УДК 517.929

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. В. Бельский, Г. П. Пелюх

Ин-т математики НАН Украины
ул. Терещенковская, 3, Киев, 01004, Украина

We find new properties of solutions to differential-functional equations with a constant delay and a linearly transformed argument.

Встановлено нові властивості розв'язків диференціально-функціональних рівнянь зі сталим запізненням і лінійно перетвореним аргументом.

В данной работе рассматривается уравнение

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{n_0} a_k x(t - r_{0,k}) + \sum_{k=1}^{n_1} b_k x'(t - r_{1,k}) + \sum_{k=1}^{m_0} p_k x(q_{0,k} t) + \sum_{k=1}^{m_1} h_k x'(q_{1,k} t), \qquad (1)$$

где $\{p_k, h_k\} \subset R$, $r_{0,k} \geq 0$, $r_{1,k} > 0$, $0 < q_{0,k}, q_{1,k} < 1$, частные случаи которого изучались многими математиками. Так, в [1] исследованы асимптотические свойства решений уравнения $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$, в [2] установлены новые свойства решений уравнения $y'(x) = ay(\lambda x)$, в [3] получены условия существования аналитических почти периодических решений уравнения $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$, в [4] построено представление общего решения уравнения $x'(t) = ax(t) + px(qt) + hx'(qt)$ при $|h| > 1$, в [5] получен ряд новых результатов о существовании ограниченных и финитных решений уравнений с линейно преобразованным аргументом, в [6] исследовано поведение решений уравнения $x'(t) = ax(t) + px(qt) + hx'(qt)$ в окрестности точки $t = 0$, в [7] доказано существование решений уравнения $x'(t) = F(x(2t))$ с периодическим модулем, в [8] изучается асимптотическое поведение решений систем уравнений $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t-r) + p(t)x(qt)$, в [9, 10] определены мажоранты для решений уравнения $x'(t) = ax(t)+bx(t-r)+cx'(t-r)+$ $+px(qt) + hx'(qt)$, в [11, 12] установлены достаточные условия асимптотической устойчивости систем дифференциальных уравнений $x'(t) = ax(t)+bx(t-r)+px(qt)$ и разработан метод их стабилизации. Несмотря на изложенное и широкие приложения, которые находят такие уравнения в различных областях науки и техники (см. [13] и приведенную в ней библиографию), многие вопросы теории дифференциально-функциональных уравнений вида (1) изучены мало. Это прежде всего касается асимптотических свойств решений этих уравнений в окрестности особой точки $t = +\infty$. Поэтому основной целью данной работы является продолжение исследования, начатого в [11], с помощью методов этой работы, по установлению новых свойств решений уравнения (1) при достаточно общих предположениях относительно коэффициентов a_k, b_k, p_k, h_k.

Для фундаментального решения дифференциально-разностного уравнения

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{n_0} a_k x(t - r_{0,k}) + \sum_{k=1}^{n_1} b_k x'(t - r_{1,k})$$

(обозначим его символом $X(t)$) справедливы оценки [14] (главы 1, 12)

$$|X(t)| \le k_1 e^{\alpha t}, \quad \mathop{\mathrm{var}}_{[t-r_{\max},t]} X \le k_2 e^{\alpha t}, \quad t \ge 0, \tag{2}$$

где

$$\sup\left\{\operatorname{Re}\lambda \,\middle|\, \lambda\left(1-\sum_{k=1}^{n_1} b_k e^{-\lambda r_{1,k}}\right) - \sum_{k=1}^{n_0} a_k e^{-\lambda r_{0,k}} = 0\right\} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \alpha_0 < \alpha,$$

k_1, k_2 — некоторые постоянные и $r_{\max} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \max\{r_{0,k}, r_{1,k}\}$.

Теорема 1. *Пусть:*

1) $\alpha_0 < 0$ *и* $r(t_0) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \min\{t_0 - r_{0,k}, t_0 - r_{1,k}, q_{0,k}t_0, q_{1,k}t_0\} > 0$;

2) параметры $v \in R$ *и* $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ *удовлетворяют неравенствам*

$$v > \beta \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup\left\{\operatorname{Re}\mu \,\middle|\, 1 = -\frac{1}{\sum_{j=1}^{n_0} a_j} \sum_{k=1}^{m_0} p_k e^{\mu \ln q_{0,k}}\right\},$$

$$\sum_{k=1}^{m_0} |p_k| q_{0,k}^{v+j} \int_0^{+\infty} |X(s)| ds + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v+j-1} + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v+j-1} \mathop{\mathrm{var}}_{s\in[0,+\infty)} X(s) < 1.$$

Тогда для $j+1$ *раз непрерывно дифференцируемых решений* $x(t)$ *уравнения (1) имеет место оценка*

$$\left|x^{(m)}(t)\right| \le K_m(t_0, v) t^v \max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left|x^{(m)}(s)\right|, \ldots, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left|x^{(j)}(s)\right|\right\}, \quad t \ge r(t_0),$$

где $K_m(t_0, v)$ *— некоторые константы,* $m = \overline{0, j}$.

Доказательство. Из условия $\alpha_0 < 0$ следует неравенство $\sum_{k=1}^{n_0} a_k \ne 0$. Поэтому из условия $\alpha_0 < 0$ и неравенств (2) следует справедливость второго условия теоремы для некоторых v и j.

Последовательно дифференцируя левую и правую части уравнения (1) j раз, получаем $j + 1$ уравнение

$$x^{(m+1)}(t) = \sum_{k=1}^{n_0} a_k x^{(m)}(t - r_{0,k}) + \sum_{k=1}^{n_1} b_k x^{(m+1)}(t - r_{1,k}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^m x^{(m)}(q_{0,k}t) + \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^m x^{(m+1)}(q_{1,k}t), \quad m = \overline{0, j}.$$

При $m = j$ для производной $x^{(j)}(t)$ выполним замену переменных $x^{(j)}(t) = t^v y(t)$. Тогда имеем

$$y'(t) = \sum_{k=1}^{n_0} a_k y(t - r_{0,k}) + \sum_{k=1}^{n_1} b_k y'(t - r_{1,k}) + \sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^{v+j} y(q_{0,k}t) + \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^{v+j} y'(q_{1,k}t) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n_0} a_k \left[\left(1-\frac{r_{0,k}}{t}\right)^v - 1\right] y(t-r_{0,k}) + \sum_{k=1}^{n_1} b_k v \left(1-\frac{r_{1,k}}{t}\right)^{v-1} \frac{1}{t}\, y(t-r_{1,k}) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n_1} b_k \left[\left(1-\frac{r_{1,k}}{t}\right)^v - 1\right] y'(t-r_{1,k}) + \sum_{k=1}^{m_1} h_k v q_{1,k}^{v+j-1} \frac{1}{t}\, y(q_{1,k}t) - v\,\frac{1}{t}\, y(t).$$

Запишем это уравнение в интегральной форме:

$$y(t) = X(t-t_0)\left(y(t_0) - \sum_{k=1}^{n_1} b_k y\left(t_0 - r_{1,k}\right)\right) + \sum_{k=1}^{n_0} a_k \int\limits_{t_0-r_{0,k}}^{t_0} X(t-\theta-r_{0,k})y(\theta)d\theta -$$

$$-\sum_{k=1}^{n_1} b_k \int\limits_{t_0-r_{1,k}}^{t_0} y(\theta)dX(t-\theta-r_{1,k}) - X(t-t_0)\sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^{v+j-1} y(q_{1,k}t_0) -$$

$$-X(t-t_0)\sum_{k=1}^{n_1} b_k \left(\left(1-\frac{r_{1,k}}{t_0}\right)^v - 1\right) y(t_0-r_{1,k}) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^{v+j} \int\limits_{t_0}^{t} X(t-s)y(q_{0,k}s)ds + \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^{v+j-1} y(q_{1,k}t) -$$

$$-\sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^{v+j-1} \int\limits_{t_0}^{t} y(q_{1,k}s)\, dX(t-s) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n_0} a_k \int\limits_{t_0}^{t} X(t-s) \left[\left(1-\frac{r_{0,k}}{s}\right)^v - 1\right] y(s-r_{0,k})ds +$$

$$+\sum_{k=1}^{n_1} b_k v \int\limits_{t_0}^{t} X(t-s) \left(1-\frac{r_{1,k}}{s}\right)^{v-1} \frac{1}{s}\, y(s-r_{1,k})ds + \sum_{k=1}^{n_1} b_k \left(\left(1-\frac{r_{1,k}}{t}\right)^v - 1\right) y(t-r_{1,k}) -$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t} X(t-s)\left[\sum_{k=1}^{n_1} b_k v \left(1-\frac{r_{1,k}}{s}\right)^{v-1} \frac{r_{1,k}}{s^2} y(s-r_{1,k})\right] ds -$$

$$-\sum_{k=1}^{n_1} b_k \int\limits_{t_0}^{t} \left(\left(1-\frac{r_{1,k}}{s}\right)^v - 1\right) y(s-r_{1,k})dX(t-s) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m_1} h_k v q_{1,k}^{v+j-1} \int\limits_{t_0}^{t} X(t-s)\,\frac{1}{s}\, y(q_{1,k}s)ds - v\int\limits_{t_0}^{t} X(t-s)\,\frac{1}{s}\, y(s)ds, \quad t \ge t_0.$$

Учитывая (2), получаем

$$\Bigg|X(t-t_0)\left(y(t_0)-\sum_{k=1}^{n_1}b_k y\left(t_0-r_{1,k}\right)\right)+\sum_{k=1}^{n_0}a_k\int\limits_{t_0-r_{0,k}}^{t_0}X(t-\theta-r_{0,k})y(\theta)d\theta-$$

$$-\sum_{k=1}^{n_1}b_k\int\limits_{t_0-r_{1,k}}^{t_0}y(\theta)dX(t-\theta-r_{1,k})-\sum_{k=1}^{m_1}h_k q_{1,k}^{v+j-1}X(t-t_0)y(q_{1,k}t_0)-$$

$$-X(t-t_0)\sum_{k=1}^{n_1}b_k\left(\left(1-\frac{r_{1,k}}{t_0}\right)^v-1\right)y(t_0-r_{1,k})\Bigg|\le$$

$$\le\left(|X(t-t_0)|\left(1+\sum_{k=1}^{n_1}|b_k|\right)+\sum_{k=1}^{n_0}|a_k|\int\limits_{t_0-r_{0,k}}^{t_0}|X(t-\theta-r_{0,k})|\,d\theta+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{n_1}|b_k|\underset{s\in[t-t_0-r_{1,k},t-t_0]}{\operatorname{var}}X(s)+\sum_{k=1}^{m_1}|h_k|q_{1,k}^{v+j-1}|X(t-t_0)|+$$

$$\left.+|X(t-t_0)|\sum_{k=1}^{n_1}|b_k|\left|\left(1-\frac{r_{1,k}}{t_0}\right)^v-1\right|\right)\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}|y(s)|\le M(T)\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}|y(s)|,$$

где $t_0\ge T$, $M(T)$ — некоторые константы,

$$\Bigg|\sum_{k=1}^{m_0}p_k q_{0,k}^{v+j}\int\limits_{t_0}^{t}X(t-s)y(q_{0,k}s)ds+\sum_{k=1}^{m_1}h_k q_{1,k}^{v+j-1}y(q_{1,k}t)-$$

$$-\sum_{k=1}^{m_1}h_k q_{1,k}^{v+j-1}\int\limits_{t_0}^{t}y(q_{1,k}s)dX(t-s)\Bigg|\le\left(\sum_{k=1}^{m_0}|p_k|q_{0,k}^{v+j}\int\limits_{0}^{+\infty}|X(s)|ds+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{m_1}|h_k|q_{1,k}^{v+j-1}+\sum_{k=1}^{m_1}|h_k|q_{1,k}^{v+j-1}\underset{s\in[0,+\infty)}{\operatorname{var}}X(s)\right)\sup_{s\in[r(t_0),t]}|y(s)|,$$

$$\Bigg|\sum_{k=1}^{n_0}a_k\int\limits_{t_0}^{t}X(t-s)\left[\left(1-\frac{r_{0,k}}{s}\right)^v-1\right]y(s-r_{0,k})ds+$$

$$+\sum_{k=1}^{n_1}b_k v\int\limits_{t_0}^{t}X(t-s)\left(1-\frac{r_{1,k}}{s}\right)^{v-1}\frac{1}{s}\,y(s-r_{1,k})ds+$$

$$
+\sum_{k=1}^{n_1} b_k \left(\left(1-\frac{r_{1,k}}{t}\right)^v - 1\right) y(t-r_{1,k}) -
$$

$$
-\int_{t_0}^{t} X(t-s)\left[\sum_{k=1}^{n_1} b_k v \left(1-\frac{r_{1,k}}{s}\right)^{v-1} \frac{r_{1,k}}{s^2}\, y(s-r_{1,k})\right] ds -
$$

$$
-\sum_{k=1}^{n_1} b_k \int_{t_0}^{t} \left(\left(1-\frac{r_{1,k}}{s}\right)^v - 1\right) y(s-r_{1,k})\, dX(t-s) +
$$

$$
+\sum_{k=1}^{m_1} h_k v q_{1,k}^{v+j-1} \int_{t_0}^{t} X(t-s)\frac{1}{s}\, y(q_{1,k}s) ds - v\int_{t_0}^{t} X(t-s)\,\frac{1}{s}\, y(s) ds\Bigg| \le
$$

$$
\le \left(\sum_{k=1}^{n_0} |a_k| \int_{t_0}^{t} \left| X(t-s)\left[\left(1-\frac{r_{0,k}}{s}\right)^v - 1\right]\right| ds + \right.
$$

$$
+\sum_{k=1}^{n_1} |b_k v| \int_{t_0}^{t} \left| X(t-s)\left(1-\frac{r_{1,k}}{s}\right)^{v-1} \frac{1}{s}\right| ds + \sum_{k=1}^{n_1} |b_k| \left|\left(1-\frac{r_{1,k}}{t}\right)^v - 1\right| +
$$

$$
+\int_{t_0}^{t} |X(t-s)| \sum_{k=1}^{n_1} \left| b_k v \left(1-\frac{r_{1,k}}{s}\right)^{v-1} \frac{r_{1,k}}{s^2}\right| ds +
$$

$$
+\sum_{k=1}^{n_1} |b_k| \sup_{s\ge t_0} \left|\left(1-\frac{r_{1,k}}{s}\right)^v - 1\right| \operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} X(s) + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k v| q_{1,k}^{v+j-1} \int_{t_0}^{t} \left| X(t-s)\frac{1}{s}\right| ds +
$$

$$
\left. +|v| \int_{t_0}^{t} \left| X(t-s)\frac{1}{s}\right| ds \right) \sup_{s\in[r(t_0),t]} |y(s)| \stackrel{\text{df}}{=} l(T,t) \sup_{s\in[r(t_0),t]} |y(s)|.
$$

Здесь $t_0 \ge T$, $\sup_{t\ge T} l(T,t) \to 0$, $T \to +\infty$. Следовательно, имеем соотношение

$$
|y(t)| \le M(T) \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} |y(s)| + \left(\sum_{k=1}^{m_0} |p_k| q_{0,k}^{v+j} \int_{0}^{+\infty} |X(s)| ds + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v+j-1} + \right.
$$

$$
\left. + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v+j-1} \operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} X(s) + \sup_{t\ge T} l(T,t)\right) \sup_{s\in[r(t_0),t]} |y(s)|.
$$

Поскольку $M(T) \geq 1$ и функция в правой части является неубывающей, получаем

$$\sup_{s\in[r(t_0),t]}|y(s)| \leq M(T)\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}|y(s)| + \left(\sum_{k=1}^{m_0}|p_k|q_{0,k}^{v+j}\int\limits_0^{+\infty}|X(s)|ds + \sum_{k=1}^{m_1}|h_k|q_{1,k}^{v+j-1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m_1}|h_k|q_{1,k}^{v+j-1}\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)}X(s) + \sup_{t\geq T}l(T,t)\right)\sup_{s\in[r(t_0),t]}|y(s)|.$$

Отсюда (в силу второго условия теоремы) при достаточно большом T находим

$$\sup_{s\in[r(t_0),t]}|y(s)| \leq \left(1 - \sum_{k=1}^{m_0}|p_k|q_{0,k}^{v+j}\int\limits_0^{+\infty}|X(s)|ds - \sum_{k=1}^{m_1}|h_k|q_{1,k}^{v+j-1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m_1}|h_k|q_{1,k}^{v+j-1}\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)}X(s) - \sup_{t\geq T}l(T,t)\right)^{-1} M(T)\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}|y(s)|,$$

и, следовательно, $\sup_{s\in[r(t_0),t]}|y(s)| \leq K_j(T)\dfrac{1}{t_0^v}\sup\limits_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j)}(s)\right|$, где $K_j(T)$ — некоторая константа. Отсюда и из соотношения (замены переменных) $x^{(j)}(t) = t^v y(t)$ получаем $\left|x^{(j)}(t)\right| \leq K_j(T)\left(\dfrac{t}{t_0}\right)^v \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j)}(s)\right|$, $t \geq r(t_0)$.

Для $0 \leq m \leq j-1$ предположим, что

$$\left|x^{(m+1)}(t)\right| \leq K_{m+1}(T)\left(\frac{t}{t_0}\right)^v \max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(m+1)}(s)\right|, \ldots\right.$$

$$\left. \ldots, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j)}(s)\right|\right\}, \quad t \geq r(t_0), \quad t_0 \geq T,$$

где $K_{m+1}(T)$ — некоторая константа. Запишем дифференциальное уравнение для $x^{(m)}(t)$ в другой форме:

$$x^{(m)}(t) = -\frac{1}{\sum_{k=1}^{n_0}a_k}\sum_{k=1}^{m_0}p_k q_{0,k}^m x^{(m)}(q_{0,k}t) + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n_0}a_k}\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{n_0}a_k\left(x^{(m)}(t) - x^{(m)}(t-r_{0,k})\right) + x^{(m+1)}(t) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n_1}b_k x^{(m+1)}(t-r_{1,k}) - \sum_{k=1}^{m_1}h_k q_{1,k}^m x^{(m+1)}(q_{1,k}t)\right).$$

С помощью теоремы Лагранжа запишем разности

$$x^{(m)}(t) - x^{(m)}(t-r_{0,k}) = x^{(m+1)}\left(t - \theta_{0,k}^m(t)\right)r_{0,k}, \quad 0 < \theta_{0,k}^m(t) < r_{0,k}.$$

Тогда

$$x^{(m)}(t) = -\frac{1}{\sum_{k=1}^{n_0} a_k} \sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^m x^{(m)}(q_{0,k}t) + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n_0} a_k} \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k x^{(m+1)} \left(t - \theta_{0,k}^m(t)\right) r_{0,k} + \right.$$

$$\left. + x^{(m+1)}(t) - \sum_{k=1}^{n_1} b_k x^{(m+1)}(t - r_{1,k}) - \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^m x^{(m+1)} t(q_{1,k}t) \right).$$

Выполнив замену переменных $x^{(m)}(t) = t^v y(t)$, получим

$$y(t) = -\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n_0} a_k} \sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^{m+v} y(q_{0,k}t) + \frac{t^{-v}}{\sum_{k=1}^{n_0} a_k} \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k x^{(m+1)} \left(t - \theta_{0,k}^m(t)\right) r_{0,k} + \right.$$

$$\left. + x^{(m+1)}(t) - \sum_{k=1}^{n_1} b_k x^{(m+1)}(t - r_{1,k}) - \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^m x^{(m+1)}(q_{1,k}t) \right).$$

На основании сделанного предположения об асимптотическом поведении производной $x^{(m+1)}(t)$ оценим неоднородность в уравнении для функции $y(t)$, обозначив ее символом

$$f(t) \overset{\text{df}}{=} \frac{t^{-v}}{\sum_{k=1}^{n_0} a_k} \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k x^{(m+1)} \left(t - \theta_{0,k}^m(t)\right) r_{0,k} + x^{(m+1)}(t) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n_1} b_k x^{(m+1)}(t - r_{1,k}) - \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^m x^{(m+1)}(q_{1,k}t) \right), \tag{3}$$

$$|f(t)| \le L_m(T) \frac{1}{t_0^v} \max\left\{ \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left| x^{(m+1)}(s) \right|, \ldots, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left| x^{(j)}(s) \right| \right\}, \quad t \ge t_0 \ge T,$$

где $L_m(T)$ — некоторая константа.

Запишем уравнение для $y(t)$ в новых обозначениях

$$y(t) = -\frac{1}{\sum_{k=1}^{n_0} a_k} \sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^{m+v} y(q_{0,k}t) + f(t), \quad t \ge t_0.$$

Выполняя в нем замену переменных $y\left(e^\tau\right) = z(\tau)$, получаем

$$z(\tau) = -\frac{1}{\sum_{j=1}^{n_0} a_j} \sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^{v+m} z(\tau + \ln q_{0,k}) + f\left(e^\tau\right), \quad \tau = \ln t \ge \tau_0 = \ln t_0. \tag{4}$$

Характеристическое уравнение для однородного разностного уравнения

$$w(\tau) = -\frac{1}{\sum_{j=1}^{n_0} a_j} \sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^{v+m} w\left(\tau + \ln q_{0,k}\right)$$

имеет вид

$$D(\lambda) \overset{\mathrm{df}}{=} 1 + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n_0} a_j} \sum_{k=1}^{m_0} p_k e^{(\lambda+v+m)\ln q_{0,k}} = 0.$$

В силу второго условия теоремы имеем $\sup\{\operatorname{Re}\lambda \mid D(\lambda)=0\} = \beta - v - m < 0$. Следовательно, разностное уравнение для функции $w(\tau)$ асимптотически устойчиво. Обозначим его фундаментальное решение символом $Z_{v+m}(\tau)$ и запишем уравнение (4) в интегральной форме:

$$z(\tau) = \frac{p_1 q_{0,1}^{v+m}}{\sum_{j=1}^{n_0} a_j} \int\limits_{\tau_0+\ln q_{0,1}}^{\tau_0} \left[d_\theta Z_{v+m}\left(\tau-\theta+\ln q_{0,1}\right)\right] z(\theta) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{p_{m_0} q_{0,m_0}^{v+m}}{\sum_{j=1}^{n_0} a_j} \int\limits_{\tau_0+\ln q_{0,m_0}}^{\tau_0} \left[d_\theta Z_{v+m} - \left(\tau-\theta+\ln q_{0,m_0}\right)\right] z(\theta) -$$

$$-\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \left[d_s Z_{v+m}(\tau-s)\right] f\left(e^s\right) + f\left(e^\tau\right), \quad \tau \geq \tau_0.$$

Учитывая (3), оцениваем модуль решения

$$|z(\tau)| \leq \Lambda_m(T)\,\frac{1}{t_0^v}\,\max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(m)}(s)\right|, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(m+1)}(s)\right|, \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j)}(s)\right|\right\}, \quad \tau \geq \tau_0,$$

для некоторой константы $\Lambda_m(T)$. Отсюда получаем

$$|y(t)| \leq \Lambda_m(T)\frac{1}{t_0^v}\,\max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(m)}(s)\right|, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(m+1)}(s)\right|, \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j)}(s)\right|\right\}, \quad t \geq t_0.$$

Следовательно,

$$\left|x^{(m)}(t)\right| \leq K_m(T)\left(\frac{t}{t_0}\right)^v \max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(m)}(s)\right|, \ldots, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j)}(s)\right|\right\}, \quad t \geq r(t_0),$$

для некоторой константы $K_m(T)$. Тем самым мы доказали (методом математической индукции) последнее неравенство для всех $m = \overline{0,j}$. Отметим, что величина T в наших рассуждениях удовлетворяла условию малости коэффициента $\sup_{t\geq T} l(T,t)$, которое может быть вынесено в начало доказательства. Верхние границы для коэффициентов $K_m(T)$, $m=\overline{0,j}$, не зависят от T. Поскольку в наших рассуждениях $t_0 \geq T$ является переменной величиной, а по условию теоремы эта величина должна быть фиксирована, из равенств

$$x^{(m)}(t) = X(t-t_1)\left(x^{(m)}(t_1) - \sum_{k=1}^{n_1} b_k x^{(m)}(t_1 - r_{1,k})\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n_0} a_k \int\limits_{t_1-r_{0,k}}^{t_1} X(t-\theta-r_{0,k})x^{(m)}(\theta)\,d\theta -$$

$$-\sum_{k=1}^{n_1} b_k \int\limits_{t_1-r_{1,k}}^{t_1} x^{(m)}(\theta)\,dX(t-\theta-r_{1,k}) - \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^{m-1} X(t-t_1)x^{(m)}(q_{1,k}t_1) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^{m} \int\limits_{t_1}^{t} X(t-s)x^{(m)}(q_{0,k}s)ds +$$

$$+\sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^{m-1} x^{(m)}(q_{1,k}t) - \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^{m-1} \int\limits_{t_1}^{t} x^{(m)}(q_{1,k}s)dX(t-s), \quad t \geq t_1,$$

можно получить оценки

$$\sup_{s\in[r(t_1),t]} \left|x^{(m)}(s)\right| \leq \sigma_m \sup_{s\in[r(t_1),t_1]} \left|x^{(m)}(s)\right| + \eta_m \sup_{s\in[r(t_1),q_{\max}t]} \left|x^{(m)}(s)\right|, \quad t \geq t_1,$$

где $\sigma_m \geq 1$, η_m — некоторые константы, а $q_{\max} \overset{\mathrm{df}}{=} \max\{q_{0,k}, q_{1,k}\}$.

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим теперь частный случай уравнения (1)

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{n_0} a_k x\,(t-r_{0,k}) + \sum_{k=1}^{n_1} b_k x'(t-r_{1,k}) + px(qt) + \sum_{k=1}^{m_1} h_k x'(q_{1,k}t) \tag{5}$$

и докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть:*

1) $\alpha_0 < 0$, $r(t_0) > 0$, $p \neq 0$ *и* $v_* \overset{\mathrm{df}}{=} \dfrac{1}{\ln q^{-1}} \ln\left|p\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right)^{-1}\right|$;

2) параметр $j \in N \bigcup \{0\}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{k=1}^{m_0} |p| q^{v_*+j+1} \int\limits_{0}^{+\infty} |X(s)|ds + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v_*+j} + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v_*+j} \operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} X(s) < 1.$$

Тогда для $j+2$ раза непрерывно дифференцируемых решений $x(t)$ уравнения (5) имеет место оценка

$$|x(t)| \le K(t_0) t^{\frac{1}{\ln q^{-1}} \ln\left|p\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right)^{-1}\right|} \max\left\{ \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} |x(s)|, \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left|x^{(j+1)}(s)\right| \right\}, \quad t \ge r(t_0),$$

где $K(t_0)$ — некоторая константа.

Доказательство. Запишем уравнение (5) в виде

$$x(t) = -\frac{p}{\sum_{k=1}^{n_0} a_k} x(qt) + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n_0} a_k} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k (x(t) - x(t - r_{0,k})) - \sum_{k=1}^{n_1} b_k x'(t - r_{1,k}) - \sum_{k=1}^{m_1} h_k x'(q_{1,k} t) + x'(t) \right).$$

Поскольку в силу теоремы Лагранжа имеем $x(t) - x(t - r_{0,k}) = x'(t - \theta_{0,k}(t)) r_{0,k}$, $0 < \theta_{0,k}(t) < r_{0,k}$, $k = \overline{1, n_0}$, уравнение (5) принимает вид

$$x(t) = -\frac{p}{\sum_{k=1}^{n_0} a_k} x(qt) + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n_0} a_k} \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k x'(t - \theta_{0,k}(t)) r_{0,k} - \sum_{k=1}^{n_1} b_k x'(t - r_{1,k}) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m_1} h_k x'(q_{1,k} t) + x'(t) \right) \stackrel{\mathrm{df}}{=} -\frac{p}{\sum_{k=1}^{n_0} a_k} x(qt) + f(t).$$

Выполняя в последнем уравнении замену переменных $x(t) = t^v y(t)$, $t \ge r(t_0)$, получаем уравнение

$$y(t) = -\frac{p q^v}{\sum_{k=1}^{n_0} a_k} y(qt) + t^{-v} f(t). \tag{6}$$

В силу теоремы 1 для

$$\frac{1}{\ln q^{-1}} \ln\left|p\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right)^{-1}\right| - 1 < v < \frac{1}{\ln q^{-1}} \ln\left|p\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right)^{-1}\right| \tag{7}$$

при достаточной гладкости решения функция $t^{-v} x'(t)$ ограничена в окрестности точки $t = +\infty$. Последнее станет очевидным, если применить теорему 1 к уравнению

$$x''(t) = \sum_{k=1}^{n_0} a_k x'(t - r_{0,k}) + \sum_{k=1}^{n_1} b_k x''(t - r_{1,k}) + p q x'(qt) + \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k} x''(q_{1,k} t).$$

Более того, рассуждения, использованные в доказательстве теоремы 1, позволяют сделать более точный вывод: для параметра $v \in R$, удовлетворяющего неравенствам (7) и

$$\sum_{k=1}^{m_0}|pq|q^{v+j}\int\limits_0^{+\infty}|X(s)|ds+\sum_{k=1}^{m_1}\left|h_kq_{1,k}\right|q_{1,k}^{v+j-1}+\sum_{k=1}^{m_1}\left|h_kq_{1,k}\right|q_{1,k}^{v+j-1}\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)}X(s)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m_0}|p|q^{v+j+1}\int\limits_0^{+\infty}|X(s)|ds+\sum_{k=1}^{m_1}|h_k|q_{1,k}^{v+j}+\sum_{k=1}^{m_1}|h_k|q_{1,k}^{v+j}\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)}X(s)<1,$$

$j+2$ раза непрерывно дифференцируемые решения $x(t)$ уравнения (5) удовлетворяют оценке

$$\left|x'(t)\right|\le K(T)\left(\frac{t}{t_0}\right)^v\max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x'(s)\right|,\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x''(s)\right|,\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j+1)}(s)\right|\right\},\quad t\ge r(t_0),\quad t_0\ge T,$$

где $K(T)$ — некоторая константа. Отсюда следует неравенство

$$\left|t^{-v}f(t)\right|\le L(T)\frac{1}{t_0^v}\max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x'(s)\right|,\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x''(s)\right|,\ldots,\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j+1)}(s)\right|\right\}\overset{\mathrm{df}}{=}M_1$$

при $t\ge t_0\ge T\ge 1$, где $L(T)\ge 1$ — некоторая константа. Тогда при $q^nt\in[qt_0,t_0]$ из уравнения (6) получаем следующую оценку для $y(t)$:

$$|y(t)|\le\left|pq^v\left(\sum_{j=1}^{n_0}a_j\right)^{-1}\right||y(qt)|+M_1\overset{\mathrm{df}}{=}d|y(qt)|+M_1\le$$

$$\le d^2\left|y(q^2t)\right|+dM_1+M_1\le\ldots\le d^n\left|y(q^nt)\right|+d^{n-1}M_1+\ldots+dM_1+M_1\le$$

$$\le d^n\sup_{s\in[qt_0,t_0]}|y(s)|+\frac{d^n-1}{d-1}M_1\le\frac{d^{n+1}-1}{d-1}\left(\max\left\{q^{-v},1\right\}+L(T)\right)\frac{1}{t_0^v}\times$$

$$\times\max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}|x(s)|,\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x'(s)\right|,\ldots,\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j+1)}(s)\right|\right\}\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{d^{n+1}-1}{d-1}M_2,$$

$$qt_0\le q^nt\Rightarrow q^{-n}\le\frac{t}{qt_0}\Rightarrow n\le\frac{1}{\ln q^{-1}}\ln\left(\frac{t}{qt_0}\right).$$

Заметим, что согласно выбору v имеем $d=\left|pq^v\left(\sum_{j=1}^{n_0}a_j\right)^{-1}\right|>1$, и оценку $y(t)$ можно уточнить

$$|y(t)|\le d^{\frac{1}{\ln q^{-1}}\ln\left(\frac{t}{qt_0}\right)}\frac{d}{d-1}M_2\overset{\mathrm{df}}{=}e^{\ln d\frac{1}{\ln q^{-1}}\ln\left(\frac{t}{qt_0}\right)}M_3=\frac{t^{\frac{1}{\ln q^{-1}}\ln\left|p\left(\sum_{j=1}^{n_0}a_j\right)^{-1}\right|-v}}{(qt_0)^{\frac{1}{\ln q^{-1}}\ln\left|p\left(\sum_{j=1}^{n_0}a_j\right)^{-1}\right|-v}}M_3.$$

Отсюда находим

$$|x(t)| = |t^v y(t)| \leq \frac{t^{\frac{1}{\ln q^{-1}}\ \ln\left|p\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right)^{-1}\right|}}{(qt_0)^{\frac{1}{\ln q^{-1}}\ \ln\left|p\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right)^{-1}\right|-v}} M_3 = \frac{t^{\frac{1}{\ln q^{-1}}\ \ln\left|p\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right)^{-1}\right|}}{(qt_0)^{\frac{1}{\ln q^{-1}}\ \ln\left|p\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right)^{-1}\right|-v}} L_1(T)\frac{1}{t_0^v}\times$$

$$\times \max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}|x(s)|, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x'(s)\right|, \ldots, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j+1)}(s)\right|\right\} =$$

$$= L_2(T)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{\ln q^{-1}}\ \ln\left|p\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right)^{-1}\right|}\times$$

$$\times \max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}|x(s)|, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x'(s)\right|, \ldots, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j+1)}(s)\right|\right\}, \quad t \geq t_0 \geq T.$$

Увеличив константу $L_2(T)$, последнее неравенство можно считать выполненным на полуоси $t \geq r(t_0)$. Отметим, что T не является произвольной величиной. Поэтому для завершения доказательства необходимо повторить замечание относительно t_0, приведенное в конце доказательства теоремы 1.

Теорема 2 доказана.

Для частного случая уравнения (5) запишем частное решение, условие существования которого частично совпадает с достаточным условием асимптотической устойчивости, вытекающим из теоремы 2.

Пример 1. Для уравнения $x'(t) = \sum_{k=1}^{n_0} a_k x(t-r_{0,k}) + \sum_{k=1}^{n_1} b_k x'(t-r_{1,k}) + px(qt) + hx'(qt)$ существует решение в виде ряда $x(t) = x_0 e^{\lambda t} + x_1 e^{\lambda q t} + x_2 e^{\lambda q^2 t} + \ldots + x_n e^{\lambda q^n t} + \ldots$, где λ — корень характеристического уравнения $H(\lambda) \overset{\text{df}}{=} \lambda\left(1 - \sum_{k=1}^{n_1} b_k e^{-\lambda r_{1,k}}\right) - \sum_{k=1}^{n_0} a_k e^{-\lambda r_{0,k}} = 0$, $x_n = \dfrac{p + h\lambda q^{n-1}}{H(\lambda q^n)} x_{n-1}$, $n \geq 1$, x_0 — произвольное число. Условием сходимости ряда является неравенство $\left|p\left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k\right)^{-1}\right| < 1$. Отметим, что $\operatorname{Re}\lambda$ не обязательно меньше нуля.

С помощью идей де Брейна [15] докажем точность степени v_* и уточним асимптотическое поведение решений уравнения (5) в условиях предыдущей теоремы.

Теорема 3. *Пусть:*

1) $\alpha_0 < 0$, $r(t_0) > 0$, $p \neq 0$ *и* $v \overset{\text{df}}{=} \dfrac{1}{\ln q^{-1}} \ln\left|p\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right)^{-1}\right|$;

2) параметр $j \in N \bigcup \{0\}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{k=1}^{m_0} |p| q^{v+j+1} \int\limits_0^{+\infty} |X(s)| ds + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v+j} + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v+j} \operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} X(s) < 1.$$

Тогда для $j+3$ *раза непрерывно дифференцируемого решения* $x(t)$ *уравнения (5) в случае* $p\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right)^{-1} < 0$ *существует предельная непрерывная периодическая функция* $\varphi(u)$ *с периодом 1, а в случае* $p\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right)^{-1} > 0$ — *предельная непрерывная периодиче-*

ская функция $\varphi(u) \equiv -\varphi(u-1)$ с периодом 2 такая, что

$$\left| t^{-v}x(t) - \varphi\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right| \le K(t_0)\frac{1}{t}\max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}|x(s)|,\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j+2)}(s)\right|\right\}, \quad t \ge r(t_0),$$

где $K(t_0)$ — некоторая константа. При этом в случае $p\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right)^{-1} < 0$ для любой непрерывной периодической функции $\psi(u)$ с периодом 1, а в случае $p\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right)^{-1} > 0$ для любой непрерывной периодической функции $\psi(u) \equiv -\psi(u-1)$ с периодом 2 и сколь угодно малой окрестности этой функции существует $j+3$ раза непрерывно дифференцируемое решение уравнения (5), которое начинается на некотором начальном отрезке $[r(t_1), t_1]$ и имеет предельную периодическую функцию в данной окрестности функции $\psi(u)$.

Доказательство. Предположим, что $p\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right)^{-1} < 0$, тогда после замены переменных $x(t) = t^v y(t)$ при $t \ge r(t_0)$ в уравнении (5) уравнение (6) примет вид $y(t) = y(qt) + t^{-v}f(t)$. Обозначая $t^{-v}f(t) \overset{\mathrm{df}}{=} g(t)$, получаем

$$y(t) = y(qt) + g(t). \tag{8}$$

Если к производной $x'(t)$ и дифференциальному уравнению

$$x''(t) = \sum_{k=1}^{n_0} a_k x'(t - r_{0,k}) + \sum_{k=1}^{n_1} b_k x''(t - r_{1,k}) + pqx'(qt) + \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k} x''(q_{1,k})$$

применить рассуждения из доказательства теоремы 2, то получим следующий результат: для параметра j из второго условия теоремы $j+3$ раза непрерывно дифференцируемые решения $x(t)$ уравнения (5) удовлетворяют оценке

$$\left|x'(t)\right| \le K(T)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{v-1}\max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x'(s)\right|, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x''(s)\right|,\ldots,\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j+2)}(s)\right|\right\}$$

при $t \ge r(t_0)$, $t_0 \ge T$, где $K(T)$ — некоторая константа. Отсюда следует неравенство

$$|g(t)| = \left|t^{-v}f(t)\right| \le L(T)\frac{1}{t}\,\frac{1}{t_0^{v-1}}\max\left\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x'(s)\right|, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x''(s)\right|,\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\sup_{s\in[r(t_0),t_0]}\left|x^{(j+2)}(s)\right|\right\}$$

при $t \geq t_0 \geq T \geq 1$, где $L(T) \geq 1$ — некоторая константа. Выполняя еще одну замену переменных $y(t) = z\left(\dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)$ в функциональном уравнении (8), получаем

$$y(t) = z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) = y(qt) + g(t) = z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - 1\right) + g\left(e^{\ln q^{-1}\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}}\right)$$

или $z(u) = z(u-1) + g\left(e^{u\ln q^{-1}}\right)$, где $u = \dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}}$. Поскольку

$$x'(t) = vt^{v-1}y(t) + t^v y'(t) = t^{v-1}\left(vz\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + z'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\frac{1}{\ln q^{-1}}\right),$$

имеем оценку

$$|g(t)| \leq \frac{1}{t} D(T) \max\left\{\sup_{s\in\left[\frac{\ln r(t_0)}{\ln q^{-1}}, \frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}\right]} |z(s)|, \ldots, \sup_{s\in\left[\frac{\ln r(t_0)}{\ln q^{-1}}, \frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}\right]} \left|z^{(j+2)}(s)\right|\right\} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{t} W(T, z_0).$$

Используя равенство $z(u) - z(u-1) = g\left(e^{u\ln q^{-1}}\right)$ и мажоранту для $|g(t)|$, оцениваем разность

$$\begin{aligned}|z(u+m) - z(u+n)| &\leq |z(u+m) - z(u+m-1)| + \ldots + |z(u+n+1) - z(u+n)| = \\ &= \left|g\left(e^{(u+m)\ln q^{-1}}\right)\right| + \ldots + \left|g\left(e^{(u+n+1)\ln q^{-1}}\right)\right| \leq \\ &\leq e^{-(u+m)\ln q^{-1}} W(T, z_0) + \ldots + e^{-(u+n+1)\ln q^{-1}} W(T, z_0) \leq \\ &\leq q^{u+n+1} W(T, z_0)\,\frac{1}{1-q}.\end{aligned}$$

Отсюда следует фундаментальность последовательности $z(u+n)$, существование предела $\lim_{n\to+\infty} z(u+n) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \varphi(u)$ и неравенство $|z(u)-\varphi(u)| \leq q^{u+1} W(T, z_0)\,\dfrac{1}{1-q}$, $u \geq \dfrac{\ln t_0}{\ln q^{-1}} - 1$. Очевидно, что $\varphi(u)$ — периодическая функция с периодом 1, ее непрерывность следует из ограниченности $z'(u)$. Запишем последнее неравенство в развернутом виде

$$\begin{aligned}|z(u) - \varphi(u)| \leq q^u D_1(T) \max\Bigg\{&\sup_{s\in\left[\frac{\ln r(t_0)}{\ln q^{-1}}, \frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}\right]} |z(s)|, \ldots \\ &\ldots, \sup_{s\in\left[\frac{\ln r(t_0)}{\ln q^{-1}}, \frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}\right]} \left|z^{(j+2)}(s)\right|\Bigg\}, \quad u \geq \frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}} - 1,\end{aligned}$$

где $D_1(T) \overset{\mathrm{df}}{=} D(T)\dfrac{q}{1-q}$, т. е. уже на отрезке $\left[\dfrac{\ln t_0}{\ln q^{-1}} - 1, \dfrac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}\right]$ можно оценить разность между решением $z(u)$ и его предельной периодической функцией $\varphi(u)$ через начальные значения решения и его производных.

Таким образом, в случае $p\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right)^{-1} < 0$ доказано существование предельной периодической функции и получена оценка скорости сходимости.

Обратно, предположим, что $q \neq q_{1,k}$, $k = \overline{1, m_1}$, и задана непрерывная периодическая функция $\varphi(u)$. Ее можно приблизить с помощью тригонометрического полинома $\psi(u)$, который в свою очередь приближается полиномом Эрмита $H(u)$ равномерно на отрезке $\left[-\dfrac{\ln q_c^{-1}}{\ln q^{-1}}, 0\right]$, где $q_c \overset{\mathrm{df}}{=} \min\{q, q_{1,1}, \ldots, q_{1,m_1}\}$, вместе с конечным числом производных, полином $H(u)$ также приближается некоторым полиномом $G(u)$, который при замене аргумента $G(u - u_0)$, $u_0 = \dfrac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}$, удовлетворяет $j+3$ условиям склейки (гладкости) дифференциального уравнения и, таким образом, задает $j+3$ раза непрерывно дифференцируемое решение $z_G(u)$, начальные значения которого, $G(u-u_0)$, близки к фиксированному тригонометрическому полиному $\psi(u-u_0)$, а следовательно, ограничены. Последнее позволяет при достаточно большом t_0 утверждать близость предельной периодической функции решения $\varphi_{z_G}(u)$ к решению $z_G(u)$ на начальном отрезке, т. е. к $G(u-u_0)$, а значит, и к функции $\varphi(u-u_0)$; если u_0 — целое число, то и к данной периодической функции $\varphi(u)$. В этой цепочке рассуждений необходимо показать только построение полинома $G(u)$.

Сформулируем $j+3$ условия склейки в терминах функции $z\left(\dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)$ и ее производных. Для этого запишем в явном виде уравнение этой функции. Выполнив замену переменных $x(t) = t^v y(t)$ в уравнении (5) при $t \geq r(t_0)$, получим

$$y'(t) = \sum_{k=1}^{n_0} a_k y(t - r_{0,k}) + \sum_{k=1}^{n_1} b_k y'(t - r_{1,k}) + pq^v y(qt) + g(t),$$

где

$$g(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^v y'(q_{1,k}t) + \sum_{k=1}^{n_0} a_k \left[\left(1 - \frac{r_{0,k}}{t}\right)^v - 1\right] y(t - r_{0,k}) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n_1} b_k v \left(1 - \frac{r_{1,k}}{t}\right)^{v-1} \frac{1}{t}\, y(t - r_{1,k}) + \sum_{k=1}^{n_1} b_k \left[\left(1 - \frac{r_{1,k}}{t}\right)^v - 1\right] y'(t - r_{1,k}) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m_1} h_k v q_{1,k}^{v-1} \frac{1}{t}\, y(q_{1,k}t) - v\,\frac{1}{t}\, y(t).$$

С помощью теоремы Лагранжа запишем равенство

$$\sum_{k=1}^{n_0} a_k y(t) - \sum_{k=1}^{n_0} a_k y(t - r_{0,k}) = \sum_{k=1}^{n_0} a_k r_{0,k} y'(t - \theta_1(t, r_{0,k})), \quad 0 < \theta_1(t, r_{0,k}) < r_{0,k}.$$

После этого дифференциальное уравнение для $y(t)$ запишем как функциональное

$$y(t) = -\frac{pq^v}{\sum_{k=1}^{n_0} a_k}\, y(qt) + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n_0} a_k}\left(y'(t) + \sum_{k=1}^{n_0} a_k r_{0,k} y'(t-\theta_1(t,r_{0,k})) - \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n_1} b_k y'(t-r_{1,k}) - g(t)\right)$$

или

$$y(t) = y(qt) + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n_0} a_k}\left(y'(t) + \sum_{k=1}^{n_0} a_k r_{0,k} y'(t-\theta_1(t,r_{0,k})) - \sum_{k=1}^{n_1} b_k y'(t-r_{1,k}) - g(t)\right).$$

Последняя замена переменных $y(t) = z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)$ дает искомый результат

$$\begin{aligned} z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - 1\right) = z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n_0} a_k}\left(z'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\frac{1}{t\ln q^{-1}} + \right. \\ + \sum_{k=1}^{n_0} a_k r_{0,k} z'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - \frac{1}{\ln q^{-1}}\,\ln\left(\frac{t}{t-\theta_1(t,r_{0,k})}\right)\right)\frac{1}{(t-\theta_1(t,r_{0,k}))\ln q^{-1}} - \\ \left. - \sum_{k=1}^{n_1} b_k z'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - \frac{1}{\ln q^{-1}}\,\ln\left(\frac{t}{t-r_{1,k}}\right)\right)\frac{1}{(t-r_{1,k})\ln q^{-1}} - g(t)\right), \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} g(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^v z'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - \frac{\ln q_{1,k}^{-1}}{\ln q^{-1}}\right)\frac{1}{q_{1,k} t\ln q^{-1}} + \\ + \sum_{k=1}^{n_0} a_k\left[\left(1-\frac{r_{0,k}}{t}\right)^v - 1\right] z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - \frac{1}{\ln q^{-1}}\,\ln\left(\frac{t}{t-r_{0,k}}\right)\right) + \\ + \sum_{k=1}^{n_1} b_k v\left(1-\frac{r_{1,k}}{t}\right)^{v-1}\frac{1}{t}\, z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - \frac{1}{\ln q^{-1}}\,\ln\left(\frac{t}{t-r_{1,k}}\right)\right) + \\ + \sum_{k=1}^{n_1} b_k\left[\left(1-\frac{r_{1,k}}{t}\right)^v - 1\right] z'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - \frac{1}{\ln q^{-1}}\,\ln\left(\frac{t}{t-r_{1,k}}\right)\right)\frac{1}{(t-r_{1,k})\ln q^{-1}} + \\ + \sum_{k=1}^{m_1} h_k v q_{1,k}^{v-1}\frac{1}{t}\, z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - \frac{\ln q_{1,k}^{-1}}{\ln q^{-1}}\right) - v\,\frac{1}{t}\, z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right). \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно слагаемое

$$\sum_{k=1}^{n_0} a_k r_{0,k} z' \left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - \frac{1}{\ln q^{-1}} \ln \left(\frac{t}{t - \theta_1 (t, r_{0,k})} \right) \right) \times$$

$$\times \frac{1}{(t - \theta_1 (t, r_{0,k})) \ln q^{-1}} = \sum_{k=1}^{n_0} a_k (y(t) - y(t - r_{0,k})).$$

Продифференцируем явно несколько раз функцию $y(t) = z \left(\dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}} \right)$:

$$y'(t) = z' \left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} \right) \frac{1}{t \ln q^{-1}}, \ldots,$$

$$y^{(l)}(t) = \frac{d^l}{dt^l} z \left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} \right) = z^{(l)} \left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} \right) \frac{1}{t^l \ln^l q^{-1}} \ldots + (-1)^{l+1} z' \left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} \right) \frac{(l-1)!}{t^l \ln q^{-1}}, \quad l \geq 2.$$

Аналогично получим

$$\frac{d^l}{dt^l} z \left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - 1 \right) = z^{(l)} \left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - 1 \right) \frac{1}{t^l \ln^l q^{-1}} + \ldots + (-1)^{l+1} z' \left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - 1 \right) \frac{(l-1)!}{t^l \ln q^{-1}}.$$

Теперь запишем разность $\sum_{k=1}^{n_0} a_k \left(y^{(l)}(t) - y^{(l)}(t - r_{0,k}) \right)$ с помощью теоремы Лагранжа через функцию $z \left(\dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}} \right)$:

$$\sum_{k=1}^{n_0} a_k \left(y^{(l)}(t) - y^{(l)}(t - r_{0,k}) \right) = \sum_{k=1}^{n_0} a_k r_{0,k} y^{(l+1)} (t - \theta_{l+1} (t, r_{0,k})) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n_0} a_k r_{0,k} \frac{1}{(t - \theta_{l+1} (t, r_{0,k}))^{l+1}} \left(z^{(l+1)} \left(\frac{\ln (t - \theta_{l+1}(t, r_{0,k}))}{\ln q^{-1}} \right) \frac{1}{\ln^{l+1} q^{-1}} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{l+2} z' \left(\frac{\ln (t - \theta_{l+1}(t, r_{0,k}))}{\ln q^{-1}} \right) \frac{l!}{\ln q^{-1}} \right) =$$

$$= \frac{d^l}{dt^l} \sum_{k=1}^{n_0} a_k r_{0,k} z' \left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - \frac{1}{\ln q^{-1}} \ln \left(\frac{t}{t - \theta_1 (t, r_{0,k})} \right) \right) \times$$

$$\times \frac{1}{(t - \theta_1 (t, r_{0,k})) \ln q^{-1}}, \quad 0 < \theta_{l+1}(t, r_{0,k}) < r_{0,k}.$$

Приведенные выше замечания позволяют утверждать, что производную l-го порядка тождества (9) можно записать следующим образом:

$$\frac{d^l}{dt^l}\, z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}-1\right) = z^{(l)}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}-1\right)\frac{1}{t^l \ln^l q^{-1}} + \ldots + (-1)^{l+1} z'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}-1\right)\frac{(l-1)!}{t^l \ln q^{-1}} =$$

$$= z^{(l)}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\frac{1}{t^l \ln^l q^{-1}} + \ldots + (-1)^{l+1} z'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\frac{(l-1)!}{t^l \ln q^{-1}} +$$

$$+ \frac{1}{t^{l+1}}\left[\sum_{i=0}^{l}\sum_{k=1}^{n_0} \alpha_{l,k}^i(t) z^{(i)}\left(\frac{\ln\left(t-r_{0,k}\right)}{\ln q^{-1}}\right) + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{l+1}\sum_{k=1}^{n_0} \chi_{l,k}^i(t) z^{(i)}\left(\frac{\ln\left(t-\theta_{l+1}\left(t, r_{0,k}\right)\right)}{\ln q^{-1}}\right) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{l+1}\sum_{k=1}^{n_1} \beta_{l,k}^i(t) z^{(i)}\left(\frac{\ln(t-r_{1,k})}{\ln q^{-1}}\right) +$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{l+1}\sum_{k=1}^{m_1} \eta_{l,k}^i(t) z^{(i)}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - \frac{\ln q_{1,k}^{-1}}{\ln q^{-1}}\right) + \sum_{i=0}^{l+1} \rho_l^i(t) z^{(i)}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right],$$

где коэффициенты $\alpha_{l,k}^i(t)$, $\chi_{l,k}^i(t)$, $\beta_{l,k}^i(t)$, $\eta_{l,k}^i(t)$, $\rho_l^i(t)$ — ограниченные на полуоси функции. Умножая левую и правую части тождества на t^l, окончательно получаем

$$z^{(l)}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}-1\right)\frac{1}{\ln^l q^{-1}} + \ldots + (-1)^{l+1} z'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}-1\right)\frac{(l-1)!}{\ln q^{-1}} =$$

$$= z^{(l)}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\frac{1}{\ln^l q^{-1}} + \ldots + (-1)^{l+1} z'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\frac{(l-1)!}{\ln q^{-1}} +$$

$$+ \frac{1}{t}\left[\sum_{i=0}^{l}\sum_{k=1}^{n_0} \alpha_{l,k}^i(t) z^{(i)}\left(\frac{\ln\left(t-r_{0,k}\right)}{\ln q^{-1}}\right) + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{l+1}\sum_{k=1}^{n_0} \chi_{l,k}^i(t) z^{(i)}\left(\frac{\ln\left(t-\theta_{l+1}\left(t, r_{0,k}\right)\right)}{\ln q^{-1}}\right) + \sum_{i=0}^{l+1}\sum_{k=1}^{n_1} \beta_{l,k}^i(t) z^{(i)}\left(\frac{\ln\left(t-r_{1,k}\right)}{\ln q^{-1}}\right) +$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{l+1}\sum_{k=1}^{m_1} \eta_{l,k}^i(t) z^{(i)}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - \frac{\ln q_{1,k}^{-1}}{\ln q^{-1}}\right) + \sum_{i=0}^{l+1} \rho_l^i(t) z^{(i)}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right].$$

Параметр l изменяется от 0 до $j+2$, что соответствует необходимой гладкости решения $z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)$. Обозначим $\vec{z}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) = \left(z\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right), \ldots, z^{(j+2)}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right)^T$, $\vec{F}(t, z_u) =$

$= (F_0(t, z_u), \ldots, F_{j+2}(t, z_u))^T$, где

$$F_l(t, z_u) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{i=0}^{l} \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_{l,k}^i(t) z^{(i)} \left(\frac{\ln (t - r_{0,k})}{\ln q^{-1}} \right) + \sum_{i=1}^{l+1} \sum_{k=1}^{n_0} \chi_{l,k}^i(t) z^{(i)} \left(\frac{\ln (t - \theta_{l+1}(t, r_{0,k}))}{\ln q^{-1}} \right) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{l+1} \sum_{k=1}^{n_1} \beta_{l,k}^i(t) z^{(i)} \left(\frac{\ln(t - r_{1,k})}{\ln q^{-1}} \right) + \sum_{i=0}^{l+1} \sum_{k=1}^{m_1} \eta_{l,k}^i(t) z^{(i)} \left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - \frac{\ln q_{1,k}^{-1}}{\ln q^{-1}} \right) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{l+1} \rho_l^i(t) z^{(i)} \left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} \right).$$

В этих обозначениях условия склейки примут вид $C\vec{z}\left(\frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}} - 1\right) = C\vec{z}\left(\frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}\right) +$ $+\frac{1}{t_0}\vec{F}(t_0, z_u)$, где $C \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \frac{1}{\ln q^{-1}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & \frac{1}{\ln^{j+2} q^{-1}} \end{pmatrix}$ — постоянная нижняя треугольная матрица с ненулевыми элементами на главной диагонали, или

$$\vec{z}\left(\frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}} - 1\right) = \vec{z}\left(\frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}\right) + \frac{1}{t_0} C^{-1}\vec{F}(t_0, z_u). \tag{10}$$

Теперь потребуем, чтобы полином $H(\lambda)$ совпадал с полиномом $\psi(\lambda)$ и $(N-1)$-й его производной в каждой точке $u_\tau - u_0$, где u_τ принимает значения всех аргументов функции $z(u)$ и ее производных в равенстве (10). Если некоторые из этих аргументов совпадают, то мы суммируем количество условий равенства полиномов и их производных во всех совпавших точках, т. е. если $\theta_l(t_0, r_{0,k}) = \theta_i(t_0, r_{0,s})$, то в точке $\frac{\ln (t_0 - \theta_l(t_0, r_{0,k}))}{\ln q^{-1}} - \frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}$ полином $H(\lambda)$ совпадает с полиномом $\psi(\lambda)$ и $(2N-1)$-й его производной.

Таким образом, количество условий Эрмита для $H(\lambda)$ остается неизменным и равным $((j+4)n_0 + n_1 + m_1 + 2)N$. Выбор достаточно большого $N \geq j+4$ позволяет утверждать сколь угодно малую равномерную на отрезке $\left[-\frac{\ln q_c^{-1}}{\ln q^{-1}}, 0\right]$ близость полиномов $H(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ вместе с производными до $(j+3)$-го порядка включительно. Более того, эта близость не зависит от расположения запаздываний в данный момент t_0. Полином $G(\lambda)$ строится по тем же условиям Эрмита, что и $H(\lambda)$, за исключением точки -1, где значения $G(\lambda)$ и его производных до $(j+2)$-го порядка включительно уже не совпадают с полиномом $\psi(\lambda)$ и его производными, а задаются правой частью равенства (10), где вместо функций $z^{(i)}(u)$ используются функции $\psi^{(i)}(u-u_0)$, т. е. величиной $\vec{\psi}(0) + \frac{1}{t_0}C^{-1}\vec{F}(t_0, \psi_{u-u_0})$. Отметим, что неоднородность $\vec{F}(t_0, \psi_{u-u_0})$ ограничена, что дает возможность увеличением t_0 сделать сумму $\vec{\psi}(0) + \frac{1}{t_0}C^{-1}\vec{F}(t_0, \psi_{u-u_0})$ сколь угодно близкой к величине $\vec{\psi}(0) = \vec{\psi}(-1)$, т. е. изменение $(j+3)$-х условий Эрмита полинома

$H(\lambda)$ в точке -1 для полинома $G(\lambda)$ минимально и зависит только от величины t_0. Эти изменения $\dfrac{1}{t_0}C^{-1}\vec{F}(t_0, \psi_{u-u_0})$ будут касаться коэффициентов перед полиномами $H_{ik}(\lambda)$ в явной формуле полинома Эрмита, которые соответствуют точке -1 и производным от нулевого до $(j+2)$-го порядка включительно [16, с. 169]. Полиномы $H_{ik}(\lambda)$ существенно зависят от расположения узлов интерполирования $u_\tau - u_0$ и от того, совпадают они или нет. С ростом t_0 это расположение будет меняться. Но во всех случаях расположения запаздываний коэффициенты полинома $H_{ik}(\lambda)$ стремятся к коэффициентам некоторого предельного полинома при $t_0 \to +\infty$, а следовательно, полиномы $H_{ik}(\lambda)$ и их производные ограничены на отрезке $\left[-\dfrac{\ln q_c^{-1}}{\ln q^{-1}}, 0\right]$ некоторой константой для всех t_0.

Таким образом, так как изменения коэффициентов перед $H_{ik}(\lambda)$ в полиноме $G(\lambda)$ относительно исходных значений в полиноме $H(\lambda)$ равны $\dfrac{1}{t_0}\,C^{-1}\vec{F}\,(t_0, \psi_{u-u_0})$ и стремятся к нулю при $t_0 \to +\infty$, то равномерная близость полиномов $G(u-u_0)$, $H(u-u_0)$ и их производных до $(j+2)$-го порядка включительно будет иметь место при достаточно больших t_0 и любых расположениях запаздываний на отрезке $\left[u_0 - \dfrac{\ln q_c^{-1}}{\ln q^{-1}}, u_0\right]$.

Случай $q = q_{1,k}$, $1 \le k \le m_1$, требует лишь очень незначительных поправок в изложенных выше рассуждениях.

Если $p\left(\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right)^{-1} > 0$, то функциональное уравнение для $y(t)$ имеет вид $y(t) = -y(qt) + g(t)$. После замены переменных $y(t) = z\left(\dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)$ получим уравнение

$$z(u) = -z(u-1) + g\left(e^{u\ln q^{-1}}\right) = z(u-2) - g\left(e^{(u-1)\ln q^{-1}}\right) +$$
$$+ g\left(e^{u\ln q^{-1}}\right) \stackrel{\mathrm{df}}{=} z(u-2) + w(u), \quad u \ge u_0 + 1.$$

Как и раньше $|g(t)| \le \dfrac{1}{t}\,W(T, z_0)$, следовательно,

$$|w(u)| \le \left|g\left(e^{(u-1)\ln q^{-1}}\right)\right| + \left|g\left(e^{u\ln q^{-1}}\right)\right| \le \left(q^{u-1} + q^u\right)\,W(T, z_0).$$

Используя равенство $z(u) - z(u-2) = w(u)$ и мажоранту для $|w(u)|$, оцениваем разность

$$|z(u+2m) - z(u+2n)| \le |z(u+2m) - z(u+2m-2)| + \ldots + |z(u+2n+2) - z(u+2n)| =$$
$$= |w(u+2m)| + \ldots + |w(u+2n+2)| \le$$
$$\le \left(q^{u+2m} + \ldots + q^{u+2n+2}\right)\left(q^{-1}+1\right) W(T, z_0) \le \frac{q^{u+1+2n}}{1-q}\,W(T, z_0).$$

Отсюда следует фундаментальность последовательности $z(u+2n)$, существование предела $\lim_{n\to+\infty} z(u+2n) =^{\mathrm{df}} \varphi(u)$ и неравенство $|z(u) - \varphi(u)| \le \frac{q^{u+1}}{1-q}\,W(T, z_0)$, $u \ge \dfrac{\ln t_0}{\ln q^{-1}} - 1$. Очевидно, что $\varphi(u)$ — периодическая функция с периодом 2, ее непрерывность следует из ограниченности $z'(u)$, а из равенства $z(u) = -z(u-1)+g\left(e^{u\ln q^{-1}}\right)$ вытекает тождество $\varphi(u) \equiv -\varphi(u-1)$. Запишем последнее неравенство в развернутом виде

$$|z(u)-\varphi(u)| \leq q^u D_1(T)\max\left\{\sup_{s\in\left[\frac{\ln r(t_0)}{\ln q^{-1}},\frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}\right]}|z(s)|,\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\sup_{s\in\left[\frac{\ln r(t_0)}{\ln q^{-1}},\frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}\right]}\left|z^{(j+2)}(s)\right|\right\},\quad u\geq\frac{\ln t_0}{\ln q^{-1}}-1,$$

где $D_1(T)\overset{\text{df}}{=}D(T)\,\dfrac{q}{1-q}$. Дальнейшие рассуждения аналогичны предыдущим для случая $p\left(\sum_{j=1}^{n_0}a_j\right)^{-1}<0$ с небольшим изменением. А именно, предельная непрерывная периодическая функция удовлетворяет тождеству $\varphi_z(u) = -\varphi_z(u-1)$, и для доказательства полноты множества предельных периодических функций в пространстве непрерывных периодических функций, удовлетворяющих равенству $\varphi(u) \equiv -\varphi(u-1)$, необходимо в качестве тригонометрического полинома $\psi(u)$ использовать среднее по Чезаро частичных сумм ряда Фурье приближаемой периодической функции. Такой тригонометрический полином будет иметь то же свойство $\psi(u) \equiv -\psi(u-1)$.

Теорема 3 доказана.

Замечание. В приведенных рассуждениях существенную роль играет величина t_0, которая предполагается достаточно большой. Возникает естественный вопрос о продолжении результата влево до фиксированной величины на положительной полуоси. В случае, когда наименьшее запаздывание содержится в производной $x'(q_c t)$, продолжение решения дифференциального уравнения влево не составляет труда. Если мы рассматриваем дифференциальное уравнение не нейтрального типа, т. е. в уравнении нет производных с запаздыванием, то можно использовать рассуждения де Брейна [15]. Во-первых, необходимо показать, что в окрестности данной непрерывной функции, заданной на некотором начальном отрезке, можно построить непрерывно дифференцируемую функцию, которая будет удовлетворять дифференциальному уравнению, и таким образом может быть непрерывно продолжена влево на некоторую положительную величину посредством дифференциального (в данном случае функционального) уравнения. Во-вторых, используя элементарные свойства решений линейного дифференциально-функционального уравнения с постоянными коэффициентами, можно легко показать на основе результатов первого пункта, что для любого отрезка $[q_c t_*, t_*]$ и любой заданной на нем непрерывной функции можно построить решение дифференциального уравнения, начинающееся в любой другой точке полуоси $t_1 < t_*$ и попадающее на отрезке $[q_c t_*, t_*]$ в сколь угодно малую окрестность данной непрерывной функции. В-третьих, если для данной периодической функции $\varphi(u)$ уже построено решение $z(u)$, предельная периодическая функция которого на начальном отрезке $[u_0-1, u_0]$ попадает в заданную окрестность $\varphi(u)$, необходимо непрерывно продолжить решение $z(u)$ влево посредством дифференциального (функционального) уравнения на максимально возможную длину, исходя из степени гладкости решения $z(u)$ на начальном отрезке и количества условий склейки, которым это решение и его производные удовлетворяют. Обозначим левую границу продолжения решения $z(u)$ символом $u_e \le u_0 - \dfrac{\ln q_c^{-1}}{\ln q^{-1}}$. В-четвертых, на основе результатов второго пункта можно утверждать существование решения $z_1(u)$, которое начинается в любой точке $u_1 \le u_e$ и попадает в сколь угодно малую окрестность решения $z(u)$ на отрезке $\left[u_e, u_e + \dfrac{\ln q_c^{-1}}{\ln q^{-1}}\right]$. Близость решений $z_1(u)$ и $z(u)$ на отрезке $\left[u_e, u_e + \dfrac{\ln q_c^{-1}}{\ln q^{-1}}\right]$ означает близость решений и их производных на отрезке $\left[u_0 - \dfrac{\ln q_c^{-1}}{\ln q^{-1}}, u_0\right]$. Следовательно, предельная функция $\varphi_{z_1}(u)$ решения $z_1(u)$ будет сколь угодно близкой к данной периодической функции $\varphi(u)$.

Возникает еще один естественный вопрос. Если предельная периодическая функция решения тождественно равна нулю, будет ли само решение тождественно равным нулю? В общем случае это не так. Приведем контрпример.

Пример 2. Для уравнения $x'(t) = ax(t) + bx(qt) + cx'(qt)$, где $\{a, b, c\} \subset R$, $0 < q < 1$, $t \in (0, +\infty)$, предварительно заменив t на $q^{-1}t$ и записав уравнение с помощью формулы вариации произвольных постоянных в интегральной форме, легко доказать с помощью отображения сжатия следующий факт. Если $\dfrac{b}{c} > 0$ и $2\left|\dfrac{q}{c}\right| + \left|\dfrac{a}{b} + \dfrac{q}{c}\right| < 1$, то $x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k e^{-\frac{b}{c} q^{-k} t}$, где $x_k = \dfrac{ac + bq^{-k+1}}{bc\,(q^{-k} - 1)}\, x_{k-1}$, $k \ge 1$, x_0 произвольно, будет единственным, ненулевым и ограниченным на отрезке $[1, +\infty)$ решением этого уравнения. Это решение не имеет нулей на интервале $(0, +\infty)$.

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{n_0} a_k x(t - r_{0,k}) + \sum_{k=1}^{n_1} b_k x'(t - r_{1,k}) + \sum_{k=1}^{m_0} p_k x(q_{0,k} t) + \sum_{k=1}^{m_1} h_k x'(q_{1,k} t) +$$
$$+ f_1\left(x(t - r_{0,k}), x'(t - r_{1,k}), x(q_{0,k} t), x'(q_{1,k} t)\right), \tag{11}$$

где $\{a_k, b_k, p_k, h_k\} \subset R$, $r_{0,k} \ge 0$, $r_{1,k} > 0$, $0 < q_{0,k}, q_{1,k} < 1$, $f_1\colon R^{n_0+n_1+m_0+m_1} \to R$, $x(t - -r_{0,k}) = (x(t - r_{0,1}), \ldots, x(t - r_0, n_0))$, $x'(t - r_{1,k}) = (x'(t - r_{1,1}), \ldots, x'(t - r_{1,n_1}))$, $x(q_{0,k}t) = = (x(q_{0,1}t), \ldots, x(q_{0,m_0}t))$ и $x'(q_{1,k}t) = (x'(q_{1,1}t), \ldots, x'(q_{1,m_1}t))$.

Обозначим фундаментальное решение разностного уравнения $z(t) = \sum_{k=1}^{n_1} b_k z(t - -r_{1,k})$ символом $Z(t)$. Заметим, что если $\alpha_0 < 0$, то это уравнение является асимптотически устойчивым.

Теорема 4. *Пусть:*

1) $\alpha_0 < 0$, $\beta < 0$ *и* $r(t_0) > 0$;

2) параметры $v \in R$ *и* $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\beta < v < 0, \quad \sum_{k=1}^{m_0} |p_k| q_{0,k}^{v+j} \int\limits_0^{+\infty} |X(s)|\, ds + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v+j-1} + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v+j-1} \operatorname*{var}_{s \in [0,+\infty)} X(s) < 1,$$

$$\left(\operatorname*{var}_{s \in [0,+\infty)} Z(s) + 1\right) \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v+j} < 1;$$

3) функция f_1 является непрерывно дифференцируемой $j+1$ раз в окрестности начала координат и равна нулю в начале координат вместе со всеми частными производными 1-го порядка.

Тогда существуют константы $0 < \delta < \sigma < +\infty$ такие, что для $j+1$ раз непрерывно дифференцируемых решений $x(t)$ уравнения (11), удовлетворяющих условию $\left|x^{(m)}(\theta)\right| \le \delta, \theta \in [r(t_0), t_0], m = \overline{0, j+1}$, имеет место оценка

$$\max\left\{|x(t)|, \left|x'(t)\right|, \ldots, \left|x^{(j+1)}(t)\right|\right\} \le \sigma t^v$$

для любого $t \in [r(t_0), +\infty)$.

Доказательство. В дальнейшем будем использовать некоторые обозначения и рассуждения из доказательства теоремы 1 без повторных пояснений. Последовательно дифференцируя левую и правую части уравнения (11) j раз, получаем $j+1$ уравнение

$$\begin{aligned} x^{(m+1)}(t) = &\sum_{k=1}^{n_0} a_k x^{(m)}(t-r_{0,k}) + \sum_{k=1}^{n_1} b_k x^{(m+1)}(t-r_{1,k}) + \sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^m x^{(m)}(q_{0,k}t) + \\ &+ \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^m x^{(m+1)}(q_{1,k}t) + f_{m+1}\Big(x(t-r_{0,k}), \ldots \\ &\ldots, x^{(m)}(t-r_{0,k}), x'(t-r_{1,k}), \ldots, x^{(m+1)}(t-r_{1,k}), x(q_{0,k}t), \ldots \\ &\ldots, x^{(m)}(q_{0,k}t), x'(q_{1,k}t), \ldots, x^{(m+1)}(q_{1,k}t)\Big), \quad m = \overline{0, j}. \end{aligned}$$

Из третьего условия теоремы следует, что все функции f_m, $m = \overline{1, j+1}$, непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам и равны нулю вместе со всеми своими частными производными 1-го порядка в начале координат.

Выполняя замену переменных $x(t) = t^v y(t)$, получаем уравнения

$$\begin{aligned} y^{(m+1)}(t) = &\sum_{k=1}^{n_0} a_k y^{(m)}(t-r_{0,k}) + \sum_{k=1}^{n_1} b_k y^{(m+1)}(t-r_{1,k}) + \sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^{v+m} y^{(m)}(q_{0,k}t) + \\ &+ \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^{v+m} y^{(m+1)}(q_{1,k}t) + F_{m+1}\Big(t, v, y(t-r_{0,k}), \ldots \\ &\ldots, y^{(m)}(t-r_{0,k}), y'(t-r_{1,k}), \ldots, y^{(m+1)}(t-r_{1,k}), y(q_{0,k}t), \ldots \\ &\ldots, y^{(m)}(q_{0,k}t), y'(q_{1,k}t), \ldots, y^{(m+1)}(q_{1,k}t)\Big), \quad m = \overline{0, j}, \end{aligned}$$

где F_i — некоторые непрерывно дифференцируемые по всем своим аргументам функции. Для краткости обозначим $(m+1)(n_0+n_1+m_0+m_1) \stackrel{\mathrm{df}}{=} N_m$. Принимая во внимание условия теоремы и вид функций F_i, можно показать, что для любых $t \in [t_0, +\infty)$ и

$\{z_i, u_i, i = \overline{1, N_m}\} \subset R$: $\max\{|z_i|, |u_i|, i = \overline{1, N_m}\} \leq \sigma$ выполняется неравенство

$$|F_{m+1}(t, v, z_1, \ldots, z_{N_m}) - F_{m+1}(t, v, u_1, \ldots, u_{N_m})| \leq l_{m+1}(t_0, \sigma) \sum_{i=1}^{N_m} |z_i - u_i|, \qquad (12)$$

где $l_{m+1}(t_0, \sigma) \to 0$ при $t_0 \to +\infty$, $\sigma \to 0$, $m = \overline{0, j}$.

Запишем уравнение для $y^{(m)}(t)$, $m = \overline{0, j-1}$, в виде

$$y^{(m)}(t) = -\frac{1}{\sum_{k=1}^{n_0} a_k} \sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^{v+m} y^{(m)}(q_{0,k}t) - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n_0} a_k} \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k \left(y^{(m)}(t - r_{0,k}) - y^{(m)}(t) \right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{n_1} b_k y^{(m+1)}(t - r_{1,k}) + \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^{v+m} y^{(m+1)}(q_{1,k}t) - y^{(m+1)}(t) \right) -$$
$$- \frac{1}{\sum_{k=1}^{n_0} a_k} F_{m+1}\Big(t, v, y(t - r_{0,k}), \ldots, y^{(m)}(t - r_{0,k}), y'(t - r_{1,k}), \ldots$$
$$\ldots, y^{(m+1)}(t - r_{1,k}), y(q_{0,k}t), \ldots, y^{(m)}(q_{0,k}t), y'(q_{1,k}t), \ldots, y^{(m+1)}(q_{1,k}t)\Big).$$

Записав с помощью теоремы Лагранжа разность $y^{(m)}(t - r_{0,k}) - y^{(m)}(t) = -y^{(m+1)}(t - -\theta_m(t, r_{0,k}))r_{0,k}$, $0 < \theta_m(t, r_{0,k}) < r_{0,k}$, окончательно получим

$$y^{(m)}(t) = -\frac{1}{\sum_{k=1}^{n_0} a_k} \sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^{v+m} y^{(m)}(q_{0,k}t) -$$
$$- \frac{1}{\sum_{k=1}^{n_0} a_k} \left(-\sum_{k=1}^{n_0} a_k y^{(m+1)}(t - \theta_m(t, r_{0,k}))r_{0,k} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{n_1} b_k y^{(m+1)}(t - r_{1,k}) + \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^{v+m} y^{(m+1)}(q_{1,k}t) - y^{(m+1)}(t) \right) -$$
$$- \frac{1}{\sum_{k=1}^{n_0} a_k} F_{m+1}\Big(t, v, y(t - r_{0,k}), \ldots, y^{(m)}(t - r_{0,k}), y'(t - r_{1,k}), \ldots$$
$$\ldots, y^{(m+1)}(t - r_{1,k}), y(q_{0,k}t), \ldots, y^{(m)}(q_{0,k}t), y'(q_{1,k}t), \ldots$$
$$\ldots, y^{(m+1)}(q_{1,k}t)\Big) \stackrel{\mathrm{df}}{=} -\frac{1}{\sum_{j=1}^{n_0} a_j} \sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^{v+m} y^{(m)}(q_{0,k}t) + g_m(t), \quad t \geq t_0. \qquad (13)$$

Дифференциальное уравнение для функции $y^{(j)}(t)$, $m = j$, запишем в интегральной форме

$$y^{(j)}(t) = X(t-t_0)\left(y^{(j)}(t_0) - \sum_{k=1}^{n_1} b_k y^{(j)}(t_0 - r_{1,k})\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n_0} a_k \int\limits_{t_0 - r_{0,k}}^{t_0} X(t-\theta-r_{0,k}) y^{(j)}(\theta) d\theta - \sum_{k=1}^{n_1} b_k \int\limits_{t_0 - r_{1,k}}^{t_0} y^{(j)}(\theta) dX(t-\theta-r_{1,k}) -$$

$$- \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^{v+j-1} X(t-t_0) y^{(j)}(q_{1,k} t_0) + \sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^{v+j} \int\limits_{t_0}^{t} X(t-s) y^{(j)}(q_{0,k} s) ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^{v+j-1} y^{(j)}(q_{1,k} t) - \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^{v+j-1} \int\limits_{t_0}^{t} y^{(j)}(q_{1,k} s) dX(t-s) +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} X(t-s) F_{j+1}\Big(s, v, y(s-r_{0,k}), \ldots, y^{(j)}(s-r_{0,k}), y'(s-r_{1,k}), \ldots$$

$$\ldots, y^{(j+1)}(s-r_{1,k}), y(q_{0,k}s), \ldots, y^{(j)}(q_{0,k}s), y'(q_{1,k}s), \ldots, y^{(j+1)}(q_{1,k}s)\Big) ds, \ \ t \geq t_0. \tag{14}$$

Функциональное уравнение для функции $y^{(j+1)}(t)$ записываем в сокращенном виде

$$y^{(j+1)}(t) = \sum_{k=1}^{n_0} a_k y^{(j)}(t-r_{0,k}) + \sum_{k=1}^{n_1} b_k y^{(j+1)}(t-r_{1,k}) + \sum_{k=1}^{m_0} p_k q_{0,k}^{v+j} y^{(j)}(q_{0,k} t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_1} h_k q_{1,k}^{v+j} y^{(j+1)}(q_{1,k} t) + F_{j+1}\Big(t, v, y(t-r_{0,k}), \ldots, y^{(j)}(t-r_{0,k}), y'(t-r_{1,k}), \ldots$$

$$\ldots, y^{(j+1)}(t-r_{1,k}), y(q_{0,k}t), \ldots, y^{(j)}(q_{0,k}t), y'(q_{1,k}t), \ldots$$

$$\ldots, y^{(j+1)}(q_{1,k}t)\Big) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=1}^{n_1} b_k y^{(j+1)}(t-r_{1,k}) + g_{j+1}(t).$$

Отсюда для функции $y^{(j+1)}(t)$ получаем равенство

$$y^{(j+1)}(t) = - b_1 \int\limits_{t_0 - r_{1,1}}^{t_0} \left[d_\theta Z(t-\theta-r_{1,1})\right] y^{(j+1)}(\theta) - \ldots$$

$$\ldots - b_{n_1} \int\limits_{t_0 - r_{1,n_1}}^{t_0} \left[d_\theta Z\left(t-\theta-r_{1,n_1}\right)\right] y^{(j+1)}(\theta) -$$

$$- \int_{t_0}^{t} [d_s Z(t-s)] g_{j+1}(s) + g_{j+1}(t), \quad t \geq t_0. \tag{15}$$

Положим

$$\max\left\{ \sum_{k=1}^{m_0} |p_k| q_{0,k}^{v+j} \int_0^{+\infty} |X(s)| ds + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v+j-1} + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v+j-1} \operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} X(s); \right.$$

$$\left. \left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Z(s) + 1 \right) \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v+j} \right\} = 1 - \varepsilon < 1$$

и выберем числа c_m, $m = \overline{0, j+1}$, так, чтобы выполнялись неравенства

$$c_j \overset{\mathrm{df}}{=} 1 < c_{j-1} < c_{j-2} < \ldots < c_0 < c_{j+1} < +\infty,$$

$$\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Z_{v+m}(s) + 1 \right) \frac{1}{\left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k\right|} \left(\sum_{k=1}^{n_0} |a_k| r_{0,k} + \sum_{k=1}^{n_1} |b_k| + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v+m} + 1 \right) \times$$

$$\times \frac{c_{m+1}}{c_m} \leq \frac{1}{4} \quad \text{при} \quad m = \overline{0, j-1}, \tag{16}$$

$$\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Z(s) + 1 \right) \left(\sum_{k=1}^{n_0} |a_k| + \sum_{k=1}^{m_0} |p_k| q_{0,k}^{v+j} \right) \frac{c_j}{c_{j+1}} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Определим величины $t_0 > 0$ и $\sigma > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Z_{v+m}(s) + 1 \right) \frac{1}{\left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k\right|} l_{m+1}(t_0, c_{j+1}\sigma) \Big((n_0 + m_0)(c_0 + \ldots + c_m) +$$

$$+ (n_1 + m_1)(c_1 + \ldots + c_{m+1}) \Big) \frac{1}{c_m} \leq \frac{1}{4} \quad \text{при} \quad m = \overline{0, j-1},$$

$$\int_0^{+\infty} |X(s)| ds \, l_{j+1}(t_0, c_{j+1}\sigma)((n_0 + m_0)(c_0 + \ldots + c_j) +$$

$$+ (n_1 + m_1)(c_1 + \ldots + c_{j+1})) \frac{1}{c_j} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \tag{17}$$

$$\left(\operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} Z(s) + 1 \right) l_{j+1}(t_0, c_{j+1}\sigma)((n_0 + m_0)(c_0 + \ldots + c_j) +$$

$$+ (n_1 + m_1)(c_1 + \ldots + c_{j+1})) \frac{1}{c_{j+1}} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Пусть $\left|y^{(m)}(\theta)\right| \leq \delta$ для любого $\theta \in [r(t_0), t_0]$, $m = \overline{0, j+1}$, где δ выберем меньшим σ и таким, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{1}{\left|\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right|} \sum_{k=1}^{m_0} |p_k| q_{0,k}^{v+m} \sup_{t\geq t_0} \operatorname*{var}_{s\in[\ln t - \ln t_0 + \ln q, \ln t - \ln t_0]} Z_{v+m}(s)\, \frac{\delta}{\sigma} \leq \frac{1}{4} \quad \text{при} \quad m = \overline{0, j-1},$$

$$\left(\sup_{s\geq 0} |X(s)| \left(1 + \sum_{k=1}^{n_1} |b_k|\right) + \sum_{k=1}^{n_0} |a_k| \sup_{t\geq t_0} \int\limits_{t_0 - r_{0,k}}^{t_0} |X(t-\theta - r_{0,k})| d\theta + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{n_1} |b_k| \sup_{t\geq t_0} \operatorname*{var}_{s\in[t-t_0-r_{1,k}, t-t_0]} X(s) + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v+j-1} \sup_{s\geq 0} |X(s)| \right) \frac{\delta}{\sigma} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \tag{18}$$

$$(|b_1| + \ldots + |b_{n_1}|) \sup_{t\geq t_0} \operatorname*{var}_{s\in[t-t_0-r_{\max}, t-t_0]} Z(s)\, \frac{\delta}{\sigma} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Следовательно, для некоторого $T > t_0$ имеют место неравенства

$$\left|y^{(m)}(t)\right| < c_m \sigma \quad \forall t \in [r(t_0), T), \quad m = \overline{0, j+1}. \tag{19}$$

Если $T = +\infty$, то нужное утверждение доказано. Предположим, что это не так, и пусть T — конечный и первый момент времени, когда хотя бы одно из неравенств (19) становится равенством.

С учетом (12), (14) и (19) оценим $\left|y^{(j)}(t)\right|$ на отрезке $[t_0, T)$:

$$\left|y^{(j)}(t)\right| \leq \left[\left(\sup_{s\geq 0} |X(s)| \left(1 + \sum_{k=1}^{n_1} |b_k|\right) + \sum_{k=1}^{n_0} |a_k| \sup_{t\geq t_0} \int\limits_{t_0 - r_{0,k}}^{t_0} |X(t-\theta - r_{0,k})| d\theta + \right.\right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{n_1} |b_k| \sup_{t\geq t_0} \operatorname*{var}_{s\in[t-t_0-r_{1,k}, t-t_0]} X(s) + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v+j-1} \sup_{s\geq 0} |X(s)| \right) \frac{\delta}{\sigma} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m_0} |p_k| q_{0,k}^{v+j} \int\limits_0^{+\infty} |X(s)| ds + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v+j-1} + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v+j-1} \operatorname*{var}_{s\in[0,+\infty)} X(s) +$$
$$+ \int\limits_0^{+\infty} |X(s)| ds\, l_{j+1}(t_0, c_{j+1}\sigma) \Big((n_0 + m_0)(c_0 + \ldots + c_j) +$$
$$\left. + (n_1 + m_1)(c_1 + \ldots + c_{j+1}) \Big) \frac{1}{c_j} \right] c_j \sigma.$$

Из (16) – (18) и последнего неравенства окончательно получаем $\left|y^{(j)}(t)\right| \leq \left(1-\dfrac{\varepsilon}{3}\right)c_j\sigma$ для любого $t \in [t_0, T)$. В силу (15) для функции $y^{(j+1)}(t)$ имеем

$$\left|y^{(j+1)}(t)\right| \leq (|b_1| + \ldots + |b_{n_1}|) \sup_{t \geq t_0} \operatorname*{var}_{s \in [t-t_0-r_{\max}, t-t_0]} Z(s)\delta +$$

$$+ \left(\operatorname*{var}_{s \in [0,+\infty)} Z(s) + 1\right) \sup_{s \in [t_0,t]} |g_{j+1}(s)|, \quad t \geq t_0.$$

Принимая во внимание (12) и (19), оцениваем $|g_{j+1}(t)|$ на отрезке $[t_0, T)$:

$$|g_{j+1}(t)| \leq \left(\sum_{k=1}^{n_0} |a_k| + \sum_{k=1}^{m_0} |p_k| q_{0,k}^{v+j}\right) c_j\sigma + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v+j} c_{j+1}\sigma +$$

$$+ l_{j+1}(t_0, c_{j+1}\sigma)\big((n_0+m_0)(c_0+\ldots+c_j) + (n_1+m_1)(c_1+\ldots+c_{j+1})\big)\sigma.$$

Тогда для $\left|y^{(j+1)}(t)\right|$ находим

$$\left|y^{(j+1)}(t)\right| \leq \left[(|b_1| + \ldots + |b_{n_1}|) \sup_{t \geq t_0} \operatorname*{var}_{s \in [t-t_0-r_{\max}, t-t_0]} Z(s)\, \frac{\delta}{\sigma} + \right.$$

$$+ \left(\operatorname*{var}_{s \in [0,+\infty)} Z(s) + 1\right) \left(\sum_{k=1}^{n_0} |a_k| + \sum_{k=1}^{m_0} |p_k| q_{0,k}^{v+j}\right) \frac{c_j}{c_{j+1}} +$$

$$+ \left(\operatorname*{var}_{s \in [0,+\infty)} Z(s) + 1\right) \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v+j} + \left(\operatorname*{var}_{s \in [0,+\infty)} Z(s) + 1\right)\, l_{j+1}(t_0, c_{j+1}\sigma) \times$$

$$\left. \times \big((n_0+m_0)(c_0+\ldots+c_j) + (n_1+m_1)(c_1+\ldots+c_{j+1})\big)\, \frac{1}{c_{j+1}} \right] c_{j+1}\sigma.$$

Следовательно, в силу (16) –(18) окончательно получаем $\left|y^{(j+1)}(t)\right| \leq \left(1-\dfrac{\varepsilon}{4}\right) c_{j+1}\sigma$ для любого $t \in [t_0, T)$.

Обозначим $q \stackrel{\mathrm{df}}{=} \min\{q_{0,k}\}$. С помощью рассуждений, использованных при доказательстве теоремы 1, из уравнения (13) получаем оценку для функции $y^{(m)}(t)$:

$$\left|y^{(m)}(t)\right| \leq \frac{1}{\left|\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right|} \sum_{k=1}^{m_0} |p_k| q_{0,k}^{v+m} \sup_{t \geq t_0} \operatorname*{var}_{s \in [\ln t - \ln t_0 + \ln q, \ln t - \ln t_0]} Z_{v+m}(s)\delta +$$

$$+ \left(\operatorname*{var}_{s \in [0,+\infty)} Z_{v+m}(s) + 1\right) \sup_{s \in [t_0,t]} |g_m(s)|.$$

Учитывая (12) и (19), оцениваем $|g_m(t)|$ на отрезке $[t_0, T)$:

$$|g_m(t)| \le \frac{1}{\left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k\right|} \left(\sum_{k=1}^{n_0} |a_k| r_{0,k} + \sum_{k=1}^{n_1} |b_k| + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v+m} + 1 \right) c_{m+1}\sigma + \frac{1}{\left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k\right|} \times$$

$$\times\, l_{m+1}\left(t_0, c_{j+1}\sigma\right) \big((n_0 + m_0)(c_0 + \ldots + c_m) + (n_1 + m_1)(c_1 + \ldots + c_{m+1}) \big)\sigma.$$

Таким образом,

$$\left|y^{(m)}(t)\right| \le \left[\frac{1}{\left|\sum_{j=1}^{n_0} a_j\right|} \sum_{k=1}^{m_0} |p_k| q_{0,k}^{v+m} \sup_{t \ge t_0} \operatorname*{var}_{s \in [\ln t - \ln t_0 + \ln q, \ln t - \ln t_0]} Z_{v+m}(s)\, \frac{\delta}{\sigma} + \right.$$

$$+ \left(\operatorname*{var}_{s \in [0,+\infty)} Z_{v+m}(s) + 1 \right) \frac{1}{\left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k\right|} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=1}^{n_0} |a_k| r_{0,k} + \sum_{k=1}^{n_1} |b_k| + \sum_{k=1}^{m_1} |h_k| q_{1,k}^{v+m} + 1 \right) \frac{c_{m+1}}{c_m} +$$

$$+ \left(\operatorname*{var}_{s \in [0,+\infty)} Z_{v+m}(s) + 1 \right) \frac{1}{\left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k\right|}\, l_{m+1}(t_0, c_{j+1}\sigma) \times$$

$$\left. \times \big((n_0 + m_0)(c_0 + \ldots + c_m) + (n_1 + m_1)(c_1 + \ldots + c_{m+1}) \big) \frac{1}{c_m} \right] c_m \sigma.$$

Отсюда и из (16) – (18) окончательно получаем $\left|y^{(m)}(t)\right| \le \dfrac{3}{4} c_m \sigma$ для любого $t \in [t_0, T)$.

Итак, мы показали, что $\left|y^{(m)}(T)\right| < c_m\sigma$, $m = \overline{0, j+1}$. Но это противоречит предположению относительно T. Поэтому $T = +\infty$ и $\left|y^{(m)}(t)\right| < c_m\sigma$ $\forall t \in [r(t_0), +\infty)$, $m = \overline{0, j+1}$.

В приведенных рассуждениях t_0 является переменной величиной, а по условию теоремы эта величина должна быть фиксирована. Однако с помощью рассуждений, аналогичных изложенным выше, можно показать, что для любых $t_1 > 0$, и $\eta > 0$ существует константа $0 < \gamma < \eta$ такая, что из условия $\left|x^{(m)}(\theta)\right| \le \gamma$ $\forall \theta \in [r(t_1), t_1]$, $m = \overline{0, j+1}$, следует оценка $\left|x^{(m)}(t)\right| \le \eta$ $\forall t \in [r(t_1), +\infty)$, $m = \overline{0, j+1}$.

Теорема 4 доказана.

Рассмотрим линейное уравнение без постоянных запаздываний и с одним линейным запаздыванием у искомой функции

$$x'(t) = ax(t) + bx(qt) + c_1 x'(q_1 t) + \ldots + c_n x'(q_n t), \tag{20}$$

где $\{a, b, c_i\} \subset R$, $0 < q_i < 1$.

Теорема 5. *Пусть:*

1) $a < 0$, $b \neq 0$, $M \in N \bigcup \{0\}$ *и* $r(t_0) \overset{\text{df}}{=} \min\{q_i t_0\} > 0$;

2) параметры $v \stackrel{\mathrm{df}}{=} \dfrac{1}{\ln q^{-1}} \ln \left|\dfrac{b}{a}\right|$ *и* $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ *удовлетворяют неравенству*

$$\left|\frac{b}{a}\right| q^{v+j} + 2\sum_{i=1}^{n} |c_i| q_i^{v+j-1} < 1.$$

Тогда для $M+j+2$ *раза непрерывно дифференцируемых решений* $x(t)$ *уравнения (20) имеет место представление*

$$x(t) = t^{v_1} f_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-1} f_1\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-2} f_2\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots$$

$$\ldots + t^{v_1-M+1} f_{M-1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-M} f_M\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) +$$

$$+ t^{v_1-M-1} d_{M+1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right), \quad t \geq r(t_0),$$

где параметр v_1 *определяется из равенства* $q^{v_1} = -\dfrac{a}{b}$, $f_p(u)$, $0 \leq p \leq M$, *— непрерывные периодические функции с периодом 1 такие, что* $f_0(u) \in C^M(R)$ *и*

$$f_{p+1}(u) = \frac{q^{p+1}}{a\left(q^{p+1}-1\right)}\Bigg[(v_1-p) f_p(u) + \frac{1}{\ln q^{-1}} f_p'(u) - \sum_{i=1}^{n} c_i q_i^{v_1-(p+1)} \times$$

$$\times \left((v_1-p) f_p\left(u - \frac{\ln q_i^{-1}}{\ln q^{-1}}\right) + \frac{1}{\ln q^{-1}} f_p'\left(u - \frac{\ln q_i^{-1}}{\ln q^{-1}}\right)\right)\Bigg], \quad 0 \leq p \leq M-1,$$

$d_{M+1}(u)$ *— ограниченная функция.*

Доказательство. Из условия данной теоремы и теоремы 2 для всех $0 \leq k \leq M$ следуют неравенства

$$\left|x^{(k)}(t)\right| \leq K(t_0) t^{v-k} \max\Bigg\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left|x^{(k)}(s)\right|, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left|x^{(k+1)}(s)\right|, \ldots$$

$$\ldots, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left|x^{(k+j)}(s)\right|\Bigg\}, \quad t \geq r(t_0),$$

а из теоремы 3 — неравенства

$$\left|t^{-(v_1-k)} x^{(k)}(t) - f_{k,0}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right| \leq K(t_0)\,\frac{1}{t} \max\Bigg\{\sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left|x^{(k)}(s)\right|, \ldots$$

$$\ldots, \sup_{s\in[r(t_0),t_0]} \left|x^{(k+j+1)}(s)\right|\Bigg\}, \quad t \geq r(t_0),$$

где $K(t_0)$ — некоторая константа, $f_{k,0}(u)$ — непрерывные периодические функции с периодом 1.

Изучим свойства предельных функций $f_{k,0}(u)$, $0 \le k \le M$. С этой целью для производных $x^{(k)}(t)$ выполним замены переменных, аналогичные той, которая была выполнена в доказательстве теоремы 3 для решения $x(t)$ уравнения (20): $x^{(k)}(t) = t^{v_1-k} z_k\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)$. Отсюда получаем тождества

$$z_k'\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) = \ln\left(q^{-1}\right)\left(-(v_1-k)z_k\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + z_{k+1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right), \quad 0 \le k \le M-1,$$

или $z_k'(u) = \ln\left(q^{-1}\right)\left(-(v_1-k)z_k(u) + z_{k+1}(u)\right)$. Из теоремы 3 следует

$$z_k'(u+n) \to \ln\left(q^{-1}\right)\left(-(v_1-k)f_{k,0}(u) + f_{k+1,0}(u)\right) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \psi_k(u) \in C(R), \quad n \to +\infty.$$

С помощью теоремы Лагранжа запишем тождество

$$\operatorname{Re} z_k(u_2+n) - \operatorname{Re} z_k(u_1+n) =$$
$$= \operatorname{Re} z_k'(u_1 + \theta(n)(u_2-u_1) + n)(u_2-u_1), \quad 0 < \theta(n) < 1. \tag{21}$$

Из ограниченной последовательности $\theta(n)$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\theta(n(m)) \to \theta_* \in [0,1]$, $m \to +\infty$, и запишем равенство

$$\operatorname{Re} z_k'(u_1 + \theta(n(m))(u_2-u_1) + n(m)) - \operatorname{Re}\psi_k(u_1 + \theta_*(u_2-u_1)) =$$
$$= \operatorname{Re} z_k'(u_1 + \theta(n(m))(u_2-u_1) + n(m)) - \operatorname{Re}\psi_k(u_1 + \theta(n(m))(u_2-u_1) + n(m)) +$$
$$+ \operatorname{Re}\psi_k(u_1 + \theta(n(m))(u_2-u_1)) - \operatorname{Re}\psi_k(u_1 + \theta_*(u_2-u_1)).$$

Поскольку согласно теореме 3 имеет место оценка

$$\left|\operatorname{Re} z_k'(u) - \operatorname{Re}\psi_k(u)\right| \le \left|z_k'(u) - \psi_k(u)\right| = \left|\ln\left(q^{-1}\right)\left(-(v_1-k)\left(z_k(u) - f_{k,0}(u)\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(z_{k+1}(u) - f_{k+1,0}(u)\right)\right)\right| \le q^u L_k,$$

где L_k — некоторая константа и $\psi_k(u) \in C(R)$, из последнего равенства следует

$$\operatorname{Re} z_k'(u_1 + \theta(n(m))(u_2-u_1) + n(m)) \to \operatorname{Re}\psi_k(u_1 + \theta_*(u_2-u_1)), \quad m \to +\infty.$$

Переходя к пределу в формуле (21) при $n(m) \to +\infty$, получаем

$$\operatorname{Re} f_{k,0}(u_2) - \operatorname{Re} f_{k,0}(u_1) = \operatorname{Re}\psi_k(u_1 + \theta_*(u_2-u_1))(u_2-u_1),$$

т. е. $\frac{d}{du}\operatorname{Re} f_{k,0}(u) = \operatorname{Re}\psi_k(u)$. Аналогично получаем $\frac{d}{du}\operatorname{Im} f_{k,0}(u) = \operatorname{Im}\psi_k(u)$. Отсюда следует, что $f_{k,0}'(u) = \psi_k(u) = \ln\left(q^{-1}\right)\left(-(v_1-k)f_{k,0}(u) + f_{k+1,0}(u)\right)$ или

$$f_{k+1,0}(u) = (v_1-k)f_{k,0}(u) + \frac{1}{\ln q^{-1}}\, f_{k,0}'(u). \tag{22}$$

При $k = M-1$ из последнего равенства следует, что $f_{M-1,0}(u)$ принадлежит $C^1(R)$, поэтому при $k = M-2$ на основании этой же формулы можно утверждать, что $f_{M-2,0}(u)$ принадлежит $C^2(R)$, и через конечное число шагов получаем $f_{M-k,0}(u) \in C^k(R), 0 \le k \le M$.

Продифференцируем уравнение (20) k раз:

$$x^{(k+1)}(t) = ax^{(k)}(t) + bq^k x^{(k)}(qt) + c_1 q_1^k x^{(k+1)}(q_1 t) + \ldots + c_n q_n^k x^{(k+1)}(q_n t). \tag{23}$$

Формальное решение полученного уравнения найдем в виде функционального ряда

$$x^{(k)}(t) = t^{v_1-k} f_{k,0}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-k-1} f_{k,1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-k-2} f_{k,2}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) +$$
$$+ t^{v_1-k-3} f_{k,3}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots = \sum_{p=0}^{+\infty} f_{k,p}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) t^{v_1-k-p}, \tag{24}$$

где $f_{k,p}(u+1) \equiv f_{k,p}(u)$, $p = 0, 1, 2, \ldots$. Для этого подставим его в уравнение

$$x^{(k+1)}(t) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left((v_1-k-p) f_{k,p}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \frac{1}{\ln q^{-1}} f'_{k,p}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right) t^{v_1-(k+1)-p} =$$
$$= a\sum_{p=0}^{+\infty} f_{k,p}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) t^{v_1-k-p} + bq^k \sum_{p=0}^{+\infty} f_{k,p}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) q^{v_1-k-p} t^{v_1-k-p} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} c_i q_i^k \sum_{p=0}^{+\infty}\left((v_1-k-p)\, f_{k,p}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - \frac{\ln q_i^{-1}}{\ln q^{-1}}\right) +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\ln q^{-1}} f'_{k,p}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} - \frac{\ln q_i^{-1}}{\ln q^{-1}}\right)\right) q_i^{v_1-(k+1)-p} t^{v_1-(k+1)-p}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, с учетом равенства $q^{v_1} = -\dfrac{a}{b}$ получаем, что $f_{k,0}(u)$ — произвольная периодическая функция, а последующие коэффициенты определяются рекуррентной формулой

$$f_{k,p+1}(u) = \frac{q^{p+1}}{a\,(q^{p+1}-1)}\left[(v_1-k-p) f_{k,p}(u) + \frac{1}{\ln q^{-1}}\, f'_{k,p}(u) - \sum_{i=1}^{n} c_i q_i^{v_1-(p+1)} \times\right.$$
$$\left. \times \left((v_1-k-p) f_{k,p}\left(u - \frac{\ln q_i^{-1}}{\ln q^{-1}}\right) + \frac{1}{\ln q^{-1}}\, f'_{k,p}\left(u - \frac{\ln q_i^{-1}}{\ln q^{-1}}\right)\right)\right], \quad p \ge 0. \tag{25}$$

С другой стороны, при подстановке функционального ряда (24) в дифференциальное уравнение (23) получаем функциональный ряд для производной $x^{(k+1)}(t)$:

$$x^{(k+1)}(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left((v_1 - k - p) f_{k,p} \left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} \right) + \frac{1}{\ln q^{-1}} f'_{k,p} \left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} \right) \right) t^{v_1-(k+1)-p} =$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty} f_{k+1,p} \left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} \right) t^{v_1-(k+1)-p}.$$

Согласно (22) равенство

$$f_{k+1,p}(u) = (v_1 - k - p) f_{k,p}(u) + \frac{1}{\ln q^{-1}} f'_{k,p}(u) \tag{26}$$

выполняется при $p = 0$, $0 \le k \le M - 1$. Предположим, что оно справедливо для некоторого $p \ge 0$, и рассмотрим коэффициент $f_{k+1,p+1}(u)$ на основании его определения (25):

$$f_{k+1,p+1}(u) = \frac{q^{p+1}}{a\,(q^{p+1}-1)} \Bigg[(v_1 - (k+1) - p) f_{k+1,p}(u) + \frac{1}{\ln q^{-1}} f'_{k+1,p}(u) - \sum_{i=1}^{n} c_i q_i^{v_1-(p+1)} \times$$

$$\times \left((v_1 - (k+1) - p) f_{k+1,p} \left(u - \frac{\ln q_i^{-1}}{\ln q^{-1}} \right) + \frac{1}{\ln q^{-1}} f'_{k+1,p} \left(u - \frac{\ln q_i^{-1}}{\ln q^{-1}} \right) \right) \Bigg].$$

Согласно предположению математической индукции, заменив в этом выражении функцию $f_{k+1,p}(u)$ ее выражением (26), после простых алгебраических действий с помощью формулы (25) получим $f_{k+1,p+1}(u) = (v_1 - k - (p+1)) f_{k,p+1}(u) + \dfrac{1}{\ln q^{-1}} f'_{k,p+1}(u)$, т. е. тождество (26) доказано для всех $p \ge 0$.

Заметим, что из условия $f_{k,0}(u) \in C^{M-k}(R)$, $0 \le k \le M$, следует определенность коэффициентов $f_{k,p}(u)$, $0 \le p \le M - k$, в разложении (24).

Из теоремы 3 следует тождество $x^{(M)}(t) = f_{M,0} \left(\dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}} \right) t^{v_1-M} + d_{M,1} \left(\dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}} \right) t^{v_1-M-1}$, $t \ge r(t_0)$, где $d_{M,1}(u)$ — ограниченная функция. Предположим, что для некоторого $0 \le$ $\le k \le M-1$ выполняется равенство

$$x^{(k+1)}(t) = t^{v_1-k-1} f_{k+1,0} \left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} \right) + t^{v_1-k-2} f_{k+1,1} \left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} \right) +$$

$$+ t^{v_1-k-3} f_{k+1,2} \left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} \right) + \ldots + t^{v_1-M} f_{k+1,M-k-1} \left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} \right) +$$

$$+ d_{k+1,M-k} \left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} \right) t^{v_1-M-1}, \quad t \ge r(t_0), \tag{27}$$

где $d_{k+1,M-k}(u)$ — ограниченная функция. Согласно теореме 3

$$x^{(k)}(t) = f_{k,0} \left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} \right) t^{v_1-k} + d_{k,1} \left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}} \right) t^{v_1-k-1}, \quad t \ge r(t_0),$$

где $d_{k,1}(u)$ — ограниченная функция. Для $1 \le p \le M-k$ предположим выполненным равенство

$$x^{(k)}(t) = t^{v_1-k} f_{k,0}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-k-1} f_{k,1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-k-2} f_{k,2}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots$$
$$\ldots + t^{v_1-k-p+1} f_{k,p-1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + d_{k,p}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) t^{v_1-k-p}, \quad t \ge r(t_0), \tag{28}$$

где $d_{k,p}(u)$ — ограниченная функция. Продифференцируем последнее тождество:

$$x^{(k+1)}(t) = t^{v_1-k-1}\left((v_1-k) f_{k,0}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \frac{1}{\ln q^{-1}}\, f'_{k,0}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right) +$$
$$+ t^{v_1-k-2}\left((v_1-k-1) f_{k,1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \frac{1}{\ln q^{-1}}\, f'_{k,1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right) + \ldots$$
$$\ldots + t^{v_1-k-p}\left((v_1-k-p+1) f_{k,p-1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \frac{1}{\ln q^{-1}}\, f'_{k,p-1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right) +$$
$$+ t^{v_1-k-p-1}\left((v_1-k-p) d_{k,p}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \frac{1}{\ln q^{-1}}\, d'_{k,p}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right).$$

Учитывая формулу (26), последнее выражение записываем следующим образом:

$$x^{(k+1)}(t) = t^{v_1-k-1} f_{k+1,0}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-k-2} f_{k+1,1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots$$
$$\ldots + t^{v_1-k-p} f_{k+1,p-1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-k-p-1} \times$$
$$\times \left((v_1-k-p) d_{k,p}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \frac{1}{\ln q^{-1}}\, d'_{k,p}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)\right).$$

Согласно предположению (27) из последнего равенства следует ограниченность суммы

$$(v_1-k-p)\, d_{k,p}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \frac{1}{\ln q^{-1}}\, d'_{k,p}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right),$$

а так как функция $d_{k,p}(u)$ ограничена, то и производная $d'_{k,p}(u)$ является ограниченной функцией.

Подставляя замену переменных (28) для производной $x^{(k)}(t)$ в уравнение (23), получаем

$$d_{k,p}(u) = f_{k,p}(u) + \frac{1}{q^p - 1}\,(d_{k,p}(u-1) - d_{k,p}(u)) + q^u\,\frac{q^p}{a\,(q^p-1)} \times$$
$$\times\left[(v_1 - k - p)d_{k,p}(u) + \frac{1}{\ln q^{-1}}\,d'_{k,p}(u) - \sum_{i=1}^{n} c_i q_i^{v_1-p-1} \times\right.$$
$$\left.\times\left((v_1-k-p)d_{k,p}\left(u - \frac{\ln q_i^{-1}}{\ln q^{-1}}\right) + \frac{1}{\ln q^{-1}}\,d'_{k,p}\left(u - \frac{\ln q_i^{-1}}{\ln q^{-1}}\right)\right)\right],$$

где $u = \dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}}$. Определим для краткости записи

$$g_p(u) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{q^p}{a\,(q^p-1)}\left[(v_1 - k - p)d_{k,p}(u) + \frac{1}{\ln q^{-1}}\,d'_{k,p}(u) - \sum_{i=1}^{n} c_i q_i^{v_1-p-1} \times\right.$$
$$\left.\times\left((v_1-k-p)d_{k,p}\left(u - \frac{\ln q_i^{-1}}{\ln q^{-1}}\right) + \frac{1}{\ln q^{-1}}\,d'_{k,p}\left(u - \frac{\ln q_i^{-1}}{\ln q^{-1}}\right)\right)\right].$$

Из ограниченности функций $d_{k,p}(u)$ и $d'_{k,p}(u)$ следует ограниченность функции $g_p(u)$. В новых обозначениях

$$d_{k,p}(u) = f_{k,p}(u) + \frac{1}{q^p-1}\,(d_{k,p}(u-1) - d_{k,p}(u)) + q^u g_p(u). \tag{29}$$

Учитывая периодичность $f_{k,p}(u)$, имеем

$$d_{k,p}(u+1) = f_{k,p}(u) + \frac{1}{q^p-1}(d_{k,p}(u) - d_{k,p}(u+1)) + q^{u+1} g_p(u+1).$$

Вычитая два последних равенства одно из другого, находим

$$d_{k,p}(u+1) - d_{k,p}(u) = q^{-p}(d_{k,p}(u) - d_{k,p}(u-1)) + q^u\,\frac{q^p-1}{q^p}\,(q g_p(u+1) - g_p(u)).$$

Снова определим для краткости $l_p(u) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \dfrac{q^p-1}{q^p}\,(q g_p(u+1) - g_p(u))$. Из ограниченности функции $g_p(u)$ следует ограниченность функции $l_p(u)$. В новых обозначениях

$$d_{k,p}(u+1) - d_{k,p}(u) = q^{-p}(d_{k,p}(u) - d_{k,p}(u-1)) + q^u l_p(u).$$

Отсюда получаем

$$d_{k,p}(u+m) - d_{k,p}(u+m-1) = q^{-mp}\Big[d_{k,p}(u) - d_{k,p}(u-1) + q^u\Big(q^p l_p(u) +$$
$$. + q^{2p+1} l_p(u+1) + \ldots + q^{(m-1)p+m-2} l_p(u+m-2) +$$
$$+ q^{mp+m-1} l_p(u+m-1)\Big)\Big].$$

В полученном равенстве слева содержится ограниченная варианта, а справа — произведение стремящегося к бесконечности множителя q^{-mp} и частичной суммы сходящего ряда (функция $l_p(u)$ ограничена):

$$d_{k,p}(u) - d_{k,p}(u-1) + q^u\Big(q^p l_p(u) + q^{2p+1} l_p(u+1) + q^{3p+2} l_p(u+2) + \ldots \\ \ldots + q^{(m+1)p+m} l_p(u+m) + \ldots\Big).$$

Следовательно, сумма ряда равна нулю:

$$d_{k,p}(u) - d_{k,p}(u-1) + q^u\Big(q^p l_p(u) + q^{2p+1} l_p(u+1) + q^{3p+2} l_p(u+2) + \ldots \\ \ldots + q^{(m+1)p+m} l_p(u+m) + \ldots\Big) = 0,$$

или

$$d_{k,p}(u) - d_{k,p}(u-1) = -q^u\Big(q^p l_p(u) + q^{2p+1} l_p(u+1) + q^{3p+2} l_p(u+2) + \ldots \\ \ldots + q^{(m+1)p+m} l_p(u+m) + \ldots\Big).$$

Определим для краткости

$$S_p(u) \overset{\mathrm{df}}{=} q^p l_p(u) + q^{2p+1} l_p(u+1) + q^{3p+2} l_p(u+2) + \ldots + q^{(m+1)p+m} l_p(u+m) + \ldots .$$

Из ограниченности функции $l_p(u)$ следует ограниченность суммы $S_p(u)$. В новых обозначениях $d_{k,p}(u) - d_{k,p}(u-1) = -q^u S_p(u)$. С учетом этой формулы запишем равенство (29) в виде $d_{k,p}(u) = f_{k,p}(u) + q^u \left(\dfrac{1}{q^p-1}\, S_p(u) + g_p(u)\right)$. Определим $d_{k,p+1}(u) \overset{\mathrm{df}}{=} \dfrac{1}{q^p-1}\, S_p(u) + {}$ $+ g_p(u)$. Функция $d_{k,p+1}(u)$ ограничена. В новых обозначениях $d_{k,p}(u) = f_{k,p}(u) + q^u d_{k,p+1}(u)$, и тождество (28) можно записать так:

$$x^{(k)}(t) = t^{v_1-k} f_{k,0}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-k-1} f_{k,1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-k-2} f_{k,2}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots \\ \ldots + t^{v_1-k-p+1} f_{k,p-1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-k-p} f_{k,p}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \\ + t^{v_1-k-p-1} d_{k,p+1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right), \quad t \geq r(t_0).$$

Действуя таким образом с индексом p, через конечное число шагов получаем представление

$$x^{(k)}(t) = t^{v_1-k} f_{k,0}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-k-1} f_{k,1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-k-2} f_{k,2}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots$$
$$\ldots + t^{v_1-M+1} f_{k,M-k-1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-M} f_{k,M-k}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) +$$
$$+ t^{v_1-M-1} d_{k,M-k+1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right), \quad t \geq r(t_0),$$

где $d_{k,M-k+1}(u)$ — ограниченная функция.

На основании полученной формулы для производной $x^{(k)}(t)$, повторяя изложенные выше рассуждения, можно доказать аналогичное представление для производной $x^{(k-1)}(t)$ и через конечное число шагов следующее равенство для решения $x(t)$ уравнения (20):

$$x(t) = t^{v_1} f_{0,0}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-1} f_{0,1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-2} f_{0,2}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + \ldots$$
$$\ldots + t^{v_1-M+1} f_{0,M-1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + t^{v_1-M} f_{0,M}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) +$$
$$+ t^{v_1-M-1} d_{0,M+1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right), \quad t \geq r(t_0),$$

где $d_{0,M+1}(u)$ — ограниченная функция.

Теорема 5 доказана.

Отметим, что формальное решение (24) уравнения (23) при $f_{k,0}(u) \equiv \mathrm{const} \neq 0$ является расходящимся степенным рядом на всей полуоси $t > 0$.

Статья [17] является продолжением и в некотором смысле логическим завершением этой работы, посвященной уравнению $x'(t) = ax(t) + bx(qt) + cx'(qt)$. Там есть ссылка на теорему 5 из второго параграфа некоторого препринта, которая тождественна теореме 5 этой статьи.

Литература

1. *Kato T., McLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — **77**. — P. 891–937.
2. *de Bruijn N. G.* The difference-differential equation $F'(x) = e^{\alpha x+\beta} F(x-1)$ // I, II, Ned. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 56-Indag. Math. — 1953. — **15**. — P. 449–464.
3. *Frederickson P. O.* Series solutions for certain functional-differential equations // Lect. Notes Math. — 1971. — **243**. — P. 249–254.
4. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1974. — 192 с.
5. *Дерфель Г. А.* Вероятностный метод исследования одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 10. — С. 1483–1491.
6. *Полищук В. М., Шарковский А. Н.* Представление решений линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения. — 1973. — **9**, № 9. — С. 1627–1645.
7. *Frederickson P. O.* Global solutions to certain nonlinear functional differential equations // J. Math. Anal. and Appl. — 1971. — **33**. — P. 355–358.

8. *Гребенщиков Б. Г.* Об асимптотических свойствах некоторых систем с двумя запаздываниями // Изв. вузов. Математика. — 2006. — **528**, № 5. – С. 27 – 37.

9. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений дифференциально-функциональных уравнений с линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, № 1. — С. 144 – 160.

10. *Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений дифференциально-функциональных уравнений с линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. — 2008. — **11**, № 2. — С. 147 – 150.

11. *Гребенщиков Б. Г., Рожков В. И.* Асимптотическое поведение решения одной стационарной системы с запаздыванием // Дифференц. уравнения. — 1993. — **29**, № 5. — С. 751 – 758.

12. *Гребенщиков Б. Г., Ложников А. Б.* Стабилизация системы, содержащей постоянное и линейное запаздывания // Дифференц. уравнения. — 2004. — **40**, № 12. — С. 1587 – 1595.

13. *Gumovski I., Mira C.* Recurrences and discrete dynamic systems // Lect. Notes Math. — 1980. — **809**.

14. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.

15. *de Bruijn N. G.* The asymptotically periodic behavior of the solutions of some linear functional equations // Amer. J. Math. — 1949. — **71**, № 2. — P. 313 – 330.

16. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. — М.: Физматгиз, 1962. — Т. 1. — 464 с.

17. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений линейного дифференциально-функционального уравнения нейтрального типа с постоянными коэффициентами и линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 4. — С. 466 – 493.

Получено 20.12.14