УДК 517

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Г. П. Пелюх

Ин-т математики НАН Украины
ул. Терещенковская, 3, Киев, 01004, Украина
e-mail: grygor@imath.kiev.ua

We study the structure of the set of continuously differentiable solutions to a class of systems of neutral type differential-difference equations.

Досліджено структуру множини неперервно диференційовних розв'язків одного класу систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу.

В современной теории дифференциально-разностных уравнений существует ряд проблем, исследование которых имеет особое значение для ее развития в целом. В частности, к ним относится проблема описания различного рода множеств решений таких уравнений. При определенных предположениях она достаточно глубоко изучалась многими математиками (см., например, [1]) и в настоящее время является хорошо исследованной для отдельных классов дифференциально-разностных уравнений [1–5]. Изучение структуры множества решений системы дифференциально-разностных уравнений вида

$$x'(t+1) = Ax'(t) + F(t, x(t), x'(t)), \tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R}$, A — вещественная $(n \times n)$-матрица, $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, является главной целью настоящей работы. В общем случае такие системы уравнений имеют бесконечно много решений и, следовательно, их классификация (по определенным свойствам) имеет большое значение для развития их теории.

В наиболее простом случае, когда $F \equiv 0$, исследование системы уравнений (1) сводится к исследованию линейной системы уравнений вида

$$y'(t+1) = Ay'(t), \tag{2}$$

для которой можно построить представление общего решения, существенно зависящее от структуры матрицы A. Располагая таким результатом при изучении общего случая $(F \not\equiv 0)$, можно было бы попытаться свести исследование системы уравнений (1) к исследованию системы уравнений (2) с помощью некоторого взаимно однозначного преобразования. Но эту, вообще говоря, плодотворную идею удается реализовать лишь в исключительных случаях и, следовательно, естественно возникает задача об описании множества решений системы уравнений (1), „мало” отличающихся от соответствующих решений системы уравнений (2). Именно эта задача изучается в настоящей статье при исследовании решений системы уравнений (1), удовлетворяющих условию

$$\lim_{t\to+\infty}[x(t+1) - Ax(t)] = 0. \tag{3}$$

При этом предполагаются выполненными следующие условия:

1) $|A| < 1, \det A \neq 0$;

2) вектор-функция $F(t,x,y)$ является непрерывной при $t \geq T > 0$, $|x| \leq a$, $F(t,0,0) \equiv \equiv 0$ и удовлетворяет неравенству

$$\left|F\left(t,x',y'\right) - F\left(t,x'',y''\right)\right| \leq \gamma(t)\left(\left|x'-x''\right| + \left|y'-y''\right|\right),$$

где $\gamma(t)$ — некоторая непрерывная неотрицательная функция;

3) ряды

$$H_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} |A^{-1}|^{i+1} \left| \int_t^{+\infty} \gamma(\tau+i)d\tau \right|, \quad H_2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^{i+1} \gamma(\tau+i)$$

равномерно сходятся при $t \geq T$ и $2H_i(t) \leq \theta_i < 1$, $i = 1, 2$.

Поскольку любое непрерывно дифференцируемое решение задачи (1), (3) является решением системы уравнений

$$x(t+1) = Ax(t) - \int_t^{+\infty} F(\tau, x(\tau), x'(\tau))d\tau \tag{4}$$

и, наоборот, любое непрерывно дифференцируемое решение системы уравнений (4) удовлетворяет системе уравнений (1) и условию (3), далее будем исследовать систему уравнений (4).

Определение. *Будем говорить, что система уравнений (4) имеет степенно-показательное асимптотическое равновесие, если:*

а) произвольное непрерывно дифференцируемое и ограниченное при $t \geq T > 0$ решение $x(t)$ удовлетворяет при $t \to +\infty$ соотношению

$$x(t) = y(t) + o(1), \tag{5}$$

где $y(t)$ — непрерывно дифференцируемое и ограниченное при $t \geq T$ решение системы уравнений

$$y(t+1) = Ay(t); \tag{6}$$

б) для любого непрерывно дифференцируемого и ограниченного при $t \geq T$ решения $y(t)$ системы уравнений (6) существует непрерывно дифференцируемое и ограниченное при $t \geq T$ решение системы уравнений (4), удовлетворяющее при $t \to +\infty$ соотношению (5).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия 1, 2. Тогда для любого непрерывно дифференцируемого и ограниченного при $t \geq T$ решения системы уравнений (4) существует непрерывно дифференцируемое и ограниченное при $t \geq T$ решение системы уравнений (6), удовлетворяющее при $t \to +\infty$ соотношению (5).*

Доказательство. Действительно, если $\gamma(t)$ — некоторое непрерывно дифференцируемое и ограниченное при $t \geq T$ решение системы уравнений (4), то в силу 1, 2 имеем тождество

$$\gamma(t) = y(t) + \sum_{i=0}^{\infty} A^{-(i+1)} \int\limits_{t+i}^{+\infty} F(\tau, \gamma(\tau), \gamma'(\tau)) d\tau,$$

где

$$y(t) = \gamma(t) - \sum_{i=0}^{\infty} A^{-(i+1)} \int\limits_{t+i}^{+\infty} F(\tau, \gamma(\tau), \gamma'(\tau)) d\tau.$$

Отсюда и из условий 1, 2 непосредственно следует, что вектор-функция $y(t)$ является непрерывно дифференцируемой и ограниченной при $t \geq T$ и выполняется соотношение (5).

Покажем теперь, что вектор-функция $y(t)$ является решением системы уравнений (6). Действительно, поскольку

$$\gamma(t+1) = A\gamma(t) - \int\limits_{t}^{+\infty} F(\tau, \gamma(\tau), \gamma'(\tau)) d\tau,$$

то

$$\begin{aligned} y(t+1) &= \gamma(t+1) - \sum_{i=0}^{\infty} A^{-(i+1)} \int\limits_{t+1+i}^{+\infty} F(\tau, \gamma(\tau), \gamma'(\tau)) d\tau = \\ &= A\gamma(t) - \int\limits_{t}^{+\infty} F(\tau, \gamma(\tau), \gamma'(\tau)) d\tau - \sum_{i=0}^{\infty} A^{-(i+1)} \int\limits_{t+i+1}^{+\infty} F(\tau, \gamma(\tau), \gamma'(\tau)) d\tau = \\ &= A\gamma(t) - A\,A^{-1} \int\limits_{t}^{+\infty} F(\tau, \gamma(\tau), \gamma'(\tau)) d\tau - A \sum_{i=0}^{\infty} A^{-(i+2)} \int\limits_{t+i+1}^{+\infty} F(\tau, \gamma(\tau), \gamma'(\tau)) d\tau = \\ &= A \left[\gamma(t) - \sum_{i=0}^{\infty} A^{-(i+1)} \int\limits_{t+i}^{+\infty} F(\tau, \gamma(\tau), \gamma'(\tau)) d\tau \right] = Ay(t). \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Тем самым доказано, что утверждение а) имеет место.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия 1, 2. Тогда для любой непрерывно дифференцируемой и ограниченной при $t \geq T$ вектор-функции $y(t)$, являющейся решением системы уравнений (6), существует непрерывно дифференцируемое и ограниченное при $t \geq T$ решение $x(t)$ системы уравнений (4), удовлетворяющее соотношению (5).*

Доказательство. Рассмотрим систему нелинейных уравнений вида

$$x(t) = y(t) + \sum_{i=0}^{\infty} A^{-(i+1)} \int_{t+i}^{+\infty} F(\tau, x(\tau), x'(\tau)) d\tau, \tag{7}$$

где $y(t)$ — непрерывно дифференцируемое и ограниченное при $t \geq T$ решение системы уравнений (6). Поскольку любое непрерывно дифференцируемое и ограниченное при $t \geq T$ решение системы (7) является решением системы (4) (в этом можно убедиться непосредственно подстановкой (7) в (4)) и удовлетворяет соотношению (5) (следует из условий 1, 2), для доказательства теоремы достаточно установить существование непрерывно дифференцируемого и ограниченного при $t \geq T$ решения системы уравнений (7).

При построении решения системы уравнений воспользуемся методом последовательных приближений, которые определим следующим образом:

$$x_0(t) = y(t), \quad x_0'(t) = y'(t),$$

$$x_m(t) = y(t) + \sum_{i=0}^{\infty} A^{-(i+1)} \int_{t+i}^{+\infty} F(\tau, x_{m-1}(\tau), x'_{m-1}(\tau)) d\tau, \tag{8}$$

$$x'_m(t) = y'(t) - \sum_{i=0}^{\infty} A^{-(i+1)} F(\tau, x_{m-1}(\tau), x'_{m-1}(\tau)), \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Принимая во внимание условия 1 – 3 теоремы, методом математической индукции можно показать, что вектор-функции $x_m(t)$, $m \geq 0$, непрерывно дифференцируемы при $t \geq T$ и выполняются неравенства

$$|x_m(t)| \leq \frac{M}{1-\theta}, \quad |x'_m(t)| \leq \frac{M}{1-\theta}, \quad m = 0, 1, \ldots, \tag{9}$$

где $M = \max\{M_1, M_2\}$, $\theta = \max\{\theta_1, \theta_2\}$, $|y(t)| \leq M_1$, $|y'(t)| \leq M_2$.

Докажем теперь, что последовательности вектор-функций $x_m(t)$, $x'_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, равномерно сходятся при $t \geq T$. Для этого, очевидно, достаточно показать, что при $t \geq T$ и всех $m \geq 1$ выполняются неравенства

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leq M\theta^m, \quad |x'_m(t) - x'_{m-1}(t)| \leq M\theta^m. \tag{10}$$

Действительно, в силу (8) и условий 1 – 3 при $m = 1$ имеем

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |A^{-1}|^{i+1} \left| \int_t^{+\infty} F(\tau + i, y(\tau + i), y'(\tau + i)) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} |A^{-1}|^{i+1} \left| \int_t^{+\infty} \gamma(\tau + i) \left(|y(\tau + i)| + \left|y'(\tau + i)\right| \right) d\tau \right| \leq$$

$$\leq 2M \sum_{i=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^{i+1} \left| \int_{t}^{+\infty} \gamma(\tau+i) d\tau \right| \leq MH_1(t) \leq M\theta,$$

$$|x_1'(t) - x_0'(t)| \leq \left| \sum_{i=0}^{\infty} A^{-(i+1)} F(t+i, y(t+i), y'(t+i)) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} |A^{-1}|^{i+1} \gamma(t+i) \left(|y(t+i)| + \left|y'(t+i)\right|\right) \leq$$

$$\leq 2M \left|A^{-1}\right| \sum_{i=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^{i} \gamma(t+i) \leq MH_2(t) \leq M\theta,$$

и, следовательно, неравенства (10) выполняются. Предположим, что они доказаны для некоторого $m \geq 1$, и покажем, что они сохраняются при переходе от m к $m+1$. Действительно, принимая во внимание (8) – (10) и условия 1 – 3, получаем

$$|x_{m+1}(t) - x_m(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^{i+1} \left| \int_{t}^{+\infty} \left|F(\tau+i, x_m(\tau+i), x_m'(\tau+i)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -F(\tau+i, x_{m-1}(\tau+i), x_{m-1}'(\tau+i))\right| d\tau \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^{i+1} \left| \int_{t}^{+\infty} \gamma(\tau+i) \left(|x_m(\tau+i) - x_{m-1}(\tau+i)| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left|x_m'(\tau+i) - x_{m-1}'(\tau+i)\right|\right) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^{i+1} \left| \int_{t}^{+\infty} \gamma(\tau+i) \left(M\theta^m + M\theta^m\right) d\tau \right| \leq MH_1(t)\theta^m \leq M\theta^{m+1},$$

$$|x_{m+1}'(t) - x_m'(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |A|^{-(i+1)} \left|F(t+i, x_m(t+i), x_m'(t+i)) - \right.$$

$$\left. -F(t+i, x_{m-1}(t+i), x_{m-1}'(t+i))\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} |A^{-1}|^{i+1} \gamma(t+i) \left(|x_m(t+i) - x_{m-1}(t+i)| + \right.$$

$$\left. + \left|x_m'(t+i) - x_{m-1}'(t+i)\right|\right) \leq M\theta^m H_2(t) \leq M\theta^{m+1}.$$

Таким образом, неравенства (10) выполняются при всех $m \geq 1$ и, следовательно, последовательности вектор-функций $x_m(t), x_m'(t), m = 0, 1, \ldots$, равномерно сходятся при

$t \geq T$, а вектор-функция

$$x(t) = \lim_{m\to\infty} x_m(t)$$

является непрерывно дифференцируемым решением системы уравнений (7) (в этом можно убедиться, если в (8) перейти к пределу при $m \to \infty$), удовлетворяющим условиям

$$|x(t)| \leq \frac{M}{1-\theta}, \quad |x'(t)| \leq \frac{M}{1-\theta}$$

(следует из (9)).

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия 1–3. Тогда система уравнений (4) имеет степенно-показательное асимптотическое равновесие.*

Литература

1. *Хейл Дж.* Теория дифференциально-функциональных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 548 с.
2. *Пелюх Г. П.* Об асимптотических свойствах решений систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Дифференц. уравнения. — 2003. – № 1. — С. 45–49.
3. *Пелюх Г. П.* О свойствах решений предельной задачи для систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 2. — С. 217–224.
4. *Gumovski I., Mira C.* Recurrences and discrete dynamic systems // Lect. Notes Math. — 1980. — **809**. – P. 267.
5. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства // Укр. мат. журн. — 1994. — **46**, № 6. — С. 737–747.

Получено 14.10.14,
после доработки — 22.07.15