УДК 517.9

БІФУРКАЦІЯ АВТОКОЛИВАНЬ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ АРГУМЕНТОМ, ЩО ЗАПІЗНЮЄТЬСЯ, ТА МАЛОЮ ДИФУЗІЄЮ

І. І. Клевчук

Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012, Україна

We prove existence of periodic solutions in an autonomous parabolic system of differential equations on the circle with a delay in the argument and small diffusion. We consider the problem of existence and stability of traveling waves in the equation of spin combustion with delay.

Доказано существование периодических решений автономной параболической системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и малой диффузией на окружности. Изучены вопросы существования и устойчивости бегущих волн уравнения спинового горения с запаздыванием.

Питання стійкості та біфуркації розв'язків диференціально-функціональних рівнянь, параболічних та гіперболічних систем з перетвореним аргументом розглядалися, зокрема, в [1 – 5]. У цій статті досліджено існування та стійкість як завгодно великого скінченного числа циклів параболічної системи із запізненням та малою дифузією і рівняння спінового горіння із запізненням. Подібні задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними вивчалися у багатьох роботах (див., наприклад, [6 – 8]).

1. Біжучі хвилі параболічних рівнянь із запізненням та малою дифузією. Розглянемо систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_0 u + \varepsilon A_1 u + F(u, u(t-\Delta, x)) \tag{1}$$

з періодичною умовою

$$u(t, x+2\pi) = u(t, x), \tag{2}$$

де ε — малий додатний параметр, $\Delta > 0$, $u \in \mathbb{R}^2$, функція $F(u,v)$ чотири рази неперервно диференційовна відносно своїх аргументів, $F(0,0) = 0$, причому F має в нулі порядок малості вище першого, $A_0 a = i\omega_0 a$, $\omega_0 > 0$, $A_0^* b = -i\omega_0 b$. Тут a і b — власні вектори матриць A_0 і A_0^* відповідно, для яких $(a,b) = 1$, $(\bar a, b) = 0$, матриця $A_0 + \varepsilon A_1$ має пару власних значень вигляду $\tau(\varepsilon) \pm i\omega(\varepsilon)$, $\tau(0) = 0$, $\tau'(0) > 0$, $\omega(0) = \omega_0$, $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2)$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$.

Дослідимо існування і стійкість хвильових розв'язків задачі (1), (2). Розв'язок системи (1) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $u = \theta(y)$, $y = \sigma t + x$, де функція $\theta(y)$ має період 2π. Тоді одержимо систему

$$\sigma\,\frac{d\theta}{dy} = \varepsilon D\,\frac{d^2\theta}{dy^2} + A_0\theta + \varepsilon A_1\theta + F(\theta, \theta(y - \sigma\Delta)).$$

Цю систему заміною $\dfrac{d\theta}{dy} = \theta_1$ зведемо до вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \theta_1, \quad \sigma\theta_1 = \varepsilon D\,\frac{d\theta_1}{dy} + A_0\theta + \varepsilon A_1\theta + F(\theta, \theta(y - \sigma\Delta)). \tag{3}$$

Інтегральний многовид системи (3) можна зобразити у вигляді

$$\theta_1 = \frac{1}{\sigma}\,A_0\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma^3}\,DA_0^2\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma}\,A_1\theta + \frac{1}{\sigma}\,F(\theta, \theta(y - \sigma\Delta)) + \ldots.$$

Тут у лінійних доданках збережено члени порядку $O(\varepsilon)$, а в нелінійних — $O(1)$. Система рівнянь на цьому многовиді набере вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{\sigma}\,A_0\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma^3}\,DA_0^2\theta + \frac{\varepsilon}{\sigma}\,A_1\theta + \frac{1}{\sigma}\,F(\theta, \theta(y - \sigma\Delta)) + \ldots. \tag{4}$$

У системі (4) виконаємо заміну $\theta = av + \bar{a}\bar{v}$ і домножимо обидві частини зліва на матрицю $\begin{pmatrix} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$. Тоді, враховуючи, що $(a, b) = 1$, де $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dy} &= i\,\frac{\omega_0}{\sigma}\,v - \frac{\varepsilon}{\sigma^3}\,\omega_0^2 b^* D(av + \bar{a}\bar{v}) + \frac{\varepsilon}{\sigma}\,b^* A_1(av + \bar{a}\bar{v}) + \\ &\quad + \frac{1}{\sigma}\,b^* F(av + \bar{a}\bar{v}, av(y - \sigma\Delta) + \bar{a}\bar{v}(y - \sigma\Delta)) + \ldots. \end{aligned} \tag{5}$$

Виконавши у рівнянні (5) заміну $v = w \exp\left(i\,\dfrac{\omega_0}{\sigma}\,y\right)$, одержимо

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dy} &= \left(-\frac{\varepsilon}{\sigma^3}\,\omega_0^2 b^* D + \frac{\varepsilon}{\sigma}\,b^* A_1\right)\left(aw + \bar{a}\bar{w}\exp\left(-2i\,\frac{\omega_0}{\sigma}\,y\right)\right) + \exp\left(-i\frac{\omega_0}{\sigma}\,y\right) \times \\ &\quad \times F\Bigg(aw\exp\left(i\,\frac{\omega_0}{\sigma}\,y\right) + \bar{a}\bar{w}\exp\left(-i\,\frac{\omega_0}{\sigma}\,y\right), aw(y - \sigma\Delta)\exp\left(i\,\frac{\omega_0}{\sigma}\,(y - \sigma\Delta)\right) + \\ &\quad + \bar{a}\bar{w}(y - \sigma\Delta)\exp\left(-i\,\frac{\omega_0}{\sigma}\,(y - \sigma\Delta)\right)\Bigg) + \ldots. \end{aligned}$$

В останньому рівнянні перейдемо до нормальної форми, використавши властивості функції F, і замінимо w на $\sqrt{\varepsilon}w$ [9, 10]. В результаті одержимо автономне рівняння вигляду

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{\varepsilon}{\sigma^3}\,\omega_0^2 b^* Daw + \frac{\varepsilon}{\sigma}\,b^* A_1 aw + \frac{\varepsilon}{\sigma}\,(d_0 + ic_0)w^2\bar{w}. \tag{6}$$

Оскільки $(a, b) = 1$, $(\bar{a}, b) = 0$, то $\mathrm{Re}\,(b^* Da) = \dfrac{1}{2}\,(d_1 + d_2)$. Зауважимо, що сталі d_0 та c_0 залежать від власного вектора a.

Перейшовши у рівнянні (6) до полярних координат $w = r\exp(i\varphi)$, одержимо рівняння

$$\frac{dr}{dy} = -\frac{\varepsilon}{2\sigma^3}\,\omega_0^2(d_1+d_2)r + \frac{\varepsilon}{\sigma}\,\tau'(0)r + \frac{\varepsilon}{\sigma}\,d_0r^3, \tag{7}$$

де $\tau'(0) = \mathrm{Re}\,(A_1a, b) > 0$.

Нехай $d_0 < 0$ і виконується нерівність $\tau'(0) > \dfrac{1}{2\sigma^2}\,\omega_0^2(d_1+d_2)$. Тоді рівняння (7) має стаціонарний розв'язок

$$R_0 = \sqrt{\left(\tau'(0) - \frac{1}{2\sigma^2}\,\omega_0^2(d_1+d_2)\right)|d_0|^{-1}}.$$

Отже, періодичний розв'язок рівняння (5) має вигляд $v = \sqrt{\varepsilon}R_0\exp\left(i\,\dfrac{\omega_0}{\sigma}\,y\right) + O(\varepsilon)$. Звідси знаходимо періодичний розв'язок $\theta = av + \bar{a}\bar{v}$ системи (4). Враховуючи, що функція θ має період 2π, одержуємо $\sigma = \dfrac{\omega_0}{n} + O(\varepsilon)$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$. Отже, періодичний розв'язок системи (1) має вигляд

$$u_n = \sqrt{\varepsilon}r_n(a\exp i\eta + \bar{a}\exp(-i\eta)) + O(\varepsilon), \tag{8}$$

де

$$r_n = \sqrt{\left(\tau'(0) - \frac{1}{2}(d_1+d_2)n^2\right)|d_0|^{-1}}, \quad \eta = \omega_n(\varepsilon)t + nx, \quad \omega_n(\varepsilon) = \omega_0 + O(\varepsilon), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тому справджується таке твердження.

Теорема 1. *Нехай $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $\tau'(0) > \dfrac{1}{2}(d_1+$ $+d_2)n^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (1), (2) має періодичні відносно t розв'язки (8).*

2. Стійкість періодичних розв'язків. Система рівнянь у варіаціях в околі розв'язку $u_n(t,x)$ системи (1) має вигляд

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon D\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_0v + \varepsilon A_1v + \sqrt{\varepsilon}B_1(t,\varepsilon)v + \sqrt{\varepsilon}B_2(t,\varepsilon)v(t-\Delta,x). \tag{9}$$

У системі (9) виконаємо заміну $v = aw + \bar{a}\bar{w}$ і домножимо обидві частини зліва на матрицю $\begin{pmatrix} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, де $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Тоді одержимо

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon b^* D\frac{\partial^2(aw+\bar{a}\bar{w})}{\partial x^2} + i\omega_0 w + b^*(\varepsilon A_1 + \sqrt{\varepsilon}B_1(t,\varepsilon))(aw+\bar{a}\bar{w}) +$$
$$+ \sqrt{\varepsilon}b^*B_2(t,\varepsilon)(aw(t-\Delta,x) + \bar{a}\bar{w}(t-\Delta,x)). \tag{10}$$

Виконавши у рівнянні (10) заміну $w = z\exp(i\omega_0 t)$ і використавши друге наближення в методі усереднення відносно t, одержимо

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \varepsilon b^* Da\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \varepsilon b^* A_1 az + \varepsilon(d_0 + ic_0)(2r_n^2 z + w_n^2\bar{z}), \tag{11}$$

де $w_n = r_n\exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx))$, $\chi_n(\varepsilon) = \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$, $\beta = \mathrm{Im}\,(A_1 a, b)$, $\delta = \mathrm{Im}\,(Da, b)$. Заміною $z = u\exp(i\chi_n(\varepsilon)t)$ рівняння (11) зведемо до вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\alpha + i\delta n^2 + d_0 r_n^2\right)u + (d_0 + ic_0)r_n^2(u + \overline{u}\exp(2inx))\right], \tag{12}$$

де $\gamma = \mathrm{Re}\,(Da, b) = \dfrac{1}{2}(d_1 + d_2)$, $\alpha = \tau'(0) = \mathrm{Re}\,(A_1 a, b)$.

Розв'язок рівняння (12) будемо шукати у вигляді ряду Фур'є в комплексній формі

$$u(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t)\exp(ikx), \quad \overline{u}(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(t)\exp(ikx). \tag{13}$$

Підставляючи (13) у (12) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(ikx)$, отримуємо рівняння відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\begin{aligned}\frac{dy_{k+n}}{dt} &= \varepsilon\left[(\alpha + i\delta n^2 + d_0 r_n^2)y_{k+n} - (\gamma + i\delta)(k+n)^2 y_{k+n} + \right.\\ &\left.+ (d_0 + ic_0)r_n^2(y_{k+n} + v_{k-n})\right].\end{aligned} \tag{14}$$

Аналогічно, підставляючи (13) у спряжене до (12) рівняння, одержуємо

$$\begin{aligned}\frac{dv_{k-n}}{dt} &= \varepsilon\left[(\alpha - i\delta n^2 + d_0 r_n^2)v_{k-n} - (\gamma - i\delta)(k-n)^2 v_{k-n} + \right.\\ &\left.+ (d_0 - ic_0)r_n^2(v_{k-n} + y_{k+n})\right].\end{aligned} \tag{15}$$

Стійкість хвильових розв'язків задачі (1), (2) визначається стійкістю системи (14), (15) з параметром $k \in \mathbb{Z}$. У системі (14), (15) виконаємо заміну $y_{k+n} = z_{k+n}\exp(2i\varepsilon\delta kn)$, $v_{k-n} = w_{k-n}\exp(2i\varepsilon\delta kn)$. Тоді отримаємо лінійну систему з матрицею

$$\varepsilon A = \begin{pmatrix} \varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} \\ \varepsilon a_{21} & \varepsilon a_{22} \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\alpha - \gamma n^2 = -d_0 r_n^2$, то матриця A має нульове власне значення при $k = 0$. Оскільки сума діагональних елементів матриці A є від'ємною, $a = a_{11} + a_{22} < 0$, то для орбітальної експоненціальної стійкості хвильового розв'язку $u_n(t, x)$ необхідно і достатньо, щоб при $k \neq 0$ виконувалась умова $a^2 c > f^2$, де $c = \mathrm{Re}\,(\det(A))$, $f = \mathrm{Im}\,(\det(A))$, $f = 4\gamma kn(c_0 r_n^2 - \delta k^2)$, тобто

$$\left(d_0 r_n^2 - \gamma k^2\right)^2\left(\gamma^2 k^2 + \delta^2 k^2 - 2\gamma d_0 r_n^2 - 4\gamma^2 n^2 - 2\delta c_0 r_n^2\right) > 4\gamma^2 n^2\left(c_0 r_n^2 - \delta k^2\right)^2, \tag{16}$$

де $r_n^2 = (\gamma n^2 - \alpha)/d_0$.

Теорема 2. *Біжучі хвилі $u_n(t,x)$ задачі (1), (2) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (16) при всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.*

Як приклад розглянемо рівняння (1), в якому $D = \operatorname{diag}(d,d)$, $d > 0$, $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_1 = E$, E — одинична матриця, $F(u, u(t-\Delta,x)) = d_0(u_1^2 + u_2^2)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Тоді $\gamma = d$, $\delta = 0$, $\alpha = 1$, $c_0 = 0$, тому з теореми 1 випливає, що при $d_0 < 0$, $n^2 < \dfrac{1}{d}$ існує періодичний розв'язок $u_n = \sqrt{\varepsilon(1-dn^2)|d_0|^{-1}}\begin{pmatrix} \cos(t+nx) \\ -\sin(t+nx) \end{pmatrix}$. Згідно з теоремою 2 біжучі хвилі $u_n(t,x)$ експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли $n^2 < \dfrac{1}{6d}(d+2)$.

Зауваження 1. Умови існування та стійкості періодичних розв'язків задачі (1), (2) можна отримати із рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega_0 u + \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta)u\right] + (d_0 + ic_0)u^2\overline{u},$$

яке одержується за допомогою усереднення.

3. Періодичні режими рівняння спінового горіння із запізненням. Розглянемо задачу

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \xi = 2\varepsilon\left[\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{\varrho^2}\,\frac{\partial^3 \xi}{\partial t \partial x^2} + F\left(\xi,\, \frac{\partial \xi}{\partial t},\, \xi(t-\Delta,x),\, \frac{\partial \xi}{\partial t}(t-\Delta,x)\right)\right], \tag{17}$$

$$\xi(t, x+2\pi) = \xi(t,x), \tag{18}$$

де ε — малий додатний параметр, $\Delta > 0$, $\varrho > 0$, причому F — однорідний многочлен третього степеня, тобто $F(a\xi, ap, a\eta, a\zeta) = a^3 F(\xi, p, \eta, \zeta)$, $a \in \mathbb{R}$.

Задача (17), (18) еквівалентна системі

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = p, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \xi = 2\varepsilon\left[p + \frac{1}{\varrho^2}\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + F(\xi, p, \xi_\Delta, p_\Delta)\right], \tag{19}$$

$$\xi(t, x+2\pi) = \xi(t,x), \quad p(t, x+2\pi) = p(t,x),$$

де $\xi_\Delta = \xi(t-\Delta, x)$, $p_\Delta = p(t-\Delta, x)$.

Розв'язок системи (19) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $\xi = \theta_1(y)$, $p = \theta_2(y)$, $y = \sigma t + x$, де функції $\theta_1(y)$, $\theta_2(y)$ мають період 2π. Тоді одержимо систему

$$\sigma\,\frac{d\theta_1}{dy} = \theta_2, \quad \sigma\,\frac{d\theta_2}{dy} + \theta_1 = 2\varepsilon\left[\theta_2 + \frac{1}{\varrho^2}\,\frac{d^2\theta_2}{dy^2} + F(\theta_1, \theta_2, \theta_1(y-\sigma\Delta), \theta_2(y-\sigma\Delta))\right].$$

Цю систему заміною $\dfrac{d\theta_2}{dy} = \theta_3$ зведемо до вигляду

$$\begin{gathered}\sigma\,\frac{d\theta_1}{dy} = \theta_2, \quad \frac{d\theta_2}{dy} = \theta_3, \\ \sigma\theta_3 + \theta_1 = 2\varepsilon\left[\theta_2 + \frac{1}{\varrho^2}\,\frac{d\theta_3}{dy} + F(\theta_1, \theta_2, \theta_1(y-\sigma\Delta), \theta_2(y-\sigma\Delta))\right].\end{gathered} \tag{20}$$

Інтегральний многовид системи (20) можна зобразити у вигляді

$$\theta_3 = -\frac{1}{\sigma}\,\theta_1 + \frac{2\varepsilon}{\sigma}\,\left[\theta_2 - \frac{1}{\sigma^2\varrho^2}\,\theta_2 + F(\theta_1,\theta_2,\theta_1(y-\sigma\Delta),\theta_2(y-\sigma\Delta))\right] + O(\varepsilon^2).$$

Система рівнянь на цьому многовиді набере вигляду

$$\sigma\,\frac{d\theta_1}{dy} = \theta_2,$$
$$\frac{d\theta_2}{dy} = -\frac{1}{\sigma}\,\theta_1 + \frac{2\varepsilon}{\sigma}\,\left[\theta_2 - \frac{1}{\sigma^2\varrho^2}\,\theta_2 + F(\theta_1,\theta_2,\theta_1(y-\sigma\Delta),\theta_2(y-\sigma\Delta))\right] + O(\varepsilon^2). \tag{21}$$

Перейшовши до комплексних змінних $u = \theta_1 + i\theta_2$, $\bar{u} = \theta_1 - i\theta_2$, одержимо рівняння

$$\frac{du}{dy} = -\frac{i}{\sigma}\,u + \frac{\varepsilon}{\sigma}\,\left[u - \bar{u} - \frac{1}{\sigma^2\varrho^2}(u-\bar{u}) + 2iF_1(u,\bar{u},u(y-\sigma\Delta),\bar{u}(y-\sigma\Delta))\right] + O(\varepsilon^2), \tag{22}$$

де

$$F_1(u,\bar{u},u(y-\sigma\Delta),\bar{u}(y-\sigma\Delta)) = F\left(\frac{1}{2}\,(u+\bar{u}), \frac{i}{2}\,(\bar{u}-u), \frac{1}{2}\,(u(y-\sigma\Delta)+\right.$$
$$\left.+\bar{u}(y-\sigma\Delta)), \frac{i}{2}\,(\bar{u}(y-\sigma\Delta) - u(y-\sigma\Delta))\right).$$

Виконуючи у рівнянні (22) заміну $u = w\exp\left(-\frac{i}{\sigma}\,y\right)$, одержуємо рівняння

$$\frac{dw}{dy} = \frac{\varepsilon}{\sigma}\left[\left(1 - \frac{1}{\sigma^2\varrho^2}\right)\left(w - \bar{w}\exp\left(2\,\frac{i}{\sigma}\,y\right)\right) + 2i\exp\left(-\frac{i}{\sigma}\,y\right)\times\right.$$
$$\times F_1\left(w\exp\left(-\frac{i}{\sigma}\,y\right), \bar{w}\exp\left(\frac{i}{\sigma}\,y\right), w(y-\sigma\Delta)\times\right.$$
$$\left.\left.\times\exp\left(-\frac{i}{\sigma}\,(y-\sigma\Delta)\right), \bar{w}(y-\sigma\Delta)\exp\left(\frac{i}{\sigma}\,(y-\sigma\Delta)\right)\right)\right] + O(\varepsilon^2).$$

Виконавши усереднення в цьому рівнянні відносно y [9, 10], отримаємо рівняння

$$\frac{dw}{dy} = \frac{\varepsilon}{\sigma}\,\left[w - \frac{1}{\sigma^2\,\varrho^2}\,w + (d_0 + ic_0)w^2\bar{w}\right]. \tag{23}$$

Перейшовши у рівнянні (23) до полярних координат $w = r\exp(i\varphi)$, одержимо рівняння

$$\frac{dr}{dy} = \frac{\varepsilon}{\sigma}\,\left[r - \frac{1}{\sigma^2\,\varrho^2}\,r + d_0 r^3\right].$$

Нехай $d_0 < 0$ і виконується нерівність $\sigma^2\varrho^2 > 1$. Тоді рівняння (23) має стаціонарний розв'язок

$$R_0 = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\sigma^2\varrho^2}\right)|d_0|^{-1}}.$$

Отже, періодичний розв'язок рівняння (22) має вигляд $u = R_0 \exp\left(-\frac{i}{\sigma}\, y\right) + O(\varepsilon)$. Звідси знаходимо періодичний розв'язок $\theta_1 = R_0 \cos\left(\frac{y}{\sigma}\right) + O(\varepsilon)$, $\theta_2 = -R_0 \sin\left(\frac{y}{\sigma}\right) + O(\varepsilon)$ системи (21). Враховуючи, що функції θ_1 та θ_2 мають період 2π, одержуємо $\sigma = \frac{1}{n} + O(\varepsilon)$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$.

Отже, періодичний розв'язок рівняння (17) має вигляд

$$\xi_n = r_n \cos(t + nx) + O(\varepsilon), \quad r_n = \sqrt{\left(1 - \frac{n^2}{\varrho^2}\right)|d_0|^{-1}}, \tag{24}$$

де $n \in \mathbb{Z}$. Тому справджується таке твердження.

Теорема 3. *Нехай $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $n^2 < \varrho^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (17), (18) має періодичні відносно t розв'язки (24), де $n \in \mathbb{Z}$.*

4. Стійкість періодичних режимів рівняння спінового горіння із запізненням. Система рівнянь у варіаціях в околі розв'язку $\xi = \xi_n(t,x)$, $p = \frac{\partial \xi_n(t,x)}{\partial t}$ системи (19) має вигляд

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = v_2,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 = 2\varepsilon\left[v_2 + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + B_1(t)v_1 + B_2(t)v_2 + B_3(t)v_1(t-\Delta,x) + B_4(t)v_2(t-\Delta,x)\right].$$

Перейшовши до комплексних змінних $v = v_1 + iv_2$, одержимо рівняння

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -iv + \varepsilon\left[v - \bar v + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 (v - \bar v)}{\partial x^2} + C_1(t)v + C_2(t)\bar v + C_3(t)v_\Delta + C_4(t)\bar v_\Delta\right],$$

де $v_\Delta = v(t-\Delta,x)$, $\bar v_\Delta = \bar v(t-\Delta,x)$. Виконавши заміну $v = w\exp(-it)$ і усереднивши одержане рівняння відносно t, отримаємо рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon\left[w + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (d_0 + ic_0)(2r_n^2 w + u_n^2 \bar w)\right], \tag{25}$$

де $u_n = r_n \exp(i(\omega_n(\varepsilon)t + nx))$, $\omega_n(\varepsilon) = \varepsilon c_0 r_n^2$. Заміною $w = u\exp(i\omega_n(\varepsilon)t)$ рівняння (25) зведемо до вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon\left[u + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (d_0 + ic_0)(r_n^2 u + r_n^2 \bar u \exp(2inx)) + d_0 r_n^2 u\right]. \tag{26}$$

Розв'язок рівняння (26) будемо шукати у вигляді ряду Фур'є в комплексній формі

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t)\exp(ikx), \quad \overline{u}(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(t)\exp(ikx). \tag{27}$$

Підставляючи (27) в (26) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(ikx)$, одержуємо рівняння відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\frac{dy_{k+n}}{dt} = \varepsilon\left[(1+d_0r_n^2)y_{k+n} - \frac{(k+n)^2}{\varrho^2}y_{k+n} + (d_0+ic_0)r_n^2(y_{k+n}+v_{k-n})\right]. \tag{28}$$

Аналогічно, підставляючи (27) у спряжене до (26) рівняння, отримуємо

$$\frac{dv_{k-n}}{dt} = \varepsilon\left[(1+d_0r_n^2)v_{k-n} - \frac{(k-n)^2}{\varrho^2}v_{k-n} + (d_0-ic_0)r_n^2(v_{k-n}+y_{k+n})\right]. \tag{29}$$

Стійкість періодичних розв'язків рівняння спінового горіння визначається стійкістю системи (28), (29) з параметром $k \in \mathbb{Z}$. Позначимо через εA матрицю системи (28), (29) з елементами εa_{11}, εa_{12}, εa_{21}, εa_{22}. Матриця A має нульове власне значення при $k = 0$. Оскільки сума діагональних елеменетів матриці A є від'ємною, $a = a_{11} + a_{22} < 0$, то для орбітальної експоненціальної стійкості періодичного розв'язку $\xi_n(t,x)$ необхідно і достатньо, щоб при $k \neq 0$ виконувалась умова $a^2c > f^2$, де $c = \mathrm{Re}\,(\det(A))$, $f = \mathrm{Im}\,(\det(A))$, $f = \dfrac{4c_0nk}{|d_0|\varrho^2}\left(1-\dfrac{n^2}{\varrho^2}\right)$, тобто

$$\left(\frac{k^2}{\varrho^2}+1-\frac{n^2}{\varrho^2}\right)^2\left(\frac{k^2}{\varrho^2}+2-\frac{6n^2}{\varrho^2}\right) > \frac{4c_0^2n^2}{\varrho^2d_0^2}\left(1-\frac{n^2}{\varrho^2}\right)^2. \tag{30}$$

Теорема 4. *Біжучі хвилі $\xi_n(t,x)$ задачі (17), (18) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (30) при всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.*

Як приклад розглянемо рівняння (17) з нелінійністю $F = -\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial t}\right)^3$. Тоді $d_0 = -1$, $c_0 = 0$, тому з теореми 3 випливає, що при $n^2 < \varrho^2$ існує періодичний розв'язок $\xi_n = \sqrt{1-\dfrac{n^2}{\varrho^2}}\cos(t+nx) + O(\varepsilon)$. Згідно з теоремою 4 біжучі хвилі $\xi_n(t,x)$ експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли $n^2 < \dfrac{1}{6}\,(2\varrho^2+1)$.

Література

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.
2. *Клевчук И. И.* О принципе сведения для дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения. — 1999. — **35**, № 4. — С. 464 – 472.
3. *Клевчук І. І.* Гомоклінічні точки для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 4. — С. 563 – 567.
4. *Клевчук И. И.* Бифуркация положения равновесия в системе нелинейных параболических уравнений с преобразованным аргументом // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 10. — С. 1342 – 1351.

5. *Клевчук І. І.* Існування зліченного числа циклів у гіперболічних системах диференціальних рівнянь з перетвореним аргументом // Нелінійні коливання. — 2015. — **18**, № 1. — С. 71 – 78.

6. *Васильева А. Б., Кащенко С. А., Колесов Ю. С., Розов Н. Х.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // Мат. сб. — 1986. — **130**, № 4. — С. 488 – 499.

7. *Белан Е. П., Самойленко А. М.* Динамика периодических режимов феноменологического уравнения спинового горения // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 1. — С. 21 – 43.

8. *Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — М.: Физматлит, 2005. — 430 с.

9. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 502 с.

10. *Hale J. K.* Averaging methods for differential equations with retarded arguments and a small parameter // J. Different. Equat. — 1966. — **2**, № 1. — P. 57 – 73.

Одержано 10.06.15