УДК 517.983

ЗАГАЛЬНИЙ ВИГЛЯД УЗАГАЛЬНЕНО-ОБОРОТНИХ ОПЕРАТОРІВ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

В. П. Журавльов

Житомир. нац. агроекол. у-т
бульвар Старий, 7, Житомир, 10008, Україна
e-mail: vfz2008@ukr.net

We prove theorems on a general form of generalized invertible operators on Banach spaces in the case where the operators are topologically Noetherian or topologically Fredholm. These theorems generalize the well-known theorems of S. M. Nikol'sky on a general form of a Fredholm operator and of F. V. Atkinson on a general form of a Noetherian operator on a function spaces.

Доказаны теоремы об общем виде обобщенно-обратимых операторов в банаховых пространствах, которые являются топологически нетеровыми, топологически фредгольмовыми. Эти теоремы обобщают известные теоремы С. М. Никольского об общем виде фредгольмовых операторов и Ф. В. Аткинсона об общем виде нетеровых операторов в функциональных пространствах.

Дослідження не скрізь розв'язних операторних рівнянь $Lx = f$ та крайових задач для них у банахових просторах залежить від можливості встановлення умов існування та побудови їх загальних розв'язків за допомогою узагальнено-обернених операторів L^-. У роботі [1, с. 139] наведено необхідні та достатні умови узагальненої оборотності лінійних обмежених операторів.

Спосіб побудови узагальнено-обернених операторів до фредгольмових за допомогою так званої конструкції Е. Шмідта [2, с. 339] є відомим. Клас узагальнено-оборотних операторів, які є фредгольмовими, описує теорема, відома як теорема С. М. Нікольського [3]. За цією теоремою лінійний обмежений фредгольмовий оператор, який діє у лінійних нормованих просторах, подається у вигляді суми неперервно оборотного та скінченновимірного операторів. Ф. С. Алієв [4], а пізніше A. G. Ramm [5] узагальнили теорему С. М. Нікольського на випадок замкнених операторів. Теорему, що узагальнює теорему С. М. Нікольського на випадок узагальнено-оборотних операторів, які є нетеровими, довів Ф. В. Аткінсон [6]. За цією теоремою будь-який нетеровий оператор можна подати у вигляді суми односторонньо оберненого та скінченновимірного операторів.

Постановка задачі. Нехай L — лінійний обмежений оператор, який діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у банаховий простір $\mathbf{B}_2$, ядро $N(L)$ та образ $R(L)$ якого доповнювальні підпросторами X_L та Y_L у просторах $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$ відповідно. Це означає, що оператор L є узагальнено-оборотним [1].

Позначимо $\dim N(L) = \mu$, $\dim N(L^*) = \nu$, де μ та ν — додатні цілі числа або нескінченність. Залежно від значень μ та ν розрізняють узагальнено-оборотні оператори таких класів: фредгольмові ($\mu = \nu < \infty$) [7], нетерові ($\mu \neq \nu, \mu < \infty, \nu < \infty$) [8], n-нормальні ($\mu < \infty, \nu = \infty$) з доповнювальним образом $R(L)$ [9], d-нормальні ($\mu = \infty, \nu < \infty$) з доповнювальним ядром $N(L)$ [9], топологічно фредгольмові ($\mu = \infty, \nu = \infty, N(L) \cong Y_L$) [10], звідно оборотні ($\mu = \infty, \nu = \infty$), якщо оператор діє з банахового простору $\mathbf{B}$ у $\mathbf{B}$ [11], топологічно нетерові ($\mu = \infty, \nu = \infty$) [10].

У цій роботі ми доведемо теореми про загальний вигляд узагальнено-оборотних операторів у банахових просторах, які є топологічно фредгольмовими та топологічно нетеровими.

Попередні відомості. Нехай $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ — лінійний узагальнено-оборотний оператор. Це означає, що існують обмежені проектори [12] $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \to N(L)$ та $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \to Y_L$, які індукують розбиття $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$ у прямі топологічні суми

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= N(L) \oplus X_L, \\ \mathbf{B}_2 &= Y_L \oplus R(L) \end{aligned} \tag{1}$$

замкнених підпросторів $N(L)$ та X_L і Y_L та $R(L)$. У подальшому клас лінійних обмежених узагальнено-оборотних операторів, які діють з банахового простору $\mathbf{B}_1$ у банаховий простір $\mathbf{B}_2$, будемо позначати $\mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$.

Для підпросторів $N(L)$ та Y_L розглянемо три випадки [13]:

1. Підпростір $N(L)$ лінійно ізоморфний доповнювальному в Y_L підпростору Y_1, $N(L) \cong Y_1 \subset Y_L$.

Це означає, що існують лінійний обмежений оборотний оператор $J_1 : N(L) \to Y_1$ такий, що $J_1 N(L) = Y_1, J_1^{-1} Y_1 = N(L)$, і обмежений проектор $\mathcal{P}_{Y_1} : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_2$, який розбиває підпростір Y_L у пряму топологічну суму замкнених підпросторів

$$Y_L = Y_1 \oplus Y_2, \tag{2}$$

де $Y_1 = \mathcal{P}_{Y_1}\mathbf{B}_2$, $Y_2 = \mathcal{P}_{Y_2}\mathbf{B}_2$, $\mathcal{P}_{Y_2} = (\mathcal{P}_{Y_L} - \mathcal{P}_{Y_1})$ — обмежений проектор.

2. Підпростір Y_L лінійно ізоморфний доповнювальному в $N(L)$ підпростору $N_1(L)$, $Y_L \cong N_1(L) \supset N(L)$.

У цьому випадку існують лінійний обмежений оборотний оператор $J_2 : N_1(L) \to Y_L$ такий, що $J_2 N_1(L) = Y_L$, $J_2^{-1} Y_L = N_1(L)$, і обмежений проектор $\mathcal{P}_{N_1(L)} : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$, що розбиває підпростір $N(L)$ у пряму топологічну суму замкнених підпросторів

$$N(L) = N_1(L) \oplus N_2(L),$$

де $N_1(L) = \mathcal{P}_{N_1(L)}\mathbf{B}_1$, $N_2(L) = \mathcal{P}_{N_2(L)}\mathbf{B}_1$, $\mathcal{P}_{N_2(L)} = \mathcal{P}_{N(L)} - \mathcal{P}_{N_1(L)}$ — обмежений проектор.

3. Нуль-простір $N(L)$ лінійно ізоморфний підпростору Y_L, $N(L) \cong Y_L$.

У цьому випадку існує лінійний обмежений оборотний оператор $J_3 : N(L) \to Y_L$ такий, що $J_3 N(L) = Y_L$, $J_3^{-1} Y_L = N(L)$, тобто оператор J_3 встановлює взаємно однозначну відповідність між елементами нуль-простору $N(L)$ та Y_L.

Продовжуючи нулем оператори J_1 та J_3 на підпросторі X_L, а оператор J_2 на підпросторі $X_L \oplus N_2(L)$, позначимо розширення операторів J_i, $i = 1, 2, 3$, на простір $\mathbf{B}_1$ через $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} : \mathbf{B}_1 \to Y_1 \subseteq Y$. Аналогічно, продовжуючи нулем оператор J_1^{-1} на підпросторі $Y_2 \oplus R(L)$, а оператори J_2^{-1}, J_3^{-1} на підпросторі $R(L)$, позначимо розширення операторів J_i^{-1}, $i = 1, 2, 3$, на простір $\mathbf{B}_2$ через $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} : \mathbf{B}_2 \to N_1(L) \subseteq N(L)$. У випадку 3 $Y_1 \equiv Y$, $N_1(L) \equiv N(L)$ і тому $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} \equiv \overline{\mathcal{P}}_Y$, $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} \equiv \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}$.

Лема 1 [13]. *Нехай* $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ *— топологічно нетеровий оператор і виконується одна з умов 1 або 2. Тоді оператор* $\overline{L} = L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ *має обмежений обернений*

$$\overline{L}_{l,r}^{-1} = \begin{cases} (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1})_l^{-1} - \textit{лівий, якщо} \quad N(L) \cong Y_1 \subset Y_L, \\ (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})_r^{-1} - \textit{правий, якщо} \quad N(L) \supset N_1(L) \cong Y_L. \end{cases}$$

Загальний вигляд односторонньо обернених операторів $\overline{L}_{l_0,r_0}^{-1}$ *дається формулою*

$$\overline{L}_{l_0,r_0}^{-1} = \begin{cases} \overline{L}_l^{-1}(I_{\mathbf{B}_2} - \widetilde{\mathcal{P}}_{Y_2}) - \textit{лівий, якщо} \quad N(L) \cong Y_1 \subset Y_L, \\ (I_{\mathbf{B}_1} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N_2(L)})\overline{L}_r^{-1} - \textit{правий, якщо} \quad N(L) \supset N_1(L) \cong Y_L, \end{cases}$$

де $\widetilde{\mathcal{P}}_{N_2(L)} : \mathbf{B}_1 \to N_2(L)$ *і* $\widetilde{\mathcal{P}}_{Y_2} : \mathbf{B}_2 \to Y_2$ *— довільні нескінченновимірні обмежені проектори.*

Наслідок 1. *Якщо* $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ *—* n*-нормальний оператор, то оператор* $\overline{L} = L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ *має обмежений лівий обернений*

$$\overline{L}_l^{-1} = (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1})_l^{-1}.$$

Дійсно, оскільки нуль-простір $N(L)$ є скінченновимірним, а підпростір Y_L — нескінченновимірним, то $N(L)$ ізоморфний скінченновимірному підпростору $Y_1 \subset Y_L$. Таким чином, виконується умова $N(L) \cong Y_1 \subset Y_L$ леми 1. Отже, оператор $\overline{L}$ має обмежений лівий обернений оператор $\overline{L}_l^{-1}$.

Наслідок 2. *Якщо* $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ *— лінійний обмежений* d*-нормальний оператор, то оператор* $\overline{L} = L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$ *має обмежений правий обернений*

$$\overline{L}_r^{-1} = (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})_r^{-1}.$$

Дійсно, оскільки нуль-простір Y_L є скінченновимірним, а підпростір $N(L)$ — нескінченновимірним, то Y_L ізоморфний скінченновимірному підпростору $N_1(L) \subset N(L)$. Таким чином, виконується умова $N(L) \supset N_1(L) \cong Y_L$ леми 1. Отже, оператор $\overline{L}$ має обмежений правий обернений оператор $\overline{L}_r^{-1}$.

Зауваження 1. Якщо оператор L є нетеровим ($\operatorname{ind} L \neq 0$, $\mu \neq \nu$, $\mu < \infty$, $\nu < \infty$), то лема 1 переходить у лему 3.4 [14, с. 66].

Зауваження 2. У гільбертових просторах узагальнена оборотність оператора еквівалентна його нормальній розв'язності. Крім того, у гільбертовому просторі будь-який підпростір є доповнювальним. Тому у гільбертових просторах лема 1 справджується для лінійних обмежених нормально розв'язних операторів. При цьому $\mathcal{P}_{Y_L} = P_{N(L^*)}$, де $P_{N(L^*)}$ — ортопроектор на нуль-простір $N(L^*)$ оператора L^*, який є спряженим до оператора L і, відповідно, $\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} = \overline{P}_{N(L^*)}$.

Для топологічно фредгольмових операторів маємо твердження, яке узагальнює відому лему Е. Шмідта для фредгольмових операторів.

Лема 2. *Нехай* $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ *— топологічно фредгольмовий оператор. Тоді оператор* $\overline{L} = L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$ *має обмежений обернений* $\overline{L}^{\,-1}$.

Дійсно, якщо оператор L є топологічно фредгольмовим, то підпростір $N(L)$ ізоморфний підпростору Y_L. У цьому випадку $\mathcal{P}_{Y_2} \equiv 0$ і $\mathcal{P}_{N_2(L)} \equiv 0$. Отже, нуль-простір оператора

$\overline{L}$ нульовий, $N(\overline{L}) = \{0\}$, а образ $R(\overline{L})$ оператора $\overline{L}$ збігається з усім банаховим простором $\mathbf{B}_2$. Таким чином, існують і лівий $\overline{L}_l^{-1}$, і правий $\overline{L}_r^{-1}$ обернені оператори до оператора $\overline{L}$. Отже, існує єдиний обмежений обернений оператор $\overline{L}^{-1}$ до оператора $\overline{L}$.

При розгляді топологічно фредгольмових операторів у гільбертових просторах лема 2 залишається справедливою, проте завдяки особливій геометрії гільбертових просторів виникає ряд нюансів, які ми і розглянемо.

Нехай $L\colon \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}_2$ — лінійний обмежений топологічно фредгольмовий оператор, який діє з гільбертового простору $\mathbf{H}_1$ у гільбертовий простір $\mathbf{H}_2$, і $\dim N(L) = \infty$, $\dim N(L^*) = \infty$. Тоді підпростір $N(L)$ лінійно ізоморфний $N(L^*)$.

Внаслідок доповнювальності у гільбертовому просторі будь-якої замкненої множини будь-який топологічно фредгольмовий оператор є нормально розв'язним. Тому з леми 2 випливає такий наслідок.

Наслідок 3. *Нехай* $L : \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}_2$ — *нормально розв'язний оператор,* $\dim N(L) = \infty$, $\dim N(L^*) = \infty$, *ядро* $N(L)$ *ізоморфне ядру* $N(L^*)$. *Тоді оператор* $\overline{L} = L + \overline{P}_{N(L^*)}$ *має обмежений обернений.*

Нехай, крім того, гільбертові простори $\mathbf{H}_1$ та $\mathbf{H}_2$ сепарабельні, $L : \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}_2$ — лінійний обмежений нормально розв'язний оператор і $\dim N(L) = \infty$, $\dim N(L^*) = \infty$. Оскільки оператор L є лінійним і обмеженим, а отже, замкненим, то підпростори $N(L)$ і $N(L^*)$ замкнені і сепарабельні. Отже, $N(L)$ та $N(L^*)$ ізометрично ізоморфні як нескінченновимірні сепарабельні гільбертові простори [15, с. 238].

Таким чином, будь-який нормально розв'язний оператор, який діє у сепарабельних гільбертових просторах, є топологічно фредгольмовим.

У цьому випадку в лемі 2 вимога ізоморфності підпросторів $N(L)$ та $N(L^*)$ автоматично виконується і з неї випливає такий наслідок.

Наслідок 4. *Нехай* L — *нормально розв'язний оператор, який діє з сепарабельного гільбертового простору* $\mathbf{H}_1$ *у сепарабельний гільбертовий простір* $\mathbf{H}_2$. *Тоді оператор* $\overline{L} = L + \overline{P}_{N(L^*)}$ *має обмежений обернений.*

Зауваження 3. У випадку, коли $L : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$,

$$\mathbf{B} = N(L) \oplus R(L),$$

лема 2 переходить у відому лему для звідно оборотних операторів [11, с. 28].

Зауваження 4. Якщо оператор L є фредгольмовим ($\operatorname{ind} L = 0, \mu = \nu \neq \infty$), то лема 2 переходить у відому лему Е. Шмідта [2, с. 340].

Основний результат. Розглянемо деякі співвідношення, що пов'язують проектори $\mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_{Y_L}$, лінійні оператори $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}, \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ та лінійні обмежені оператори $\overline{L}_{l,r}^{-1}$.

Лема 3. *Проектори* $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \to N(L)$, $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{B}_2 \to Y_L$ *і оператори* $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} : \mathbf{B}_2 \to N_1(L)$, $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} : \mathbf{B}_1 \to Y_1$ *задовольняють такі співвідношення:*

(a_1) $\mathcal{P}_{Y_L}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\mathcal{P}_{N(L)} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$,

(a_2) $\mathcal{P}_{N(L)}\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} = \overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}\mathcal{P}_{Y_L} = \overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}$,

(a_3) $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} = \mathcal{P}_{Y_1}$,

(a_4) $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \mathcal{P}_{N_1(L)}$.

Доведення. Встановимо, наприклад, співвідношення (a_1).

Нехай $x \in \mathbf{B}_1$. Тоді, з одного боку, $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}x \in Y_1 \subseteq Y_L$ для будь-якого $x \in \mathbf{B}_1$, звідки $\mathcal{P}_{Y_L}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}x = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}x$, оскільки $\mathcal{P}_{Y_L}Y_L = Y_L$. Отже, $\mathcal{P}_{Y_L}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$.

З іншого боку, $\mathcal{P}_{N(L)}x \in N(L) \subset \mathbf{B}_1$ для будь-якого $x \in \mathbf{B}_1$, звідки $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\mathcal{P}_{N(L)}x = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}x$ за означенням оператора $\mathcal{P}_{Y_1}$. Отже, $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\mathcal{P}_{N(L)} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$.

Таким чином,

$$\mathcal{P}_{Y_L}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\mathcal{P}_{N(L)} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}.$$

Інші співвідношення доводяться аналогічно.

Лема 4. *Оператор $\overline{L}_{l,r}^{-1}$ задовольняє співвідношення*

$$\begin{aligned}\overline{L}_{l,r}^{-1}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} &= \mathcal{P}_{N(L)},\\ \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\overline{L}_{l,r}^{-1} &= \mathcal{P}_{Y_1}.\end{aligned} \tag{3}$$

Доведення. Нехай для визначеності підпростір $N(L)$ ізоморфний підпростору $Y_1 \subset \subset Y_L \subset \mathbf{B}_2$. Тоді $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} \equiv \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$, існує лівий обернений оператор $\overline{L}_l^{-1}$ і виконуються співвідношення [1]

$$\overline{L}_l^{-1}\overline{L} = I_{\mathbf{B}_1},$$

$$\overline{L}\,\overline{L}_l^{-1} = I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2},$$

де $I_{\mathbf{B}_1}$, $I_{\mathbf{B}_2}$ — тотожні оператори, відповідно, у просторах $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$, $\mathcal{P}_{Y_2} = \mathcal{P}_{Y_L} - \mathcal{P}_{Y_1}$ — обмежений проектор.

Оскільки $L\mathcal{P}_{N(L)} = 0$ та $\mathcal{P}_{Y_2}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = 0$ і за співвідношенням (a$_1$) леми 3 $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\mathcal{P}_{N(L)} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$, то, застосувавши оператор $\overline{L}$ зліва до першого зі співвідношень (3), отримаємо тотожність

$$\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = (I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2})\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{L}\overline{L}_l^{-1}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} \equiv \overline{L}\mathcal{P}_{N(L)} = L\mathcal{P}_{N(L)} + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\mathcal{P}_{N(L)} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1},$$

з якої маємо перше співвідношення з (3).

Оскільки за співвідношенням (a$_1$) леми 3 $\mathcal{P}_{Y_L}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ та $\mathcal{P}_{Y_L}L = 0$, то застосувавши оператор $\overline{L}$ справа до другого зі співвідношень (3), отримаємо тотожність

$$\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\overline{L}_l^{-1}\overline{L} \equiv \mathcal{P}_{Y_L}\overline{L} = \mathcal{P}_{Y_L}L + \mathcal{P}_{Y_L}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1},$$

яка доводить друге співвідношення з (3).

Для випадку, коли підпростір Y_L ізоморфний підпростору $N_1(L) \subset N(L) \subset \mathbf{B}_1$ та існує правий обернений оператор $\overline{L}_r^{-1}$, лема доводиться аналогічно.

Лема 5. *Оператор $\overline{L}_{l,r}^{-1}$ задовольняє співвідношення*

$$\mathcal{P}_{N(L)}\overline{L}_{l,r}^{-1} = \overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}, \tag{4}$$

$$L\overline{L}_{l,r}^{-1} = I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_L}, \tag{5}$$

$$\overline{L}_{l,r}^{-1}\mathcal{P}_{Y_L} = \overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}, \tag{6}$$

$$\overline{L}_{l,r}^{-1}L = I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(L)}. \tag{7}$$

Доведення. Нехай для визначеності нуль-простір $N(L)$ ізоморфний підпростору $Y_1 \subset \subset Y_L$. Тоді $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} = \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}$ і за лемою 1 існує лівий обернений оператор $\overline{L}_l^{-1}$, який задовольняє співвідношення [1]

$$\overline{L}\overline{L}_l^{-1} = I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2},$$

$$\overline{L}_l^{-1}\overline{L} = I_{\mathbf{B}_1},$$

де $\mathcal{P}_{Y_2} = \mathcal{P}_{Y_L} - \mathcal{P}_{Y_1}$ — обмежений проектор.

Оскільки $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} = \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}$, то за лемою 3 $\overline{\mathcal{P}}_{N(L)}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \mathcal{P}_{N(L)}$. Застосувавши справа оператор $L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ до обох частин рівності (4) та врахувавши, що $\overline{\mathcal{P}}_{N(L)}L = 0$, отримаємо тотожність

$$\mathcal{P}_{N(L)} = \mathcal{P}_{N(L)}\overline{L}_l^{-1}\overline{L} \equiv \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}) = \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}L + \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \mathcal{P}_{N(L)},$$

яка доводить це співвідношення.

Оскільки за лемою 3 $\mathcal{P}_{Y_L}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$, а $\mathcal{P}_{Y_L}Lx = 0$, то, застосувавши справа оператор $L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ до обох частин рівності (5), отримаємо тотожність

$$L = L\overline{L}_l^{-1}\overline{L} \equiv (I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_L})\,(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}) =$$

$$= L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1} - \mathcal{P}_{Y_L}L - \mathcal{P}_{Y_L}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1} - \overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = L,$$

яка доводить це співвідношення

Оскільки, $\mathcal{P}_{Y_L}^2 = \mathcal{P}_{Y_L}$ і $L\,\overline{\mathcal{P}}_{N(L)} = 0$, то, застосувавши зліва оператор L до обох частин рівності (6) і використавши співвідношення (5), отримаємо тотожність

$$0 = (I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_L})\,\mathcal{P}_{Y_L} = L\overline{L}_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_L} \equiv L\overline{\mathcal{P}}_{N(L)} = 0,$$

яка доводить рівність (6).

Застосувавши справа оператор $\overline{L}_l^{-1}$ до обох частин рівності (7) і використавши рівності (4) – (6), отримаємо тотожність

$$\overline{L}_l^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)} = \overline{L}_l^{-1}I_{\mathbf{B}_2} - \overline{L}_l^{-1}\mathcal{P}_{Y_L} = \overline{L}_l^{-1}L\overline{L}_l^{-1} \equiv (I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(L)})\,\overline{L}_l^{-1} =$$

$$= I_{\mathbf{B}_1}\overline{L}_l^{-1} - \mathcal{P}_{N(L)}\overline{L}_l^{-1} = \overline{L}_l^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)},$$

яка доводить це співвідношення.

Для випадку, коли підпростір Y_L лінійно ізоморфний доповнювальному в $N(L)$ підпростору $N_1(L)$, $Y_L \cong N_1(L) \supset N(L)$, лема доводиться аналогічно.

Лему доведено.

Зауваження 5. Якщо оператор L є топологічно фредгольмовим, то $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} \equiv \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_{Y_1} \equiv \mathcal{P}_{Y_L}$, $\overline{L}_{l,r}^{-1} = \overline{L}^{\,-1}$ і леми 3 – 5 будуть справедливими.

Використовуючи леми 3 – 5, доведемо теорему про загальний вигляд топологічно нетерових операторів у банахових просторах.

Теорема 1. *Нехай $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ – лінійний обмежений оператор. Для того щоб оператор $L\colon \mathbf{B_1} \to \mathbf{B_2}$ був топологічно нетеровим з нуль-простором $N(L)$, ізоморфним* *підпростору $Y_1 \subset Y_L$ (з підпростором Y_L, ізоморфним підпростору $N_1(L) \subset N(L)$), необхідно і достатньо, щоб існували обмежений оператор $U\colon \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1$, обмежений проектор $\mathcal{P}_{Y_1}\colon Y_L \to Y_1$ (обмежений проектор $\mathcal{P}_{N_1(L)}\colon N(L) \to N_1(L)$), нескінченновимірні обмежені проектори $K_1\colon \mathbf{B_1} \to \mathbf{B_1}$, $K_2\colon \mathbf{B_2} \to \mathbf{B_2}$ такі, що*

$$UL = I_{\mathbf{B}_1} - K_1, \tag{8}$$

$$LU = I_{\mathbf{B}_2} - K_2. \tag{9}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ — топологічно нетеровий оператор і для визначеності нуль-простір $N(L)$ ізоморфний підпростору $Y_1 \subset Y_L$. Покажемо, що за оператор U можна взяти лівий обернений оператор $\overline{L}_l^{\,-1}$, за K_1 — оператор $\mathcal{P}_{N(L)}$, а за K_2 — оператор $\mathcal{P}_{Y_L}$.

За лемою 1 обмежений лівий обернений оператор $\overline{L}_l^{\,-1}$ існує, отже [1],

$$\overline{L}_l^{\,-1}\overline{L} = I_{\mathbf{B}_1}, \tag{10}$$

$$\overline{L}\,\overline{L}_l^{\,-1} = I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}. \tag{11}$$

Оскільки за лемою 4 $\overline{L}_l^{\,-1}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \mathcal{P}_{N(L)}$, то із співвідношення (10) маємо рівність

$$\overline{L}_l^{\,-1}\overline{L} = \overline{L}_l^{\,-1}(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}) = \overline{L}_l^{\,-1}L + \overline{L}_l^{\,-1}\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} = \overline{L}_l^{\,-1}L + \mathcal{P}_{N(L)} = I_{\mathbf{B}_1},$$

з якої отримуємо співвідношення (8).

Тепер доведемо співвідношення (9). Із співвідношення (11) на підставі леми 2 маємо рівність

$$\overline{L}\,\overline{L}_l^{\,-1} = (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1})\overline{L}_l^{\,-1} = L\overline{L}_l^{\,-1} + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}\,\overline{L}_l^{\,-1} = L\overline{L}_l^{\,-1} + \mathcal{P}_{Y_1} = I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2},$$

з якої з урахуванням (1), (2) отримуємо співвідношення (9).

Достатність. Нехай існують оператор U та проектори K_1 і K_2, для яких виконуються умови (8) та (9). Нехай, як і раніше, $U = \overline{L}_l^{\,-1}$ — лінійний обмежений оператор, $K_1 = \mathcal{P}_{N(L)}$ та $K_2 = \mathcal{P}_{Y_L}$ — лінійні нескінченновимірні обмежені проектори.

Розглянемо рівняння $Lx = 0$. Застосувавши до нього оператор U зліва і врахувавши при цьому (8), отримаємо

$$ULx = \overline{L}_l^{\,-1}Lx = (I_{\mathbf{B}_1} - K_1)x = 0,$$

тобто $x = K_1x$.

Оскільки K_1 — нескінченновимірний обмежений проектор, то за K_1 можна взяти проектор $\mathcal{P}_{N(L)}$. У цьому випадку рівняння $Lx = 0$ має розв'язок $x = \mathcal{P}_{N(L)}\bar{x}$, де $\bar{x}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$, $x \in N(L)$. Таким чином, $\dim N(L) = \infty$.

Далі розглянемо неоднорідне рівняння $Lx = y$. Нехай $x = Uz$. Тоді з рівності (9) маємо

$$Lx = LUz = L\overline{L}_l^{\,-1}z = (I_{\mathbf{B}_2} - K_2)z = y.$$

За умовою теореми K_2 — нескінченновимірний обмежений проектор у просторі $\mathbf{B}_2$. В якості K_2 можна взяти проектор $\mathcal{P}_{Y_L}$. Однорідне рівняння $(I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_L})z = 0$ має розв'язок $z = \mathcal{P}_{Y_L}\bar{z}$, де $\bar{z}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_2$. Звідси маємо $\dim Y_L = \infty$. Таким чином, оператор L є топологічно нетеровим.

Теорему доведено.

Зауваження 6. Якщо оператор $K_1 : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ є скінченновимірним, а оператор $K_2 : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_2$ — обмеженим нескінченновимірним, то теорема 1 переходить у теорему 1 [16] для узагальнено-оборотних n-нормальних операторів. Якщо ж оператор $K_1 \colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ є обмеженим нескінченновимірним, а оператор $K_2 : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_2$ — скінченновимірним, то теорема 1 переходить у теорему 2 [16] для узагальнено-оборотних d-нормальних операторів.

Зауваження 7. Якщо оператори $K_1 : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ та $K_2 : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_2$ є скінченновимірними, то оператор L — нетеровий. Тоді теорема 1 переходить у теорему Ф. В. Аткінсона [6].

Далі сформулюємо теорему про загальний вигляд топологічно фредгольмових операторів у банахових просторах, яка узагальнює відому теорему С. М. Нікольського про загальний вигляд фредгольмових операторів.

Теорема 2. *Нехай $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ — лінійний обмежений оператор. Для того щоб оператор $L : \mathbf{B_1} \to \mathbf{B_2}$ був топологічно фредгольмовим, необхідно і достатньо, щоб існували обмежений оборотний оператор $U : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1$, нескінченновимірні обмежені проектори $K_1 : \mathbf{B_1} \to \mathbf{B_1}$, $K_2 : \mathbf{B_2} \to \mathbf{B_2}$ такі, що*

$$UL = I_{\mathbf{B}_1} - K_1, \tag{12}$$

$$LU = I_{\mathbf{B}_2} - K_2. \tag{13}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай L — топологічно фредгольмовий оператор. Тоді $N_1(L) \equiv N(L)$, $Y_1 \equiv Y_L$ і, відповідно, $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} \equiv \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}$, $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} \equiv \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$.

Покажемо, що за оператор U можна взяти оператор $\overline{L}^{\,-1}$, за K_1 — оператор $\mathcal{P}_{N(L)}$, а за K_2 — оператор $\mathcal{P}_{Y_L}$.

За лемою 2 обернений оператор $\overline{L}^{\,-1}$ існує, отже,

$$\overline{L}^{\,-1}\overline{L} = I_{\mathbf{B}_1}, \tag{14}$$

$$\overline{L}\,\overline{L}^{\,-1} = I_{\mathbf{B}_2}. \tag{15}$$

Оскільки $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} \equiv \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}$, а за лемою 3 $\overline{L}^{\,-1}\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} = \mathcal{P}_{N(L)}$, то із співвідношення (14) отримуємо рівність

$$\overline{L}^{\,-1}\overline{L} = \overline{L}^{\,-1}(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}) = \overline{L}^{\,-1}L + \overline{L}^{\,-1}\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} = \overline{L}^{\,-1}L + \mathcal{P}_{N(L)} = I_{\mathbf{B}_1},$$

з якої випливає співвідношення (12).

Тепер доведемо співвідношення (13). Із співвідношення (15) з урахуванням лем 2 та 3 отримуємо рівність

$$\overline{L}\,\overline{L}^{\,-1} = (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L})\,\overline{L}^{\,-1} = L\overline{L}^{\,-1} + \overline{\mathcal{P}}_{Y_L}\,\overline{L}^{\,-1} = L\overline{L}^{\,-1} + \mathcal{P}_{Y_L} = I_{\mathbf{B}_2},$$

з якої маємо співвідношення (13).

Достатність. Нехай існують оператор U і проектори K_1 і K_2, для яких виконуються умови (12) та (13). Нехай, як і раніше, $U = \overline{L}^{\,-1}$ — лінійний обмежений оператор, $K_1 = \mathcal{P}_{N(L)}$ та $K_2 = \mathcal{P}_{Y_L}$ — лінійні нескінченновимірні обмежені проектори.

Розглянемо рівняння $Lx = 0$. Застосувавши до нього оператор U зліва і врахувавши (12), отримаємо

$$ULx = \overline{L}^{\,-1}Lx = (I_{\mathbf{B}_1} - K_1)x = 0,$$

тобто $x = K_1 x$.

Таким чином, K_1 — нескінченновимірний обмежений проектор, тому за K_1 можна взяти проектор $\mathcal{P}_{N(L)}$. У цьому випадку рівняння $Lx = 0$ має розв'язок $x = \mathcal{P}_{N(L)}\bar{x}$, де $\bar{x}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$, $x \in N(L)$. Отже, $\dim N(L) = \infty$.

Далі розглянемо неоднорідне рівняння $Lx = y$. Нехай $x = Uz$. Тоді з рівності (13) маємо

$$Lx = LUz = L\overline{L}^{\,-1}z = (I_{\mathbf{B}_2} - K_2)z = y.$$

За умовою теореми K_2 — нескінченновимірний обмежений оператор у просторі $\mathbf{B}_2$. За K_2 можна взяти проектор $\mathcal{P}_{Y_L}$. Однорідне рівняння $(I_{\mathbf{B}_2} - K_2)z = 0$ має розв'язок $z = \mathcal{P}_{Y_L}\bar{z}$, де $\bar{z}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_2$. Звідси маємо $\dim Y_L = \infty$.

Оскільки $\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} : \mathbf{B}_1 \to Y_L$, а за лемою 4 $\overline{L}^{\,-1}\overline{\mathcal{P}}_{Y_L} = \mathcal{P}_{N(L)}$, то оператор $\overline{L}^{\,-1}$ встановлює взаємно однозначну відповідність між підпросторами $N(L)$ та Y_L. Таким чином, оператор L є топологічно фредгольмовим.

Теорему доведено.

Література

1. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. — Кишинев: Штиинца, 1973. — 426 с.
2. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 527 с.
3. *Никольский С. М.* Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах // Изв. АН СССР. — 1943. — **7**, № 3. — С. 147–163.
4. *Алиев Ф. С.* Обобщение теоремы С. М. Никольского на случай замкнутого оператора // Докл. АН Аз ССР. — 1960. — **16**, № 1. — С. 7–11.
5. *Ramm A. G.* A simple proof of the Fredholm alternative and a characterization of the Fredholm operators // Amer. Math. Mon. — 2001. — **108**, № 9. — P. 855–860.
6. *Аткинсон Ф. В.* Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах // Мат. сб. Нов. сер. — 1951. — **28**, № 1. — С. 3–14.
7. *Fredholm I.* Sur une Classe d'equations fonctionnelles // Acta Math. — 1903. — **27**. — P. 265–390.
8. *Noether F.* Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen // Math. Ann. — 1921. — № 82. — P. 42–64.
9. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104 с.
10. *Абдуллаев А. Р., Бурмистрова А. Б.* Топологические нетеровы операторы: обобщенная обратимость и аддитивное представление // Изв. вузов. — 1994. — № 6. — С. 3–7.
11. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем. — Киев: Наук. думка, 1978. — 218 с.
12. *Попов М. М.* Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха // Математика сьогодні'07. — 2007. — Вип. 13. — С. 78–116.

13. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Покутный А. А.* Нормально разрешимые операторные уравнения в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 2. — С. 163 – 174.

14. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 319 с.

15. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. — Киев: Наук. думка, 1990. — 600 с.

16. *Журавльов В. П.* Загальний вигляд n-нормальних та d-нормальних операторів у банаховому просторі // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Математика. — 2011. — **1**, № 4. — С. 52 – 58.

Одержано 22.12.14