні зі стійкістю вихідної системи (I, f). Окрім теоретичного інтересу це може допомогти у розрахунках, пов'язаних із ітераціями деякої чутливої системи. При заміні окремих точок їхніми околами можна буде уникнути накопичення похибок.

Література

1. *Akin E., Kolyada S.* Li – Yorke sensitivity // Nonlinearity. — 2003. — **16**. — P. 1421 – 1433.
2. *Auslander J., Yorke J.* Interval maps, factors of maps and chaos // Tohoku Math. J. — 1980. — **32**. — P. 177 – 188.
3. *Kolyada S., Rybak O.* On the Lyapunov numbers // Colloq. Math. — 2013. — **131**, № 2. — P. 209 – 218.
4. *Matviichuk M., Robatian D.* Chain transitive induced interval maps on continua // Discrete and Contin. Dynam. Syst. — 2015. — **35**, № 2. — P. 741 – 755.
5. *Robatian D.* The fixed-point property under induced interval maps of continua // Nonlinear Oscillations. — 2015. — **18**, № 1. — P. 102 – 111.
6. *Ruelle D.* Dynamical systems with turbulent behavior // Lect. Notes Phys. — 1978. — **80**.
7. *Рибак О.* Числа Ляпунова для динамічних систем на відрізку // Мат. вісн. Наук. тов-ва ім. Шевченка. — 2013. — **10**. — С. 127 – 134.
8. *Федоренко В. В.* Асимптотична періодичність траєкторій інтервалу // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 6. — С. 854 – 858.

Одержано 19.09.15