УДК 517.9

АВТОНОМНАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ*

С. М. Чуйко

Донбас. гос. пед. ун-т
ул. Генерала Батюка, 19, Славянск Донецкой обл., 84116, Украина

Ан. А. Бойчук

Ин-т электросварки им. Е. О. Патона НАН Украины
ул. Боженко, 11, Киев, 03680, Украина

We find constructive solvability conditions and an algorithm for constructing solutions to an autonomous periodic boundary-value problem for a matrix differential equation.

Знайдено конструктивні умови розв'язності і схему побудови розв'язків нелінійної автономної періодичної крайової задачі для матричного диференціального рівняння.

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о построении решений [1]

$$Z(t,\varepsilon)\colon Z(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1[0;T_1(\varepsilon)],\quad Z(t,\cdot)\in\mathbb{C}[0;\varepsilon_0],\quad Z(t,\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

матричного дифференциального уравнения

$$Z'(t,\varepsilon)=AZ(t,\varepsilon)+Z(t,\varepsilon)B+F+\varepsilon\Phi(Z(t,\varepsilon),\varepsilon), \tag{1}$$

подчиненных краевому условию

$$\mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon):=Z(0,\varepsilon)-Z(T_1(\varepsilon),\varepsilon)=0\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}. \tag{2}$$

Решение матричной краевой задачи (1), (2) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$Z_0'(t)=AZ_0(t)+Z_0(t)B+F,\quad \mathcal{L}Z_0(\cdot):=Z_0(0)-Z_0(T)=0. \tag{3}$$

Здесь $A\in\mathbb{R}^{\alpha\times\alpha}$ и $B\in\mathbb{R}^{\beta\times\beta}$ — постоянные матрицы. Матрица $\Phi(Z(t,\varepsilon),\varepsilon)$ представляет собой нелинейный оператор $\Phi(Z(t,\varepsilon),\varepsilon)\colon\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}\to\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, дифференцируемый в смысле Фреше [2, с. 636] по первому аргументу в малой окрестности решения порождающей задачи (3) и непрерывный по второму аргументу в малой положительной окрестности нуля: $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$. Вообще говоря, предполагаем $\alpha\neq\beta$. Условия разрешимости и структура решения линейной дифференциальной системы (3) приведены в монографии [3]. Конструктивные условия разрешимости и структура периодического решения линейной

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0115U003182).

дифференциальной системы (3) при условии $\alpha = \beta$ получены в статье [1] с использованием обобщенного обращения матриц и операторов, описанного в статье [4].

Таким образом, задача о построении решений нелинейной автономной периодической краевой задачи (1), (2) является обобщением периодической задачи для матричного уравнения Риккати [1], нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [5], а также задачи Коши для матричного уравнения Бернулли [6]. Как известно [3, с. 211], общее решение

$$W(t, \Theta) := U(t) \cdot \Theta \cdot V(t)$$

задачи Коши

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B, \quad Z(0) = \Theta \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta},$$

определяют $U(t)$ и $V(t)$ — нормальные фундаментальные матрицы:

$$U'(t) = AU(t), \quad U(0) = I_\alpha, \quad V'(t) = BV(t), \quad V(0) = I_\beta.$$

Общее решение $Z(t) \in \mathbb{C}^1[0, T]$ задачи Коши [1]

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F(t), \quad Z(0) = \Theta,$$

имеет вид

$$Z(t, \Theta) = W(t, \Theta) + K\Big[F(s)\Big](t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta},$$

где

$$K\Big[F(s)\Big](t) := \int\limits_0^t U(t)U^{-1}(s)F(s)V(t)V^{-1}(s)\, ds$$

— оператор Грина матричной задачи Коши. Подставляя общее решение задачи Коши $Z(0) = \Theta$ для матричного дифференциального уравнения (3)

$$Z_0(t, \Theta) = W(t, \Theta) + K\Big[F\Big](t)$$

в краевое условие (3), приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\mathcal{L}Z_0(\cdot, \Theta) = -\mathcal{L}K\Big[F\Big](\cdot) \tag{4}$$

относительно матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$.

Пусть $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$, $j = 1, 2, \ldots, \alpha \cdot \beta$, — базис пространства $\mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ и c_j, $j = 1, 2, \ldots, \alpha \cdot \beta$, — константы, определяющие разложение матрицы

$$\Theta = \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \Xi^{(j)} c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha \cdot \beta,$$

по векторам $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, при этом

$$\mathcal{L}W(\cdot,\Theta) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta}\mathcal{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot)c_j.$$

Таким образом, приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta}\mathcal{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot)c_j = -\mathcal{L}K\Big[F\Big](\cdot)$$

относительно $\alpha\cdot\beta$ констант $c_j \in \mathbb{R}^1$, $j = 1,2,\ldots,\alpha\cdot\beta$. Определим оператор

$$\mathcal{M}[\mathcal{B}]\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n},$$

как оператор, который матрице $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ставит в соответствие вектор-столбец $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы $\mathcal{B}$, а также обратный оператор

$$\mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{M}[\mathcal{B}]\Big\}\colon \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

который вектору-столбцу $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ ставит в соответствие матрицу $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Итак, приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\mathcal{Q}c = -\mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}K\Big[F\Big](\cdot)\Big\} \tag{5}$$

относительно вектора $c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$, равносильному уравнению (4). Здесь

$$\mathcal{Q} := \Big[\mathcal{M}\Big[\mathcal{Q}^{(1)}\Big]\ \mathcal{M}\Big[\mathcal{Q}^{(2)}\Big]\ \ldots\ \mathcal{M}\Big[\mathcal{Q}^{(\alpha\cdot\beta)}\Big]\Big],$$

$$\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta},\quad \mathcal{Q}^{(j)} := \mathcal{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},\quad j = 1,2,\ldots,\alpha\cdot\beta.$$

Уравнение (5) разрешимо тогда и только тогда, когда [7, 8]

$$P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}K\Big[F\Big](\cdot)\Big\} = 0, \tag{6}$$

где $P_{\mathcal{Q}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$; матрица $P_{\mathcal{Q}_r^*}$ составлена из r линейно независимых строк ортопроектора $P_{\mathcal{Q}^*}$. При условии (6), и только при нем, общее решение уравнения (5)

$$c = P_{\mathcal{Q}_r}c_r - \mathcal{Q}^+\mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}K\Big[F\Big](\cdot)\Big\},\quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

определяет общее решение матричного уравнения (4)

$$\Theta = \mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{Q}^+\mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}K\Big[F\Big](\cdot)\Big\}\Big\} + \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r}c_r\Big],$$

которое, в свою очередь, определяет общее решение порождающей задачи (3)

$$Z_0(t,\Theta_r) = W(t,\Theta_r) + G\Big[F\Big](t), \quad \Theta_r := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r} c_r\Big].$$

Здесь $P_{\mathcal{Q}}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q})$, матрица $P_{\mathcal{Q}_r} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times r}$ составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$,

$$G\Big[F\Big](t) := W\Big\{t, \mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{Q}^+\mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}K\Big[F\Big](\cdot)\Big\}\Big\}\Big\} + K\Big[F\Big](t)$$

— обобщенный оператор Грина линейной периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения (3). Кроме того,

$$W(t,\Theta_r) := \sum_{k=1}^{r} U(t)\cdot \Xi^{(j_k)} V(t)\cdot c_{j_k}, \quad \Theta_r \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

— общее решение однородной части матричной краевой задачи (3).

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 1. *При условии (6), и только при нем, общее решение линейной периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения (3)*

$$Z_0(t,\Theta_r) = W(t,\Theta_r) + G\Big[F\Big](t), \quad \Theta_r := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r} c_r\Big], \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

определяет обобщенный оператор Грина линейной периодической матричной краевой задачи (3).

Лемма 1 является обобщением соответствующих утверждений [1] на случай матричной периодической краевой задачи (3). С другой стороны, лемма 1 является частным случаем соответствующего утверждения [10].

2. Необходимое условие существования решения. Решение матричного дифференциального уравнения (1) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи (3)

$$Z(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_r) + X(t,\varepsilon).$$

Таким образом, приходим к задаче о построении решений

$$X(\cdot,\varepsilon) \in C^1[0;T_1(\varepsilon)], \quad X(t,\cdot) \in C[0;\varepsilon_0], \quad X(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

следующей периодической задачи для матричного дифференциального уравнения

$$X'(t,\varepsilon) = AX(t,\varepsilon) + X(t,\varepsilon)B + \varepsilon\Phi(Z_0(t,\Theta_r) + X(t,\varepsilon),\varepsilon), \quad \mathcal{L}X(\cdot,\varepsilon) = 0. \tag{7}$$

Как известно [9], автономная задача (1), (2) существенно отличается от аналогичных неавтономных периодических задач. В отличие от последних правый конец $T_1(\varepsilon)$ промежутка $[0, T_1(\varepsilon)]$, на котором ищем решение задачи (1), (2), неизвестен и подлежит определению в процессе построения самого решения. Воспользуемся приемом, который впервые применил М. В. Остроградский и впоследствии развил А. М. Ляпунов [9, 13], заключающимся в представлении неизвестной функции

$$T_1(\varepsilon) = T\Big(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)$$

через новую неизвестную $\beta(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0]$. Сущность приема А. М. Ляпунова заключается в замене независимой переменной

$$t = \tau\Big(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\Big) \tag{8}$$

и нахождении решения задачи (1), (2) и функции $\beta(\varepsilon)$ в виде рядов по степеням малого параметра. Величина $\beta(\varepsilon), \beta(0) := \beta^*$, подлежит определению в процессе нахождения решения задачи (1), (2). Замена (8) приводит задачу (1), (2) к виду

$$X'(\tau,\varepsilon) = AX(\tau,\varepsilon) + X(\tau,\varepsilon)B + \varepsilon\Bigg\{\beta(\varepsilon)\Bigg\{A\Big[Z_0(\tau,\Theta_r) + X(\tau,\varepsilon)\Big] +$$

$$+ \Big[Z_0(\tau,\Theta_r) + X(\tau,\varepsilon)\Big]B\Bigg\} + \Big(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)\Phi(Z_0(\tau,\Theta_r) + X(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg\}, \tag{9}$$

$$\mathcal{L}X(\cdot,\varepsilon) := X(0,\varepsilon) - X(T,\varepsilon) = 0.$$

Согласно лемме 1, матричная краевая задача (9) разрешима тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_r^*}\mathcal{M}\Bigg\{\mathcal{L}K\Bigg\{\mathcal{F}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r) + X(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon)\Big]\Bigg\}(\cdot)\Bigg\} = 0. \tag{10}$$

Здесь

$$\mathcal{F}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r) + X(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon)\Big] := \beta(\varepsilon)\Bigg\{A\Big[Z_0(\tau,\Theta_r) + X(\tau,\varepsilon)\Big] + \Big[Z_0(\tau,\Theta_r) + X(\tau,\varepsilon)\Big]B\Bigg\} +$$

$$+ \Big(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)\Big)\Phi(Z_0(\tau,\Theta_r) + X(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg\}.$$

Заметим, что исследование вопроса о разрешимости матричной краевой задачи (9) существенно только в критическом ($P_{Q^*} \neq 0$) случае, поскольку в некритическом ($P_{Q^*} = 0$) случае условие (10) выполняется тождественно. Учитывая непрерывность нелинейной матричной функции $\Phi(X(t,\varepsilon),\varepsilon)$ по ε в малой положительной окрестности нуля, переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$ в равенстве (9) и получаем необходимое условие

$$P_{Q_r^*}\mathcal{M}\Bigg\{\mathcal{L}K\Bigg\{\beta^*\Big[AZ_0(\tau,\Theta_r^*) + Z_0(\tau,\Theta_r^*)B\Big] + \Phi(Z_0(\tau,\Theta_r^*),0)\Bigg\}(\cdot)\Bigg\} = 0$$

существования решения исходной задачи (1), (2). Обозначая

$$\mathcal{F}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r^*), \beta^*\Big] := \beta^*\Big[AZ_0(\tau,\Theta_r^*) + Z_0(\tau,\Theta_r^*)B\Big] + \Phi(Z_0(\tau,\Theta_r^*),0),$$

приходим к следующему утверждению.

Лемма 2. *Пусть краевая задача (1), (2) представляет критический случай* ($P_{Q^*} \neq 0$) *и имеет решение*

$$Z(t,\varepsilon)\colon Z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[0;T_1(\varepsilon)], \quad Z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0;\varepsilon_0], \quad Z(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

при $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $Z(t,0) = Z_0(t,\Theta_r^*)$,

$$Z_0(t,\Theta_r) = W(t,\Theta_r^*) + G\Big[F\Big](t), \quad \Theta_r^* := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r} c_r^*\Big], \quad c_r^* \in \mathbb{R}^r.$$

Тогда матрица $\Theta_r^* \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ *удовлетворяет уравнению*

$$P_{Q_r^*}\mathcal{M}\Bigg\{\mathcal{L}K\Bigg\{\mathcal{F}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r^*),\beta^*\Big]\Bigg\}(\cdot)\Bigg\} = 0. \tag{11}$$

Матрица $\Theta_r^* \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ определяет порождающее решение $Z_0(t,\Theta_r^*)$, в малой окрестности которого может существовать искомое решение исходной задачи. Кроме того, из уравнения (11) может быть найдена величина $\beta^* \in \mathbb{R}^1$, определяющая первое приближение $T_{1_1}(\varepsilon) = T(1+\varepsilon\beta^*)$ к периоду искомого решения. Если же уравнение (11) не имеет действительных корней, то исходная задача (1), (2) не имеет искомых решений, поэтому уравнение (11) далее будем называть уравнением для порождающих амплитуд краевой задачи (1), (2).

Предположим, что уравнение для порождающих амплитуд (11) имеет действительные корни. Фиксируя одно из решений $\Theta_r^* \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, $\beta^* \in \mathbb{R}^1$, уравнения (11), приходим к задаче об отыскании решения $X(t,\varepsilon)$ матричной краевой задачи (9) в малой окрестности решения порождающей задачи (3)

$$Z_0(t,\Theta_r^*) = W(t,\Theta_r^*) + G\Big[F\Big](t), \quad \Theta_r^* := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r} c_r^*\Big],$$

а также функции

$$\beta(\varepsilon) := \beta^* + \zeta(\varepsilon), \quad \zeta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0;\varepsilon_0],$$

в малой окрестности точки β^*. В малой окрестности точек $Z_0(\tau,\Theta_r^*)$ и β^* имеет место разложение [2]

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r^*) + X(\tau,\varepsilon),\beta^*+\zeta(\varepsilon)\Big] &= \mathcal{F}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r^*),\beta^*\Big] + \\ &+ \mathcal{D}_x\mathcal{F}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r^*),\beta^*,X(\tau,\varepsilon)\Big] + \mathcal{D}_\zeta\mathcal{F}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r^*),\beta^*\Big]\zeta(\varepsilon) + \\ &+ \mathcal{R}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r^*) + X(\tau,\varepsilon),\beta^*+\zeta(\varepsilon)\Big].\end{aligned} \tag{12}$$

Дифференциалы

$$\mathcal{D}_x\mathcal{F}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r^*),\beta^*,X(\tau,\varepsilon)\Big], \mathcal{D}_\zeta\mathcal{F}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r^*),\beta^*\Big]\zeta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

линейны по $X(t,\varepsilon)$ и $\zeta(\varepsilon)$, а остаток $\mathcal{R}[Z_0(\tau,\Theta_r^*)+X(\tau,\varepsilon),\beta^*+\zeta(\varepsilon)]$ имеет более высокий порядок малости по $X(t,\varepsilon)$ и $\zeta(\varepsilon)$, чем три первых члена разложения, поэтому

$$\mathcal{R}[Z_0(\tau,\Theta_r^*)+X(\tau,\varepsilon),\beta^*+\zeta(\varepsilon)]\Big|_{\substack{X(\tau,\varepsilon)\,=\,0\\ \zeta(\varepsilon)\,=\,0}} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{R}[Z_0(\tau,\Theta_r^*)+X(\tau,\varepsilon),\beta^*+\zeta(\varepsilon)]}{\partial\varepsilon}\Bigg|_{\substack{\varepsilon\,=\,0\\ \zeta(\varepsilon)\,=\,0}} \equiv 0,$$

кроме того, для $i=1,2,\ldots,\alpha,\ j=1,2,\ldots,\beta$ имеют место тождества

$$\frac{\partial\mathcal{R}[Z_0(\tau,\Theta_r^*)+X(\tau,\varepsilon),\beta^*+\zeta(\varepsilon)]}{\partial x_{i,j}(\tau,\varepsilon)}\Bigg|_{\substack{\varepsilon\,=\,0\\ \zeta(\varepsilon)\,=\,0}} \equiv 0, \quad X(\tau,\varepsilon):=(x_{i,j}(\tau,\varepsilon)).$$

Решение матричной краевой задачи (9) ищем в виде

$$X(\tau,\varepsilon)=W(\tau,\Theta_r(\varepsilon))+X^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad \Theta_r(\varepsilon)\in\mathbb{C}[0;\varepsilon_0],$$

где

$$X^{(1)}(\tau,\varepsilon)=G\Big\{\mathcal{F}\Big[Z_0(s,\Theta_r^*)+X(s,\varepsilon),\beta(\varepsilon)\Big]\Big\}(\tau).$$

С учетом разложения (12) и равенства (11) условие разрешимости (10) приводится к уравнению

$$P_{\mathcal{Q}_r^*}\mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}K\Big\{\mathcal{D}_x\mathcal{F}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r^*),\beta^*,W(\tau,\Theta_r(\varepsilon))\Big]+$$
$$+\mathcal{D}_\zeta\mathcal{F}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r^*),\beta^*\Big]\zeta(\varepsilon)+\mathcal{D}_x\mathcal{F}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r),\beta^*,X^{(1)}(\tau,\varepsilon)\Big]+$$
$$+\mathcal{R}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r^*)+X(\tau,\varepsilon),\beta^*+\zeta(\varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot)\Big\}=0$$

относительно матрицы $\Theta_r(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ и скалярной функции $\zeta(\varepsilon)\in\mathbb{C}[0;\varepsilon_0]$. Полагая

$$\Theta_r(\varepsilon)=\sum_{j=1}^{r}\Xi^{(j)}c_j(\varepsilon), \quad c_j(\varepsilon)\in\mathbb{R}^1, \quad j=1,2,\ldots,r,$$

приводим условие разрешимости (10) к уравнению

$$\mathcal{B}_0\begin{bmatrix} c_r(\varepsilon)\\ \zeta(\varepsilon)\end{bmatrix}=-P_{\mathcal{Q}_r^*}\mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}K\Big\{\mathcal{D}_x\mathcal{F}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r^*),\beta^*,X^{(1)}(\tau,\varepsilon)\Big]+$$
$$+\mathcal{R}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r^*)+X(\tau,\varepsilon),\beta^*+\zeta(\varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot)\Big\}. \qquad (13)$$

Здесь

$$\mathcal{B}_0 := \Big[\mathcal{B}_0^{(1)}\ \mathcal{B}_0^{(2)}\ \ldots\ \mathcal{B}_0^{(r+1)}\Big] \in \mathbb{R}^{d\times(r+1)}$$

— постоянная матрица,

$$\mathcal{B}_0^{(j)} := P_{\mathcal{Q}_r^*}\mathcal{M}\Bigg\{\mathcal{L}K\Bigg\{\mathcal{D}_x\mathcal{F}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r^*),\beta^*,U(\tau)\Xi^{(j)}V(\tau)\Bigg\}(\cdot)\Bigg\}, \quad j = 1,2,\ldots,r,$$

$$\mathcal{B}_0^{(r+1)} := P_{\mathcal{Q}_r^*}\mathcal{M}\Bigg\{\mathcal{L}K\Bigg\{\mathcal{D}_\zeta\mathcal{F}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r^*),\beta^*\Big]\Bigg\}(\cdot)\Bigg\},$$

$c_j(\varepsilon)$, $j = 1,2,\ldots,r$, — функции, определяющие разложение матрицы $\Theta_r(\varepsilon)$. Уравнение (13), в частности, разрешимо при условии $P_{\mathcal{B}_0^*}P_{\mathcal{Q}_r^*} = 0$; при этом задача (9) имеет по меньшей мере одно решение

$$X(\tau,\varepsilon) = W(\tau,\Theta_r(\varepsilon)) + X^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad \Theta_r(\varepsilon) := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r}c_r(\varepsilon)\Big],$$

$$\begin{bmatrix} c_r(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{bmatrix} = -\mathcal{B}_0^+P_{\mathcal{Q}_r^*}\mathcal{M}\Bigg\{\mathcal{L}K\Bigg\{\mathcal{D}_x\mathcal{F}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r^*),\beta^*,X^{(1)}(\tau,\varepsilon)\Big]+$$

$$+\mathcal{R}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r^*)+X(\tau,\varepsilon),\beta^*+\zeta(\varepsilon)\Big]\Bigg\}(\cdot)\Bigg\}, \tag{14}$$

$$X^{(1)}(\tau,\varepsilon) = G\Bigg\{\mathcal{F}\Big[Z_0(s,\Theta_r^*)+X(s,\varepsilon),\beta(\varepsilon)\Big]\Bigg\}(\tau),$$

при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $Z_0(\tau,\Theta_r^*)$. Здесь

$$P_{\mathcal{B}_0^*}\colon \mathbb{R}^{r+1} \to N(\mathcal{B}_0^*), \quad P_{\mathcal{B}_0^*} \in \mathbb{R}^{(r+1)\times(r+1)},$$

— матрица-ортопроектор.

Для нахождения приближенного решения операторной системы (14) применим метод последовательных приближений [2, с. 213]. Таким образом, доказано следующее утверждение, которое является обобщением соответствующего утверждения для традиционных автономных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в критическом случае [5, 9, 14, 15].

Теорема. *Если выполнено условие (6), то для любого корня $\Theta_r^* \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ уравнения (11) для порождающих амплитуд при условии $P_{\mathcal{B}_0^*}P_{\mathcal{Q}_d^*} = 0$ автономная нелинейная матричная краевая задача (1), (2) в малой окрестности порождающего решения*

$$Z_0(t,\Theta_r^*) = W(t,\Theta_r^*) + G\Big[F\Big](t), \quad \Theta_r^* := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r}c_r^*\Big],$$

и точки β^* имеет по меньшей мере одно решение

$$Z(t,\varepsilon)\colon\, Z(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1[0;T_1(\varepsilon)],\quad Z(t,\cdot)\in\mathbb{C}[0;\varepsilon_0],\quad Z(t,\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

определенное операторной системой (14). Для нахождения этого решения применима итерационная схема

$$Z_{k+1}(\tau,\varepsilon)=Z_0(\tau,\Theta_r^*)+X_{k+1}(\tau,\varepsilon),\quad \beta_{k+1}(\varepsilon):=\beta^*+\zeta_{k+1}(\varepsilon),$$

$$X_{k+1}(\tau,\varepsilon)=W(\tau,\Theta_{r_{k+1}}(\varepsilon))+X_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon),\quad \Theta_{r_{k+1}}(\varepsilon):=\mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r}c_{r_{k+1}}(\varepsilon)\Big],$$

$$\left[\begin{array}{c} c_{r_{k+1}}(\varepsilon)\\ \zeta_{k+1}(\varepsilon)\end{array}\right]=-\mathcal{B}_0^+P_{\mathcal{Q}_r^*}\mathcal{M}\Bigg\{\mathcal{L}K\Bigg\{\mathcal{D}_x\mathcal{F}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r^*),\beta^*,X_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon)\Big]+ \tag{15}$$

$$+\mathcal{R}\Big[Z_0(\tau,\Theta_r^*)+X_k(\tau,\varepsilon),\beta^*+\zeta_k(\varepsilon)\Big]\Bigg\}(\cdot)\Bigg\},$$

$$X_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon)=G\Bigg\{\mathcal{F}\Big[Z_0(s,\Theta_r^*)+X_k(s,\varepsilon),\beta_k(\varepsilon)\Big]\Bigg\}(\tau),\quad k=0,1,2,\ldots.$$

Доказанная теорема является обобщением соответствующего утверждения для традиционных нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в критическом случае [5, 14, 15] на случай матричных краевых задач. Длина отрезка $[0,\varepsilon^*]$, на котором применим метод простых итераций, может быть оценена как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [5], так и непосредственно из условия сжимаемости оператора, определяемого последней системой аналогично [11, 12].

Пример. Условия доказанной теоремы выполняются в случае периодической задачи для уравнения типа Ван-дер-Поля

$$Z'(t,\varepsilon)=AZ(t,\varepsilon)+Z(t,\varepsilon)B+\varepsilon\, Z(t,\varepsilon)Z(t,\varepsilon)^*Z(t,\varepsilon), \tag{16}$$

где

$$A:=\begin{pmatrix}1&-2\\1&-1\end{pmatrix},\quad B:=\begin{pmatrix}-2&-2\\4&2\end{pmatrix},$$

$$M_1:=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\quad M_2:=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad M_3:=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},$$

$$\Phi(Z(t,\varepsilon),\varepsilon):=[I_2-M_1\,Z(t,\varepsilon)\,M_2\,Z^*(t,\varepsilon)\,M_3\,Z(t,\varepsilon)]\,Z'(t,\varepsilon).$$

Общее решение задачи Коши для матричного дифференциального уравнения (16) имеет вид

$$W(t,\Theta)=U(t)\cdot\Theta\cdot V(t),\quad \Theta\in\mathbb{R}^{2\times 2},$$

где $U(t)$ и $V(t)$ — нормальные ($U(0) = I_2,\ V(0) = I_3$) фундаментальные матрицы:

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & -2\sin t \\ \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t & -\sin 2t \\ 2\sin 2t & \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\Xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \Xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \Xi^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— базис пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ и $c_j,\ j = 1, 2, \ldots, 4,$ — константы, определяющие разложение матрицы Θ по векторам $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Общее решение однородной задачи (16) определяет матрица $\mathcal{Q} = 0$ и ее ортопроекторы $P_{\mathcal{Q}} = P_{\mathcal{Q}^*} = I_4$.

Таким образом, в случае периодической задачи для матричного дифференциального уравнения (16) имеет место критический случай, при этом общее решение однородной части периодической задачи для матричного дифференциального уравнения (16) имеет вид

$$W(t, \Theta_r) = U(t) \cdot \Theta_r \cdot V(t), \quad \Theta_r \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Уравнение для порождающих амплитуд (11) в случае периодической задачи для матричного дифференциального уравнения типа Ван-дер-Поля (16) имеет действительные корни. Фиксируя одно из решений

$$c_r^{(1)} \approx \frac{117\,456\,087}{43\,872\,286}, \quad c_r^{(2)} \approx \frac{61\,761\,082}{69\,990\,629}, \quad c_r^{(3)} \approx \frac{29\,3228\,587}{163\,376\,009},$$

$$c_r^{(4)} \approx \frac{89\,334\,272}{66\,736\,409}, \quad \beta^* = -2$$

уравнения (11), находим матрицу

$$\mathcal{B}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1\,518\,185\,056}{30\,447\,535} & -\frac{261\,895\,840}{7\,881\,859} & -\frac{236\,046\,505}{23\,727\,274} & \frac{179\,585\,065}{15\,270\,752} & \frac{814\,023\,066}{47\,332\,085} \\ \frac{557\,981\,308}{16\,782\,153} & -\frac{226\,791\,231}{9\,170\,845} & \frac{115\,205\,213}{52\,013\,751} & \frac{549\,680\,757}{15\,668\,875} & \frac{584\,959\,598}{17\,290\,467} \\ -\frac{649\,014\,994}{55\,659\,291} & \frac{1\,197\,130\,990}{33\,737\,003} & \frac{375\,332\,885}{11\,795\,844} & -\frac{1\,933\,985\,510}{35\,332\,377} & -\frac{426\,136\,587}{25\,619\,621} \\ \frac{115\,362\,149}{39\,238\,603} & -\frac{348\,111\,044}{384\,282\,119} & \frac{183\,722\,367}{17\,116\,241} & \frac{309\,209\,416}{16\,762\,585} & \frac{407\,011\,533}{47\,332\,085} \end{pmatrix}.$$

Для найденного корня уравнения (11)

$$\Theta_r^* = \begin{pmatrix} c_r^{(1)} & c_r^{(3)} \\ c_r^{(2)} & c_r^{(4)} \end{pmatrix}$$

выполнено условие $P_{\mathcal{B}_0^*} P_{Q_r^*} = 0$, следовательно, периодическая задача для матричного дифференциального уравнения типа Ван-дер-Поля (16) имеет по меньшей мере одно решение.

Полученные в статье результаты исследования задачи о построении решений матричной автономной периодической краевой задачи (1), (2) могут быть аналогично [5, 15, 16] перенесены на матричные автономные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а также [10, 17] — на матричные автономные дифференциально-алгебраические краевые задачи. С другой стороны, полученные в статье результаты могут быть аналогично [18] перенесены на матричные краевые задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений, а также аналогично [19] использованы для нахождения условий существования ограниченных на всей оси решений матричных слабовозмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Литература

1. *Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* A critical periodic boundary value problem for a matrix Riccati equations // Different. Equat. — 2001. — **37**, № 4. — P. 464–471.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с.
3. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 367 с.
4. *Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukr. Math. J. — 1998. — **50**, № 8. — P. 1162–1169.
5. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — xiv + 317 p.
6. *Деревенский В. П.* Матричные уравнения Бернулли // Изв. вузов. Математика. — 2008. — № 2. — С. 14–23.
7. *Чуйко С. М.* О решении матричных уравнений Ляпунова // Вестн. Харьков. нац. ун-та им. В. Н. Каразина. Математика, прикл. математика и механика. — 2014. — № 1120. — С. 85–94.
8. *Чуйко С. М.* О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра // Чебышев. сб. — 2015. — **16**, вып. 1. — С. 52–66.
9. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.
10. *Chuiko S. M.* The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Sib. Math. J. — 2015. — **56**, № 4. — P. 752–760.
11. *Чуйко А. С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 2. — С. 278–288.
12. *Чуйко С. М.* Область сходимости итерационной процедуры для автономной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 3. — С. 416–432.
13. *Vejvoda O.* On perturbed nonlinear boundary-value problems // Czech. Math. J. — 1961. — № 11. — P. 323–364.
14. *Boichuk A., Chuiko S.* Autonomous weakly nonlinear boundary value problems in critical cases // Different. Equat. — 1992. — № 10. — P. 1353–1358.
15. *Chuiko S. M., Boichuk I. A.* An autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case // Nonlinear Oscillations. — 2009. — **12**, № 3. — P. 405–416.
16. *Chuiko S.* Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation // Miskolc Math. Notes. — 2016. — **17**, № 1. — P. 139–150.
17. *Chuiko S. M.* A generalized matrix differential-algebraic equation // J. Math. Sci. — 2015. — **210**, № 1. — P. 9–21.
18. *Samoilenko A. M., Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* Boundary value problems for systems of integro-differential equations with degenerate kernel // Ukr. Math. J. — 1996. — **48**, № 11. — P. 1785–1789.
19. *Samoilenko A. M., Boichuk A. A., Boichuk An. A.* Solutions, bounded on the whole axis, of linear weakly perturbed systems // Ukr. Math. J. — 2002. — **54**, № 11. — P. 1517–1530.

Получено 15.12.15