УДК 517.925.44

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Е. С. Владова

Одес. гос. академия стр-ва и архитектуры
ул. Дидрихсона, 4, Одесса, 65000, Украина
e-mail: lena@gavrilovka.com.ua

For a two-term second order differential equation with regularly and rapidly changing nonlinearity, we study asymptotic behavior of a class of solutions in the case where $t \uparrow \omega$ $(\omega \le +\infty)$.

Досліджується асимптотична поведінка при $t \uparrow \omega$ $(\omega \le +\infty)$ *одного класу розв'язків двочленного диференціального рівняння другого порядку з правильно та швидко мінливими нелінійностями.*

1. Постановка задачи. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_1(y)\varphi_2(y'), \tag{1.1}$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p\colon [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ — непрерывная функция, $\varphi_i\colon \Delta(Y_i^0) \to]0,+\infty[$, $i = 1,2,$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции, где $\Delta(Y_i^0)$ — некоторая односторонняя окрестность точки Y_i^0, Y_i^0 равно либо 0, либо $\pm\infty$, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{\substack{z \to Y_1^0 \\ z\in\Delta(Y_1^0)}} \frac{z\varphi_1'(z)}{\varphi_1(z)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered} \varphi_2'(z) \ne 0 \quad \text{при} \quad z \in \Delta(Y_2^0), \qquad \lim_{\substack{z \to Y_2^0 \\ z\in\Delta(Y_2^0)}} \varphi_2(z) = \Phi_2^0, \quad \Phi_2^0 \in \{0, +\infty\}, \\ \lim_{\substack{z \to Y_2^0 \\ z\in\Delta(Y_2^0)}} \frac{\varphi_2''(z)\varphi_2(z)}{\left[\varphi_2'(z)\right]^2} = 1. \end{gathered} \tag{1.3}$$

В силу условий (1.2), (1.3) функция $\varphi_1(z)$ является правильно или медленно меняющейся при $z \to Y_1^0$, а $\varphi_2(z)$ — быстро меняющейся при $z \to Y_2^0$ (см. [1]).

В случае степенных и правильно меняющихся нелинейностей φ_i, $i = 1,2$, асимптотическое поведение решений уравнения (1.1) исследовалось в работах [2 – 10].

Для рассматриваемого здесь типа уравнения (1.1) в работе [11] был введен следующий достаточно широкий класс монотонных решений.

Определение 1.1. *Решение y уравнения (1.1) называется $P_\omega(\Lambda_0)$-решением, где $-\infty \leq \leq \Lambda_0 \leq +\infty$, если оно определено на некотором промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяет условиям*

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_1^0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \varphi_2(y'(t)) = \Phi_2^0,$$
$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\varphi_2'(y'(t))}{\varphi_2(y'(t))} \frac{y''(t)y(t)}{y'(t)} = \Lambda_0. \tag{1.4}$$

При этом в [11] исследовалась асимптотика $P_\omega(\Lambda_0)$-решений уравнения (1.1) в случае, когда $\Lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Целью настоящей работы является установление асимптотических свойств $P_\omega(\Lambda_0)$-решений уравнения (1.1) и условий их существования в особом случае, когда $\Lambda_0 = 0$.

2. Вспомогательные результаты. Для установления основных результатов настоящей работы нам потребуются некоторые вспомогательные результаты о поведении решений системы

$$u_1' = \alpha_1 p_1(t) \psi_2(u_2),$$
$$u_2' = \alpha_2 p_2(t) \psi_1(u_1), \tag{2.1}$$

в которой $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $i = \overline{1,2}$, $p_i \colon [a, \omega[\to]0 + \infty[$, $i = \overline{1,2}$, — непрерывные функции, $\psi_i \colon \Delta(U_i^0) \to]0; +\infty[$, $i = \overline{1,2}$, — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{\substack{z \to U_i^0 \\ z \in \Delta(U_i^0)}} \frac{z\psi_i'(z)}{\psi_i(z)} = \sigma_i, \quad i = \overline{1,2}, \tag{2.2}$$

где $\sigma_i \in \mathbb{R}$ и таковы, что

$$\sigma_1 \sigma_2 \neq 1, \tag{2.3}$$

$-\infty < a < \omega \leq +\infty$, U_i^0 равно либо 0, либо $\pm\infty$, $\Delta(U_i^0)$ — некоторая односторонняя окрестность точки U_i^0.

Из условия (2.2) следует, что $\psi_i(z)$ — правильно меняющиеся функции при $z \to U_i^0$, $i = \overline{1,2}$, и поэтому представимы в виде

$$\psi_i(z) = |z|^{\sigma_i} \theta_i(z), \tag{2.4}$$

где $\theta_i(z)$ являются медленно меняющимися функциями при $z \to U_i^0$, $i = \overline{1,2}$.

Определение 2.1 [7]. *Будем говорить, что медленно меняющаяся при $z \to U^0$ функция $\theta \colon \Delta(U^0) \longrightarrow]0, +\infty[$, $U^0 \in \{0, \pm\infty\}$, удовлетворяет условию S, если для любой непрерывно дифференцируемой функции $l \colon \Delta(U^0) \longrightarrow]0, +\infty[$ такой, что*

$$\lim_{\substack{z \to U^0 \\ z \in \Delta(U^0)}} \frac{z\, l'(z)}{l(z)} = 0,$$

имеет место асимптотическое соотношение

$$\theta(zl(z)) = \theta(z)[1 + o(1)] \quad \textit{при} \quad z \to U^0 \quad (z \in \Delta\left(U^0\right)).$$

Определение 2.2. *Решение* (u_1, u_2) *системы (2.1), заданное на промежутке* $[t_0, \omega[\subset \subset [a, \omega[$*, будем называть* $\mathcal{P}_\omega(0)$*-решением, если для него выполняются условия*

$$u_i(t) \in \Delta(U_i^0) \quad \textit{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} u_i(t) = U_i^0, \quad i = \overline{1, 2},$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{u_1(t) u_2'(t)}{u_1'(t) u_2(t)} = 0.$$

Приведем два результата относительно асимптотического поведения $\mathcal{P}_\omega(0)$-решений системы (2.1), вытекающие из установленных в работе [12]. Для их формулировки потребуются следующие обозначения:

$$\mu_i = \begin{cases} 1, & \text{если } U_i^0 = +\infty, \\ & \text{либо } U_i^0 = 0 \text{ и } \Delta(U_i^0) - \text{правая окрестность } 0, \\ -1, & \text{если } U_i^0 = -\infty, \\ & \text{либо } U_i^0 = 0 \text{ и } \Delta(U_i^0) - \text{левая окрестность } 0, \end{cases}$$

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 1 - \sigma_1 \sigma_2 \neq 0,$$

$$I_1(t) = \int_{A_1}^{t} p_1(\tau)\, d\tau, \quad I_2(t) = \int_{A_2}^{t} p_2(\tau) \psi_1(\mu_1 |I_1(\tau)|)\, d\tau.$$

Здесь каждый из пределов интегрирования $A_i \in \{\omega, a\}$ и выбран так, чтобы соответствующий ему интеграл I_i стремился либо к нулю, либо к ∞ при $t \uparrow \omega$.

Кроме того, положим

$$A_i^* = \begin{cases} 1, & \text{если } A_i = a, \\ -1, & \text{если } A_i = \omega, \end{cases} \qquad i = \overline{1, 2}.$$

Лемма 2.1. *Пусть функция* $\theta_1(z)$ *удовлетворяет условию* S*. Тогда для существования* $\mathcal{P}_\omega(0)$*-решений системы дифференциальных уравнений (2.1) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{I_1(t) I_2'(t)}{I_1'(t) I_2(t)} = 0 \tag{2.5}$$

и для каждого $i \in \{1, 2\}$ *выполнялись знаковые условия*

$$A_i^* \beta_i > 0 \quad \textit{при} \quad U_i^0 = \pm\infty, \quad A_i^* \beta_i < 0 \quad \textit{при} \quad U_i^0 = 0, \tag{2.6}$$

$$\operatorname{sign}\,[\alpha_i A_i^* \beta_i] = \mu_i. \tag{2.7}$$

Более того, каждое такое решение допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\frac{u_1(t)}{\psi_2(u_2(t))} = \alpha_1 \beta_1 I_1(t)[1 + o(1)], \tag{2.8}$$

$$\frac{u_2(t)}{[\psi_2(u_2(t))]^{\sigma_1}} = \alpha_2 \beta_2 I_2(t)[1 + o(1)], \tag{2.9}$$

причем существует однопараметрическое семейство таких решений в случае, когда среди чисел A_1^*, A_2^* одно положительное, и двупараметрическое семейство решений в случае, когда оба числа A_1^*, A_2^* являются положительными.

Лемма 2.2. *Пусть $\theta_i(z)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условию S. Тогда каждое $\mathcal{P}_\omega(0)$-решение (в случае их существования) системы дифференциальных уравнений (2.1) допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления*

$$u_1(t) = \mu_1 \left| \beta_1 I_1(t) \theta_2 \left(\mu_2 |I_2(t)|^{\frac{1}{\beta_2}} \right) \right| \left| \beta_2 I_2(t) \left[\theta_2 \left(\mu_2 |I_2(t)|^{\frac{1}{\beta_2}} \right) \right]^{\sigma_1} \right|^{\frac{\sigma_2}{1-\sigma_1\sigma_2}},$$

$$u_2(t) = \mu_2 \left| \beta_2 I_2(t) \left[\theta_2 \left(\mu_2 \, |I_2(t)|^{\frac{1}{\beta_2}} \right) \right]^{\sigma_1} \right|^{\frac{1}{1-\sigma_1\sigma_2}}.$$

3. Основные результаты. Введем числа

$$\mu_i^0 = \begin{cases} 1, & \text{если } Y_i^0 = +\infty, \\ & \text{либо } Y_i^0 = 0 \text{ и } \Delta(Y_i^0) \text{ -- правая окрестность } 0, \\ -1, & \text{если } Y_i^0 = -\infty, \\ & \text{либо } Y_i^0 = 0 \text{ и } \Delta(Y_i^0) \text{ -- левая окрестность } 0, \end{cases} \qquad i = 1, 2,$$

определяющие знаки $P_\omega(0)$-решений уравнения (1.1) и их производных в некоторой левой окрестности ω, а также функции

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{если } \omega < +\infty, \end{cases} \qquad J(t) = \int_A^t p(\tau)\varphi_1(\mu_1^0 |\pi_\omega(\tau)|)\, d\tau,$$

где предел интегрирования $A \in \{\omega, a\}$ и выбран так, чтобы интеграл J стремился либо к нулю, либо к ∞ при $t \uparrow \omega$.

Кроме того, положим

$$A_1^* = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega = \infty, \\ -1, & \text{если } \omega < \infty, \end{cases} \qquad A_2^* = \begin{cases} 1, & \text{если } A = a, \\ -1, & \text{если } A = \omega. \end{cases}$$

Поскольку функция $\varphi_1(z)$ является правильно меняющейся порядка λ при $z \to Y_1^0$, для нее справедливо представление

$$\varphi_1(z) = |z|^\lambda \theta_1(z), \tag{3.1}$$

где функция $\theta_1(z)$ является медленно меняющейся при $z \to Y_1^0$.

Для уравнения (1.1) имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть функция $\theta_1(z)$ удовлетворяет условию S. Тогда для существования $P_\omega(0)$-решений дифференциального уравнения (1.1) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'(t)}{J(t)} = 0 \tag{3.2}$$

и выполнялись знаковые условия

$$\begin{gathered} A_1^* > 0 \quad \textit{при} \quad Y_1^0 = \pm\infty, \quad A_1^* < 0 \quad \textit{при} \quad Y_1^0 = 0, \\ A_2^* > 0 \quad \textit{при} \quad \Phi_2^0 = 0, \quad A_2^* < 0 \quad \textit{при} \quad \Phi_2^0 = \pm\infty, \end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\mu_1^0 \mu_2^0 A_1^* > 0 \quad \textit{и} \quad \alpha_0 \mu_2^0 A_2^* > 0. \tag{3.4}$$

Более того, каждое такое решение допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\frac{y(t)}{y'(t)} = \pi_\omega(t)[1 + o(1)], \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{|y'|^\lambda \varphi_2'(y'(t))} = -\alpha_0 J(t)[1 + o(1)], \tag{3.6}$$

причем существует однопараметрическое семейство таких решений в случае, когда среди чисел A_1^*, A_2^* одно положительное, и двупараметрическое семейство решений в случае, когда оба числа A_1^*, A_2^* являются положительными.

Доказательство. Покажем, что уравнение (1.1) сводится к системе (2.1). Для этого для быстро меняющейся функции $\varphi_2(z)$ введем функцию

$$\psi(z) = \int\limits_B^z \frac{ds}{\varphi_2(s)}, \quad \text{где} \quad B = \begin{cases} Y_2^0, & \text{если} \quad \displaystyle\int_b^{Y_2^0} \frac{ds}{\varphi_2(s)} \quad \text{сходится}, \\ b, & \text{если} \quad \displaystyle\int_b^{Y_2^0} \frac{ds}{\varphi_2(s)} \quad \text{расходится}, \end{cases} \tag{3.7}$$

и b — любое число из промежутка $\Delta(Y_2^0)$.

Поскольку $\psi'(z) > 0$ при $z \in \Delta(Y_2^0)$, то $\psi\colon \Delta(Y_2^0) \longrightarrow \Delta(\Psi^0)$ — возрастающая функция, где $\Psi^0 = \lim_{z \to Y_2^0} \psi(z)$, и, следовательно, Ψ^0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, $\Delta(\Psi^0)$ — односторонняя окрестность Ψ^0.

Отметим, что функция ψ так же, как и $\varphi_2(z)$, является быстро меняющейся функцией при $z \to Y_2^0$.

Действительно, с использованием (1.3) и правила Лопиталя имеем

$$\lim_{z \to Y_2^0} \frac{\psi(z)\psi''(z)}{[\psi'(z)]^2} = -\lim_{z \to Y_2^0} \psi(z)\varphi_2'(z) = \lim_{z \to Y_2^0} \frac{\psi'(z)}{\left(\frac{-1}{\varphi_2'(z)}\right)'} = \lim_{z \to Y_2^0} \frac{[\varphi_2'(z)]^2}{\varphi_2(z)\varphi_2''(z)} = 1. \tag{3.8}$$

Кроме того, из соотношений (3.8) следуют соотношения

$$\frac{\psi(z)}{\psi'(z)} \sim \frac{\psi'(z)}{\psi''(z)} = -\frac{\varphi_2(z)}{\varphi_2'(z)} \quad \text{при} \quad z \to Y_2^0, \tag{3.9}$$

$$\psi(z) \sim -\frac{1}{\varphi_2'(z)} \quad \text{при} \quad z \to Y_2^0. \tag{3.10}$$

С помощью (3.9) предельное соотношение (1.4) в определении $P_\omega(0)$-решения можно записать в эквивалентной форме

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\psi'(y'(t))}{\psi(y'(t))} \frac{y''(t)y(t)}{y'(t)} = 0. \tag{3.11}$$

Кроме того, из (3.10) с учетом того, что $\varphi_2(z)$ — положительная и монотонная функция в $\Delta(Y_2^0)$, следует, что $\Phi_2^0 = 0$, если $\Psi^0 = \infty$, и $\Phi_2^0 = \infty$, если $\Psi^0 = 0$, и наоборот.

Как было отмечено ранее, функция $\psi(z)$ является возрастающей и, следовательно, обратимой. Более того, в силу свойств медленно, быстро и правильно меняющихся функций $\psi^{-1}(z)\colon \Delta(\Psi^0) \to \Delta(Y_2^0)$ — медленно меняющаяся функция при $z \to \Psi^0$. Для нее имеем

$$\lim_{z\to\Phi^0} \frac{z\left(\psi^{-1}(z)\right)'}{\psi^{-1}(z)} = \lim_{z\to\Phi^0} \frac{z\varphi_2\left(\psi^{-1}(z)\right)}{\psi^{-1}(z)} = \lim_{u\to Y_2^0} \frac{\psi(u)\varphi_2(u)}{u} = -\lim_{u\to Y_2^0} \frac{\varphi_2(u)}{u\varphi'(u)} = 0. \tag{3.12}$$

Уравнение (1.1) с помощью преобразования

$$y = u_1, \quad \psi(y') = u_2 \tag{3.13}$$

сведем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} u_1' &= \mu_2^0 \left|\psi^{-1}(u_2)\right|, \\ u_2' &= \alpha_0 p(t)\varphi_1(u_1). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Поскольку функция $\varphi_1\colon \Delta(Y_1) \to]0,+\infty[$ удовлетворяет условию (1.2), а функция $\left|\psi^{-1}(z)\right|\colon \Delta(\Psi^0) \to]0,+\infty[$ — условию (3.12), получаем, что система (3.14) является системой типа (2.1).

Более того, с учетом (3.11) несложно заметить, что y будет $P_\omega(0)$-решением уравнения (1.1) тогда и только тогда, когда соответствующее ему в силу замен (3.13) решение (u_1, u_2) системы (3.14) будет $\mathcal{P}_\omega(0)$-решением системы (3.14). Кроме того, отметим, что поскольку функция $\left|\psi^{-1}(z)\right|$ удовлетворяет (3.12), то для системы (3.14) заведомо выполнено условие (2.3), а значит, для системы (3.14) справедлива лемма 2.1.

Следовательно, необходимые и достаточные условия существования $\mathcal{P}_\omega(0)$-решений для системы (3.14), сформулированные в лемме 2.1, будут необходимыми и достаточными условиями существования $P_\omega(0)$-решений уравнения (1.1).

Конкретизируем обозначения в лемме 2.1 для системы (3.14):

$$\alpha_1 = \mu_2^0, \quad p_1(t) \equiv 1, \quad \alpha_2 = \alpha_0, \quad p_2(t) = p(t), \quad \mu_1 = \mu_1^0, \quad \mu_2 = \mu_2^0,$$

$$\sigma_1 = \lambda, \quad \sigma_2 = 0, \quad I_1(t) = \pi_\omega(t), \quad \beta_1 = 1, \quad I_2(t) = J(t) \quad \beta_2 = 1.$$

Тогда, записав условия (2.5) – (2.7) для системы (3.14), получим условия (3.2) – (3.4).

Для получения асимптотических представлений (3.5), (3.6) достаточно записать асимптотические представления (2.8), (2.9) для системы (3.14), воспользоваться заменой (3.13) и соотношением (3.10).

Теорема доказана.

Следует отметить, что в соотношениях (3.5), (3.6) асимптотические представления для y, y' записаны в неявном виде. Воспользовавшись леммой 2.2, укажем условия, при которых данные асимптотические представления могут быть записаны в более простом виде.

Теорема 3.2. *Пусть функции $\theta_1(z)$, $\left|\psi^{-1}(z)\right|$ удовлетворяют условию S. Тогда каждое $P_\omega(0)$-решение (в случае их существования) дифференциального уравнения (1.1) допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления*

$$y(t) = \mu_1^0 \left|\pi_\omega(t)\psi^{-1}\left(\mu_2^0|J(t)|\right)\right| [1 + o(1)],$$

$$\frac{1}{\varphi_2'(y'(t))} = -\mu_2^0|J(t)| \left|\psi^{-1}\left(\mu_2^0|J(t)|\right)\right|^\lambda [1 + o(1)].$$

4. Приложение основных результатов. Рассмотрим класс дифференциальных уравнений вида

$$y'' = \alpha_0 p(t)|y|^\lambda |\ln|y||^\gamma e^{-\sigma|y'|^\delta}|y'|^{1-\delta}, \tag{4.1}$$

где $\alpha_0 \in \{1, -1\}$, $\delta, \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, $p\colon [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная функция.

Уравнение (4.1) является уравнением вида (1.1), в котором $\varphi_1(z) = |z|^\lambda \ln^\gamma |z|$, $\varphi_2(z) = e^{-\sigma|z|^\delta}|z|^{1-\delta}$. Функция $\varphi_1(z)$ является правильно меняющейся порядка λ при $z \to Y_2^0$, а функция $\varphi_2(z)$ в случае, когда $\delta > 0$, — быстро меняющейся при $z \to \pm\infty$ и в случае, когда $\delta < 0$, — быстро меняющейся при $z \to 0$.

Для функции $\varphi_2(z)$ функция $\psi(z)$, определенная в (3.7), имеет вид

$$\psi(z) = \frac{1}{\sigma\delta} e^{\sigma|z|^\delta} \operatorname{sign} z.$$

Более того, функция $\theta_1(z)$, определенная в (3.1), и функция $\psi^{-1}(z)$ имеют вид

$$\theta_1(z) = \ln^\gamma |z|, \quad \psi^{-1}(z) = \mu_2^0 \left|\frac{1}{\sigma} \ln |\sigma\delta z|\right|^{\frac{1}{\delta}}$$

и удовлетворяют условию S.

Для уравнения (4.1) условие (1.4) в определении $P_\omega(0)$-решения, записанное в эквивалентной форме (3.11), примет вид

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{yy''(t)}{|y'(t)|^{2-\delta}} = 0.$$

Для уравнения (4.1) из теорем 3.1 и 3.2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4.1. *Для существования $P_\omega(0)$-решения дифференциального уравнения (4.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (3.2) – (3.4). Каждое такое решение допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления*

$$y(t) = \mu_1^0 |\pi_\omega(t)| \left| \frac{1}{\sigma} \ln |\sigma\delta J(t)| \right|^{\frac{1}{\delta}} [1 + o(1)],$$

$$y'(t) = \mu_2^0 \left| \frac{1}{\sigma} \ln |\sigma\delta J(t)| + \frac{\lambda}{\sigma\delta} \ln \left| \frac{1}{\sigma} \ln |\sigma\delta J(t)| \right| + o(1) \right|^{\frac{1}{\delta}},$$

причем существует однопараметрическое семейство таких решений в случае, когда среди чисел A_1^*, A_2^* одно положительное, и двупараметрическое семейство решений в случае, когда оба числа A_1^*, A_2^* являются положительными.

Литература

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 144 с.
2. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1990. — 430 с.
3. *Костин А. В., Евтухов В. М.* Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения // Докл. АН СССР. — 1976. — **231**, № 5. — С. 1059 – 1062.
4. *Евтухов В. М.* Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка // Докл. АН СССР. — 1977. — **233**, № 4. — С. 531 – 534.
5. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Сообщ. АН ГССР. — 1982. — **106**, № 3. — С. 473 – 476.
6. *Евтухов В. М.* Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка // Math. Nachr. — 1984. — **115**. — S. 215 – 236.
7. *Евтухов В. М., Белозерова М. А.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 3. — С. 310 – 331.
8. *Белозерова М. А.* Асимптотические свойства одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Мат. студ. — 2008. — **29**, № 1. — С. 52 – 62.
9. *Білозерова М. О.* Асимптотичні зображення розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями, у деякому сенсі близькими до степеневих // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. — 2008. — Вип. 374. — С. 34 – 43.
10. *Белозерова М. А.* Асимптотические представления решений неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, близкими к степенным // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 1. — С. 3 – 15.
11. *Владова Е. С.* Асимптотика решений дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью // Нелінійні коливання. — 2015. — **18**, № 1. — С. 29 – 37.
12. *Владова Е. С.* Асимптотическое поведение решений нелинейных циклических систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Нелінійні коливання. — 2011. — **14**, № 3. — С. 299 – 317.

Получено 17.07.15