

КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫХ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Ю. В. Троценко

Ин-т математики НАН Украины

ул. Терещенковская, 3, Киев, 01004, Украина

e-mail: yutrotsenko@ukr.net

We propose an algorithm for describing oscillations of elastic revolution shells partially filled with ideal incompressible fluid. In solving this problem, the wave motions of the fluid free surface have been taken into account. The solution of the hydroelasticity problem is based on both applying the method of decomposing the integration domain of shell theory equations with a use of variational formulation of the problem and on constructing the operator inverse to the operator of the hydrodynamic portion of the problem. We construct a generalized functional on displacements of the shell such that the coupling conditions for subregions make natural boundary conditions. We make a comparison of the obtained numerical results with existing exact solutions of the considered problem for a straight circular cylinder.

Запропоновано алгоритм розрахунку коливань пружних оболонок обертання, частково заповнених ідеальною нестисливою рідиною. При розв'язанні цієї задачі враховуються хвильові рухи рідини на її вільній поверхні. Розв'язання задачі гідропружності базується на застосуванні методу декомпозиції області інтегрування рівнянь теорії оболонок з використанням варіаційного формулювання задачі і на наближеній побудові зворотного оператора для гідродинамічної частини задачі. Побудовано узагальнений функціонал відносно переміщень оболонки, для якого умови сполучення розв'язків у підобластях відносяться до числа природних граничних умов. Наведено порівняння отриманих числових результатів з існуючими точними розв'язками даної задачі для оболонки у формі прямого кругового циліндра.

Введение. Сложные механические системы, которые включают в себя тонкостенные оболочки с жидкостью, широко используются в авиастроении, ракетостроении и других отраслях промышленности. Имеется большое число публикаций, посвященных решению задач о взаимодействии тонкостенных оболочек с жидкостью. Обширная библиография по этому вопросу приведена в книгах [1, 2]. Среди публикаций имеются и работы, в которых построены точные решения рассматриваемых задач гидроупругости [1, 3, 4]. Особо следует отметить работу [3], в которой в наиболее общей постановке построено точное решение задачи о неосесимметричных колебаниях цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью. Численные данные этой работы могут быть использованы для оценки точности различных приближенных методов их решения. Применительно к оболочкам вращения общего вида разработан ряд приближенных алгоритмов решения задач гидроупругости, основанных на применении методов Ритца [1, 5, 6] и Бубнова – Галеркина [7, 8]. При их использовании в расчете произвольных оболочек вращения с жидкостью основную трудность представляет выбор систем базисных функций. При реализации метода Бубнова – Галеркина эти трудности могут быть преодолены путем его модификации, предложенной в работе [9]. На этом пути в работах [10–12] были предложены оригинальные решения ряда задач. В основу численного метода решения задач гидроупругости положено сведение исходной задачи для системы интегро-диффе-

ренциальных уравнений к соответствующим задачам Коши, интегрируемым методом ортогональной прогонки [13]. Применение метода конечных элементов к расчету упругих конструкций с жидкостью изложено в работах [14–16].

Следует отметить работу [17], которая посвящена обзору публикаций за последние пятнадцать лет по исследованию динамики, прочности и устойчивости оболочек вращения, содержащих жидкость. Из приведенного анализа следует, что при решении рассматриваемых задач основное предпочтение при выборе метода решения отдается преимущественно методу конечных элементов, что, по-видимому, связано с его универсальностью и наличием программного обеспечения (NASTRAN, ANSYS), которое обеспечивает относительную простоту его применения. В то же время во многих из опубликованных исследований авторами отмечаются значительные расхождения между экспериментальными и расчетными результатами, что указывает на необходимость улучшения теорий, дальнейшего развития существующих, а также разработки новых методов решения рассматриваемых задач.

Настоящая работа посвящена построению на основе метода Ритца приближенного аналитического решения задачи о колебаниях жидкости в произвольных упругих оболочках вращения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкостенную упругую оболочку вращения, которая на глубину H заполнена идеальной и несжимаемой жидкостью. Предполагается, что ускорение поля массовых сил \vec{g} параллельно оси симметрии оболочки. При формулировке данной задачи будем использовать линейную теорию оболочек и теорию малых волновых движений жидкости. Начальными перемещениями срединной поверхности оболочки, обусловленными гидростатическим давлением жидкости, а также диссипацией энергии при колебаниях оболочки пренебрегаем.

Введенные допущения позволяют максимально упростить постановку задачи, сохранив при этом ее практическое значение. Такого рода предположения характерны для большинства теоретических работ по динамике упругих оболочек с жидкостью [1, 2, 19].

У оболочек вращения линиями главных кривизн являются ее меридианы и параллели. В качестве ортогональных координат для произвольной точки срединной поверхности оболочки выберем длину дуги меридиана s , отсчитываемую от некоторой начальной параллели ($s_1 \leq s \leq s_2$) или от полюса оболочки ($s_1 = 0$), и угол β , определяющий положение точки на соответствующей параллели. Проекции перемещения точек срединной поверхности оболочки на положительные направления ее образующей, параллели и внешней нормали обозначим соответственно через u , v и w . Обозначим через ν , E и h коэффициент Пуассона, модуль упругости материала оболочки и ее толщину соответственно.

Возмущенное движение оболочки с жидкостью может быть описано системой уравнений в частных производных теории оболочек [18, 19, 23]

$$L_{i1}(u) + L_{i2}(v) + L_{i3}(w) = \frac{1 - \nu^2}{Eh} Q_i, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (1)$$

где L_{ij} — известные дифференциальные операторы тонких оболочек.

Компоненты поверхностной нагрузки Q_i в направлении положительного отсчета координат s , β и внешней нормали к поверхности оболочки имеют вид

$$Q_1 = -\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \tilde{X}_1, \quad Q_2 = -\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \tilde{X}_2, \quad Q_3 = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Delta P + \tilde{X}_3.$$

Здесь ρ — плотность материала оболочки, ΔP — добавочное динамическое давление на оболочку со стороны жидкости, \tilde{X}_i — компоненты вектора поверхностной нагрузки прочих внешних сил.

Для описания движения жидкости в оболочке введем в рассмотрение потенциал смещений $\chi(z, r, \beta, t)$. Обозначим через S срединную поверхность оболочки; через S_1 поверхность, смоченную жидкостью; через S_2 несмоченную часть поверхности оболочки; через Σ невозмущенную свободную поверхность жидкости и через D область, занятую жидкостью.

Потенциал смещений частиц жидкости при заданном движении оболочки в ее нормальном направлении $w(s, \beta, t) = w(p, t)$ определяется из решения следующей краевой задачи [2, 19]:

$$\Delta \chi = 0, \quad (z, r, \beta) \in D,$$

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial n} \right|_{S_1} = w(p, t), \quad \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \chi}{\partial z} + f(t) \right) \Big|_{\Sigma} = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа, g — модуль вектора \vec{g} , n — внешняя нормаль к поверхности S_1 и $f(t)$ — произвольная функция времени.

К уравнениям (1) необходимо добавить соответствующие граничные условия крепления торцов оболочки при $s = s_1$ и $s = s_2$. Динамическое давление со стороны жидкости на оболочку будет определяться по формуле [19]

$$\Delta P = -\rho_0 \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} d\Sigma \right). \quad (2)$$

При написании формулы (2) пренебрегалось несущественным гидростатическим давлением, обусловленным деформацией срединной поверхности оболочки и свободной поверхности жидкости.

Заметим, что потенциал смещений χ должен еще удовлетворять соотношению

$$\int_{S_1 + \Sigma} \frac{\partial \chi}{\partial n} dS = 0,$$

вытекающему из уравнения неразрывности и закона сохранения массы несжимаемой жидкости.

В дальнейшем удобно перейти к безразмерным величинам. Обозначим через R_0 какой-либо характерный размер оболочки. Введем в рассмотрение следующие параметры и безразмерные величины (обозначенные черточкой сверху):

$$\eta = \frac{\rho g R_0 (1 - \nu^2)}{E}, \quad c^2 = \frac{h^2}{12 R_0^2}, \quad a = \frac{\rho_0 R_0}{\rho h}, \quad K = \frac{\rho R_0^2 (1 - \nu^2)}{E},$$

$$t^2 = K \bar{t}^2, \quad \{u, v, w\} = R_0 \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}, \quad \chi = R_0^2 \bar{\chi},$$

$$\{T_i, S\} = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \{\bar{T}_i, \bar{S}\}, \quad M_i = \frac{EhR_0}{1 - \nu^2} \bar{M}_i, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Кроме того, отнесем к R_0 также параметры Ламе, кривизны и координаты точек срединной поверхности оболочки. В дальнейшем черточку над безразмерными величинами будем опускать. В формулах (6) T_i , S и M_i — силы и моменты, действующие в срединной поверхности оболочки [23].

Безразмерные уравнения возмущенного движения оболочки удобно представить в следующей векторно-матричной форме:

$$L\vec{U} + \vec{f} = \vec{X}. \quad (3)$$

Здесь L — матричный оператор, порожденный дифференциальными уравнениями (1) и определенный на множестве функций \vec{U} , которые удовлетворяют граничным условиям закрепления краев оболочки. Трехкомпонентные векторы \vec{f} , \vec{X} и \vec{U} имеют вид

$$\vec{f} = \left\{ \ddot{u}, \ddot{v}, \ddot{w} + a\delta(p) \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} d\Sigma \right) \right\},$$

$$\vec{X} = \{X_1, X_2, X_3\}, \quad X_i = \frac{1 - \nu^2}{Eh} \tilde{X}_i, \quad i = \overline{1, 3},$$

$$\vec{U} = \{u, v, w\}, \quad \delta(p) = \begin{cases} 1 & \text{при } p \in S_1, \\ 0 & \text{при } p \notin S_1. \end{cases}$$

Приведенные выше уравнения вместе с соответствующими начальными условиями для перемещений оболочки и для волновых движений жидкости [2] однозначно определяют связанные колебания упругой оболочки и находящейся в ней идеальной жидкости.

2. Сведение уравнений возмущенного движения оболочки с жидкостью к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Как и в динамике твердого тела с жидким заполнением [20, 21], представим потенциал смещений жидкости в виде суммы двух гармонических функций

$$\chi = \Phi(x, y, z, t) + \Psi(x, y, z, t), \quad (4)$$

где Φ — потенциал смещений частиц жидкости, обусловленный деформацией оболочки, при условии, что свободная поверхность представляет собой плоскость, параллельную поверхности Σ (иными словами, отсутствуют волновые движения); Ψ — потенциал волновых движений жидкости.

Функцию Φ определим как решение следующей краевой задачи:

$$\Delta \Phi = 0, \quad (x, y, z) \in D, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{S_1} = w(p, t), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = c(t), \quad (5)$$

где $c(t)$ — произвольная функция времени t , p — координаты любой точки срединной поверхности оболочки.

Функцию $c(t)$ выберем таким образом, чтобы выполнялось условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа (5):

$$\int_{\Sigma + S_1} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = 0.$$

Отсюда следует, что

$$c(t) = -\frac{1}{\Sigma} \int_{S_1} w(p, t) dS.$$

Здесь Σ — площадь невозмущенной свободной поверхности жидкости.

Приведение исходных уравнений с учетом соответствующих граничных условий к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений можно осуществить методом Бубнова – Галеркина. Для реализации этого метода необходимо располагать некоторой системой линейно независимых функций, удовлетворяющих граничным условиям задачи и условиям полноты.

Введем в рассмотрение спектральную задачу с параметром в граничном условии

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_k(x, y, z) &= 0, \quad (x, y, z) \in D, \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \Big|_{S_1} &= 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varkappa_k \varphi_k \right) \Big|_{\Sigma} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

Краевая задача (6) описывает собственные колебания жидкости в неподвижном сосуде. При этом квадрат частоты σ_k^2 k -й формы собственных колебаний жидкости связан с частотным параметром \varkappa_k соотношением

$$\sigma_k^2 = \eta \varkappa_k.$$

Все собственные значения спектральной задачи (6) действительны, положительны и имеют единственную предельную точку, расположенную на бесконечности. В свою очередь, совокупность собственных функций обладает свойством полноты на поверхности Σ и удовлетворяет следующим условиям ортогональности [22]:

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} d\Sigma = \int_{\Sigma} \varphi_k d\Sigma = 0, \quad \int_{\Sigma} \varphi_k \varphi_l d\Sigma = 0, \quad k \neq l. \quad (7)$$

Составляющую Ψ потенциала смещений жидкости (4) представим в виде разложения в обобщенный ряд Фурье по функциям φ_k :

$$\Psi(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) \varphi_k(x, y, z). \quad (8)$$

Коэффициенты Фурье $r_k(t)$ имеют смысл обобщенных координат, характеризующих волновые движения жидкости в оболочке.

Обобщенные координаты жидкости $r_k(t)$ будем определять из динамического условия для потенциала смещений жидкости χ на ее свободной поверхности. Для этого подставим в граничное условие на Σ выражения (4) и (8). Полученное соотношение умножим на $ad\varphi_l/dn$ и проинтегрируем его по области Σ . С учетом условий ортогональности (7) и

того, что функция $\Phi(x, y, z, t)$ является решением краевой задачи (5), получим следующее уравнение относительно $r_k(t)$:

$$a\mu_k(\ddot{r}_k + \sigma_k^2 r_k) = -a \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} d\Sigma, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где

$$\mu_k = \int_{\Sigma} \varphi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} d\Sigma.$$

Далее, выберем базис для аппроксимации перемещений оболочки и составляющей потенциала смещений жидкости Φ . Сформулируем вспомогательную спектральную задачу, описывающую свободные колебания оболочки с жидкостью при условии, что свободная поверхность жидкости представляет собой плоскость, перпендикулярную продольной оси оболочки. Эту задачу можно сформулировать исходя из уравнений (3). Для этого в них следует положить $\vec{X} \equiv 0$, для потенциала смещений жидкости (3) положить $\Psi \equiv 0$ и отделить временную координату по формулам

$$[u, v, w] = \exp^{i\Omega t} [u, v, w], \quad \Phi = \exp^{i\Omega t} \Phi, \quad c(t) = \exp^{i\Omega t} C.$$

Будем считать, что вектор-функция $\vec{U} = \{u, v, w\}$ принадлежит вещественному пространству H вектор-функций, удовлетворяющих граничным условиям крепления краев оболочки. Тогда с учетом введенных обозначений сформулированная спектральная задача будет иметь вид

$$L\vec{U} - \Omega^2 M\vec{U} = 0, \quad M\vec{U} = \left\{ u, v, w + a\delta(p) \left(\Phi - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi d\Sigma \right) \right\}, \quad (10)$$

$$\Delta\Phi = 0, \quad (x, y, z) \in D, \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_{S_1} = w, \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|_{\Sigma} = C. \quad (11)$$

Можно показать, что операторы L и M являются симметричными и положительными. В силу этого на основании общих теорем теории спектральных задач [24] можно сформулировать ряд утверждений для собственных значений и собственных функций задачи (10), (11). Рассматриваемая задача имеет дискретный спектр $0 < \Omega_1^2 \leq \Omega_2^2 \leq \dots \leq \Omega_n^2 \dots$, причем $\Omega_n^2 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Совокупность соответствующих собственных функций \vec{U}_i полна и удовлетворяет следующим условиям ортогональности:

$$\int_S (L\vec{U}_i, \vec{U}_j) dS = \int_S (M\vec{U}_i, \vec{U}_j) dS = 0 \quad \text{при } i \neq j. \quad (12)$$

Вследствие этого произвольная квадратично суммируемая на поверхности S вектор-функция может быть разложена в ряд по системе собственных функций \vec{U}_i , который будет сходиться покомпонентно в средне квадратичном смысле.

Таким образом, собственные функции спектральной задачи (10), (11) могут быть использованы для сведения исходных уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом эта система будет иметь наиболее простой вид.

Представим перемещения срединной поверхности оболочки и потенциал смещений жидкости Φ в виде разложений

$$\vec{U}(p, t) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(t) \vec{U}_j(p), \quad \Phi = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(t) \Phi_j(x, y, z), \quad (13)$$

где Φ_j — гармонические функции, удовлетворяющие граничным условиям

$$\left. \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} \right|_{S_1} = w_j(p), \quad \left. \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right|_{\Sigma} = -\frac{1}{\Sigma} \int_{S_1} w_j(p) dS.$$

Подставим разложения (13) в уравнения (3) и (9). Полученное уравнение (3) умножим скалярно на \vec{U}_i и проинтегрируем полученный результат по всей поверхности оболочки S . Тогда с учетом условий ортогональности (12) будем иметь следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$a_i (\ddot{s}_i + \Omega_i^2 s_i) + a \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{r}_k \lambda_{ik} = Y_i, \quad (14)$$

$$a \mu_k (\ddot{r}_k + \sigma_k^2 r_k) + a \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{s}_i \gamma_{ki} = 0, \quad i, k = 1, 2, \dots$$

Здесь

$$a_i = \int_S (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) dS + a \int_{S_1} \left(\Phi_i - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_i dS \right) w_i dS,$$

$$\lambda_{ik} = \int_{S_1} \varphi_k w_i dS, \quad \gamma_{ki} = \int_{\Sigma} \Phi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} dS, \quad Y_i = \int_S (\vec{X}, \vec{U}_i) dS.$$

С помощью формулы Грина для гармонических функций можно показать симметрию коэффициентов λ_{ik} и γ_{ki} , т. е. $\lambda_{ik} = \gamma_{ki}$.

Система уравнений (14) для описания возмущенного движения упругой оболочки, частично заполненной жидкостью, может быть сведена к аналогичным уравнениям, которые получены в работах [2, 19] на основе использования принципа возможных перемещений.

Уравнения (14) могут быть использованы для приближенного определения свободных колебаний жидкости в упругом резервуаре. Для этого следует положить

$$s_i = \exp^{i\omega t} S_i, \quad r_k = \exp^{i\omega t} R_k, \quad Y_i \equiv 0.$$

Учитывая это и ограничиваясь конечным числом обобщенных координат, для определения амплитуд S_i , R_k и частот колебаний ω получаем однородную конечную систему алгебраических уравнений

$$(G - \lambda^2 F) \vec{y} = 0, \quad \vec{y} = \{S_1, S_2, \dots, S_{s_0}; R_1, R_2, \dots, R_{r_0}\}, \quad \lambda^2 = \frac{(1 - \nu^2) \rho R_0^2 \omega^2}{E}.$$

Здесь элементы g_{ij} и f_{ij} верхней части относительно главной диагонали симметричных матриц G и F соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} g_{i,j} &= \delta_{ij} a_i \Omega_i^2, & f_{ij} &= \delta_{ij} a_i, & i, j &= \overline{1, s_0}, \\ g_{i,j+s_0} &= 0, & f_{i,j+s_0} &= a \lambda_{ij}, & i &= \overline{1, s_0}, & j &= \overline{1, r_0}, \\ g_{i+s_0,j+s_0} &= \delta_{ij} a \mu_i \sigma_i^2, & f_{i+s_0,j+s_0} &= \delta_{ij} a \mu_i, & i, j &= \overline{1, r_0}, \\ \delta_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Определение коэффициентов уравнений (14) связано с вычислением квадратур от решений спектральных задач (6) и (10), (11).

3. Применение вариационных методов для построения решений дополнительно введенных спектральных задач. Для оболочек вращения компоненты перемещений точек срединной поверхности оболочки u , v , w и потенциал смещений частиц жидкости Φ с учетом условий их периодичности по углу β можно представить в виде

$$\begin{aligned} u(s, \beta) &= u(s) \cos n\beta, & v(s, \beta) &= v(s) \sin n\beta, \\ w(s, \beta) &= w(s) \cos n\beta, & \Phi(z, r, \beta) &= \Phi(z, r) \cos n\beta, \end{aligned}$$

где n — число волн упругой поверхности оболочки и жидкости в окружном направлении, рассматриваемое в дальнейшем в качестве параметра.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением неосесимметричных колебаний оболочки с жидкостью при $n > 0$.

После отделения угловой координаты β для составляющей потенциала смещений жидкости $\Phi(z, r)$ будем иметь следующую краевую задачу Неймана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} \Phi &= 0, & (z, r) &\in Q, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{L_0} &= 0, & \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{L_1} &= w, \end{aligned} \tag{15}$$

где Q , L_0 и L_1 — меридиональное сечение области D , поверхностей Σ и S_1 соответственно.

Введем в рассмотрение оператор G [25], который значениям функции $w(s)$, заданной на контуре L_1 , ставит в соответствие функцию Φ , определенную в области Q и являющуюся решением краевой задачи (15). Это соответствие представим в виде

$$\Phi = Gw.$$

Здесь G — интегральный оператор, ядром которого является функция Грина второй краевой задачи (15). Если область имеет каноническую форму, то эту функцию можно построить в явном виде.

Будем считать, что вектор-функция $\vec{U} = \{u(s), v(s), w(s)\}$ принадлежит классу H функций, определенных в точках меридионального сечения оболочки и удовлетворяющих условиям крепления ее торцов. Тогда исходную спектральную задачу (10), (11) можно представить в операторном виде

$$\mathfrak{S}(\vec{U}) = L\vec{U} - \Omega^2 M\vec{U} = 0, \quad M = \text{diag}\{1, 1, 1 + \delta(p)aG\}. \quad (16)$$

Решения системы интегро-дифференциальных уравнений (16), имеющей восьмой порядок, должны быть подчинены соответствующим однородным граничным условиям. Так, для абсолютно жесткого крепления края оболочки при $s = s_1$ эти условия примут вид

$$\left[u = v = w = \frac{dw}{ds} = 0 \right]_{s=s_1}. \quad (17)$$

Для свободного края оболочки при $s = s_2$ имеют место силовые граничные условия

$$\left[T_1 = S = \tilde{Q}_1 = M_1 = 0 \right]_{s=s_2}. \quad (18)$$

Здесь \tilde{Q}_1 — обобщенная перерезывающая сила [23].

Для оболочки в форме купола при построении решений следует учитывать асимптотическое поведение искомых решений при $s \rightarrow 0$ [26].

Поскольку оболочка подвержена действию разрывной динамической нагрузки, то для эффективного построения приближенных решений исходной задачи и обеспечения возможности вычисления перемещений оболочки и их первых производных в каждой точке интервала интегрирования уравнений (16) целесообразно разбить этот интервал на две подобласти. Пусть $s = \zeta$ соответствует уровню жидкости, на который заполнена оболочка. Разобьем область $[s_1, s_2]$ точкой $s = \zeta$ на две подобласти: $G^{(1)} = [s_1, \zeta]$ и $G^{(2)} = [\zeta, s_2]$. Область $G^{(1)}$ соответствует смоченной части оболочки, а область $G^{(2)}$ — оставшейся несмоченной части. Обозначим решения исходной задачи в подобластях $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ соответственно через $\vec{U}^{(1)}$ и $\vec{U}^{(2)}$. В дальнейшем верхний индекс во всех встречающихся функциях будет обозначать область, в которой эти функции определены. Заметим, что в каждой из введенных подобластей динамическая нагрузка на оболочку будет непрерывной функцией от s .

Для определенности будем считать, что нижний торец оболочки жестко закреплен, а верхний — свободен. Кроме граничных условий (17), (18) в сечении $s = \zeta$ должны выполняться граничные условия сопряжения решений $\vec{U}^{(1)}(s)$ и $\vec{U}^{(2)}(s)$:

$$u^{(1)} = u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)}, \quad \frac{dw^{(1)}}{ds} = \frac{dw^{(2)}}{ds}, \quad (19)$$

$$T_1^{(1)} = T_1^{(2)}, \quad S^{(1)} = S^{(2)}, \quad M_1^{(1)} = M_1^{(2)}, \quad \tilde{Q}_1^{(1)} = \tilde{Q}_1^{(2)}. \quad (20)$$

Сформулированную задачу будем решать с помощью вариационного метода.

Эквивалентную вариационную постановку исходной спектральной задачи можно получить исходя из принципа возможных перемещений, согласно которому $\delta\Pi = \delta A$, где $\delta\Pi$ — вариация потенциальной энергии деформации оболочки [23]. Работу внешних сил δA на возможных перемещениях оболочки можно представить в виде

$$\delta A = \Omega^2 \int_{s_1}^{s_2} [u\delta u + v\delta v + (w + \delta(p)aG(w))\delta w] r ds.$$

В итоге исходная спектральная задача сведется к отысканию стационарных значений для функционала $I(\vec{U})$

$$I(\vec{U}) = \int_{s_1}^{s_2} F(\vec{U}) r ds.$$

Представим этот функционал в виде

$$I = \int_{G^{(1)}} F(\vec{U}^{(1)}) dG^{(1)} + \int_{G^{(2)}} F(\vec{U}^{(2)}) dG^{(2)}. \quad (21)$$

Приравнявая первую вариацию от функционала (21) к нулю, получаем вариационное уравнение для нахождения функций $\vec{U}^{(k)}(s)$, $k = 1, 2$. Из этого уравнения в силу произвольности варьирования функций в областях $G^{(k)}$ и на границе при $s = s_2$ следует, что в пределах каждой из введенных подобластей должны выполняться исходные уравнения и граничные условия (18). Далее, если предположить, что класс допустимых функций при $s = \zeta$ подчинен условиям (19), то условия (20) будут естественными граничными условиями для функционала (21).

Итак, при использовании метода Ритца для решения вариационного уравнения $\delta I = 0$ аппроксимации для функций $u^{(k)}$, $v^{(k)}$ и $w^{(k)}$ должны выбираться таким образом, чтобы они обеспечивали выполнение условий (19). В этом случае остальные граничные условия задачи, кроме условий (17), будут естественными граничными условиями для функционала (21). Построение решений, заведомо удовлетворяющих условиям (19), существенно усложняет алгоритм определения искомых функций. В связи с этим возникает вопрос о преобразовании функционала (21) в такой функционал, для которого условия сопряжения (19) были бы естественными условиями.

Теория преобразования вариационных задач создана уже давно [27], но в литературе известны лишь немногие примеры применения ее к конкретным задачам.

Граничные условия (19) при $s = \zeta$ можно рассматривать как дополнительные ограничения на задачу нахождения стационарных значений функционала $I(\vec{U})$. Одним из способов учета ограничений в форме равенств является метод неопределенных множителей Лагранжа [27]. В соответствии с этим методом введем в рассмотрение новый функционал

Π_1 , который имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_1(\vec{U}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = I(\vec{U}) + \left[\alpha_1 (u^{(1)} - u^{(2)}) + \alpha_2 (v^{(1)} - v^{(2)}) + \right. \\ \left. + \alpha_3 (w^{(1)} - w^{(2)}) + \alpha_4 \left(\frac{dw^{(1)}}{ds} - \frac{dw^{(2)}}{ds} \right) \right]_{s=\zeta}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\alpha_i, i = \overline{1, 4}$, – множители Лагранжа, подлежащие определению в дальнейшем. Исходная вариационная задача при этом переходит в следующую:

$$\delta \Pi_1(\vec{U}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0. \quad (23)$$

Преобразование функционала I в функционал Π_1 достигается ценой увеличения количества неизвестных. Нужно искать стационарное значение функционала Π_1 не только по u, v и w , но и по $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4 . Эту задачу можно существенно упростить, если предварительно найти явные выражения для множителей Лагранжа через сами решения \vec{U} и их производные. С этой целью вычислим первую вариацию функционала Π_1 при свободном варьировании функций $\vec{U}^{(i)}, i = 1, 2$, и постоянных $\alpha_i, i = \overline{1, 4}$.

Из вариационного уравнения (23) выпишем только внеинтегральные члены при $s = \zeta$. При этом будем иметь

$$\begin{aligned} \left[\delta \alpha_1 (u^{(1)} - u^{(2)}) + \delta \alpha_2 (v^{(1)} - v^{(2)}) + \delta \alpha_3 (w^{(1)} - w^{(2)}) + \right. \\ + \delta \alpha_4 \left(\frac{dw^{(1)}}{ds} - \frac{dw^{(2)}}{ds} \right) + (T_1^{(1)} + \alpha_1) \delta u^{(1)} - (T_1^{(2)} + \alpha_1) \delta u^{(2)} + \\ + (S^{(1)} + \alpha_2) \delta v^{(1)} - (S^{(2)} + \alpha_2) \delta v^{(2)} + (\tilde{Q}_1^{(1)} + \alpha_3) \delta w^{(1)} + \\ \left. + (\tilde{Q}_1^{(2)} + \alpha_3) \delta w^{(2)} + (\alpha_4 - M_1^{(1)}) \frac{d\delta w^{(1)}}{ds} + (M_1^{(2)} - \alpha_4) \frac{d\delta w^{(2)}}{ds} \right]_{s=\zeta}. \end{aligned}$$

Если функционал (22) принимает стационарное значение для произвольных вариаций $\delta \vec{U}^{(i)}, \frac{d\delta w^{(i)}}{ds}, i = 1, 2$, и $\delta \alpha_i, i = \overline{1, 4}$, то из этого выражения следует, что в точке $s = \zeta$ будут выполняться кинематические условия сопряжения (19), а также соотношения

$$\begin{aligned} \alpha_1 = -T_1^{(1)}, \quad \alpha_1 = -T_1^{(2)}, \quad \alpha_2 = -S^{(1)}, \quad \alpha_2 = -S^{(2)}, \\ \alpha_3 = -\tilde{Q}_1^{(1)}, \quad \alpha_3 = -\tilde{Q}_1^{(2)}, \quad \alpha_4 = M_1^{(1)}, \quad \alpha_4 = M_1^{(2)}. \end{aligned}$$

Из этих формул можно установить следующие выражения для множителей Лагранжа:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{2} \left(T_1^{(1)} + T_1^{(2)} \right) \Big|_{s=\zeta}, & \alpha_2 &= -\frac{1}{2} \left(S^{(1)} + S^{(2)} \right) \Big|_{s=\zeta}, \\ \alpha_3 &= -\frac{1}{2} \left(\tilde{Q}_1^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(2)} \right) \Big|_{s=\zeta}, & \alpha_4 &= \frac{1}{2} \left(M_1^{(1)} + M_1^{(2)} \right) \Big|_{s=\zeta}. \end{aligned} \quad (24)$$

Исключая $\alpha_i, i = \overline{1, 4}$, из функционала (22) с помощью установленных для них выражений (24), получаем обобщенный функционал Π_2 , зависящий только от $\vec{U}(s)$. Краевые условия (18)–(20) будут автоматически выполняться для функций, доставляющих функционалу $\Pi_2(\vec{U})$ стационарное значение.

Полученный функционал служит теоретической основой для построения прямых методов решения рассматриваемой задачи. На основе метода Ритца эти решения будут иметь аналитическую форму.

Представим функции $u^{(k)}(s)$, $v^{(k)}(s)$ и $w^{(k)}(s)$, $k = 1, 2$, в виде следующих отрезков обобщенных рядов:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= \sum_{j=1}^N x_j U_j^{(1)}(s), & v^{(1)} &= \sum_{j=1}^N x_{j+N} V_j^{(1)}(s), & w^{(1)} &= \sum_{j=1}^N x_{j+2N} W_j^{(1)}(s), \\ u^{(2)} &= \sum_{j=1}^N x_{j+3N} U_j^{(2)}(s), & v^{(2)} &= \sum_{j=1}^N x_{j+4N} V_j^{(2)}(s), & w^{(2)} &= \sum_{j=1}^N x_{j+5N} W_j^{(2)}(s). \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь $x_j, j = \overline{1, 6N}$, — произвольные постоянные, подлежащие определению в дальнейшем; $U_j^{(k)}(s), V_j^{(k)}(s)$ и $W_j^{(k)}(s)$ — системы координатных функций, которые определены соответственно в подобластях $G^{(k)}, k = 1, 2$.

Координатные функции выберем в виде

$$\begin{aligned} U_j^{(1)} &= V_j^{(1)} = (s - s_1) P_j(x), & W_j^{(1)} &= (s - s_1)^2 P_j(x), & x &= \frac{2(s - \zeta)}{\zeta - s_1} + 1, \\ U_j^{(2)} &= V_j^{(2)} = W_j^{(2)} = P_j(y), & y &= \frac{2s}{s_2 - \zeta} - \frac{s_2 + \zeta}{s_2 - \zeta}, \end{aligned}$$

где $P_j(z)$ — смещенные на единицу по индексу j многочлены Лежандра с аргументами, которые преобразуют интервалы $[s_1, \zeta]$ и $[\zeta, s_2]$ в интервал $[-1, 1]$.

Введенные системы базисных функций являются линейно независимыми и полными функциями в соответствующих подобластях. Системы координатных функций с верхним индексом, равным единице, подчинены граничным условиям (17).

Подставим разложения (25) в функционал $\Pi_2(\vec{U})$. Из необходимых условий стационарности обобщенного функционала получим однородную систему алгебраических уравнений

$$(A - \Omega^2 B) \vec{X} = 0, \quad (26)$$

где $\vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_{6N}\}$. Коэффициенты α_{ij} и β_{ij} симметричных матриц A и B приведены в работе [28].

Для вычисления некоторых элементов матрицы B необходимо знать решения следующих краевых задач Неймана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_k}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F_k}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} F_k &= 0, \quad z, r \in Q, \\ \frac{\partial F_k}{\partial z} \Big|_{L_0} &= 0, \quad \left(\frac{\partial F_k}{\partial n} \right) \Big|_{L_1} = W_k^{(1)}, \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (27)$$

В отличие от задачи (15) граничное условие на контуре L_1 содержит уже известные функции $W_k^{(1)}$, которые выбраны в качестве координатных функций для аппроксимации нормального прогиба оболочки $w^{(1)}(s)$ в области $G^{(1)}$.

Решения краевых задач (27) для произвольной оболочки вращения могут быть найдены приближенно с помощью метода Трефтца, если их предварительно свести к эквивалентным вариационным задачам для функционалов:

$$I_k = \int_Q \left[r \left(\frac{\partial F_k}{\partial z} \right)^2 + r \left(\frac{\partial F_k}{\partial r} \right)^2 + \frac{n^2}{r} (F_k)^2 \right] dz dr - 2 \int_{L_1} r F_k W_k^{(1)} ds, \quad k = \overline{1, N}.$$

В качестве координатных функций $\Psi_j(z, r)$ выберем систему частных решений уравнения (27), которые линейно независимы и полны на любом замкнутом контуре области Q [22]. В этом случае решения задач (27) представим в виде разложений

$$F_k(z, r) = \sum_{j=1}^q d_j^{(k)} \Psi_j(z, r), \quad \Psi_j = \frac{2^n n! (j-n)!}{(j+n)!} R^j P_j^{(n)}(\cos \theta). \quad (28)$$

Здесь d_{ij} — произвольные постоянные, $R = \sqrt{z^2 + r^2}$, $\cos \theta = z/R$, $P_j^{(n)}$ — присоединенные функции Лежандра первого рода.

В результате постоянные $d_j^{(k)}$ в разложениях (28) будут определяться из решений алгебраических систем

$$D \vec{d}^{(k)} = \vec{\gamma}^{(k)}, \quad \vec{d}^{(k)} = \{d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \dots, d_q^{(k)}\}, \quad k = \overline{1, N}, \quad (29)$$

в которых коэффициенты d_{ij} симметричной матрицы D и элементы $\gamma_i^{(k)}$ вектор-столбцов $\vec{\gamma}^{(k)}$ определяются по формулам

$$d_{i,j} = \int_{L_0+L_1} r \Psi_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} ds, \quad \gamma_i^{(k)} = \int_{L_1} r W_k^{(1)} \Psi_i ds, \quad i, j = \overline{1, q}.$$

Для учета волновых движений жидкости в оболочке необходимо располагать решениями спектральной задачи (6) с параметром в граничном условии. Собственные функции и собственные значения этой задачи для произвольной оболочки вращения могут

быть найдены приближенно методом Трэфтца, если краевую задачу (6), после отделения угловой координаты, предварительно свести к вариационной задаче. Функционал, соответствующий этой краевой задаче, имеет вид

$$I(\varphi) = \int_Q \left[r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{n^2}{r} \varphi^2 \right] dz dr - \varkappa \int_{L_0} r \varphi^2 ds. \quad (30)$$

Функцию $\varphi(z, r)$ представим в виде разложения

$$\varphi(z, r) = \sum_{k=1}^q a_k \Psi_k(z, r),$$

где a_k — произвольные постоянные, $\Psi_k(z, r)$ — ранее введенная система координатных функций.

Из условий стационарности функционала (30) для определения коэффициентов a_k и параметров \varkappa получим однородную систему алгебраических уравнений

$$(D - \varkappa B_1) \vec{a} = 0, \quad \vec{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_q\},$$

где коэффициенты матрицы D совпадают с коэффициентами соответствующей матрицы системы уравнений (29), элементы $\beta_{ij}^{(1)}$ матрицы B_1 вычисляются по формулам

$$\beta_{ij}^{(1)} = \int_{L_0} r \Psi_i \Psi_j ds.$$

Найденные решения для функций $\vec{U}_i(s)$, $\Phi_i(z, r)$ и φ_i позволяют определить коэффициенты уравнений возмущенного движения произвольной оболочки вращения, частично заполненной жидкостью.

4. Некоторые результаты расчетов. Приведем результаты расчетов конкретной оболочки вращения по предложенному выше алгоритму. В литературе известны точные решения рассматриваемой спектральной задачи для оболочки в форме прямого кругового цилиндра [3], полученные на основе использования технической теории оболочек В. З. Власова. Численные результаты этой работы могут служить основой для оценки точности различных приближенных методов решения данной задачи. В связи с этим ниже будем рассматривать оболочку вращения в форме кругового цилиндра единичного радиуса и длины l . Будем считать, что при $s_1 = 0$ торец оболочки жестко закреплен, а при $s_2 = l$ — свободен.

Сначала оценим эффективность вариационного метода решения задачи, который базируется на декомпозиции области интегрирования исходных уравнений.

Положим $\nu = 0, 3$, $l = 4$, $\zeta = 2$, $a = 0$, $h = 0, 01$.

В табл. 1 приведена сходимость первых четырех собственных значений λ_i при числе волн в окружном направлении $n = 1$ в зависимости от числа приближений N в разложениях (25). В последней строке таблицы, обозначенной звездочкой, приведены расчетные

Таблица 1

N	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
4	0,10859	0,35024	0,63185	0,73055
6	0,10809	0,34972	0,62820	0,72974
8	0,10795	0,34965	0,62802	0,72971
10	0,10790	0,34964	0,62798	0,72971
12	0,10789	0,34964	0,62798	0,72970
14	0,10789	0,34964	0,62798	0,72970
*	0,10789	0,34964	0,62798	0,72970

Таблица 2

N	$w(\pm)$	$w'(\pm)$	$w''(\pm)$	$w'''(\pm)$
10	0,47179	0,28728	-1,0113	18,080
	0,46409	0,25086	0,95644	20,146
14	0,46880	0,27533	0,06156	-2,1897
	0,46885	0,27441	-0,01540	2,0808
18	0,46882	0,27503	0,02374	-0,16744
	0,46882	0,27502	0,02139	0,05579
22	0,46882	0,27502	0,02245	-0,03317
	0,46882	0,27502	0,02268	-0,07860
26	0,46882	0,27502	0,02256	-0,05672
	0,46882	0,27502	0,02256	-0,05506
30	0,46882	0,27502	0,02256	-0,05587
	0,46882	0,27502	0,02256	-0,05590

величины, полученные на основе точного решения рассматриваемой задачи [3]. Значения нормального прогиба $w(\pm)$ по первой форме колебаний оболочки и их первых трех производных при различном числе приближений N в разложениях (25) представлены в табл. 2. Здесь $w(+)$ = $w^{(2)}(\zeta)$ (верхние строки) и $w(-)$ = $w^{(1)}(\zeta)$ (нижние строки). Аналогичные обозначения имеют место и для производных. Вектор \vec{X} алгебраической системы (26) нормировался таким образом, чтобы $w(l) = 1$.

Приведенные вычисления показывают, что данный метод решения исходной задачи обеспечивает поточечную сходимость для решений и их первых трех производных как внутри областей $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$, так и на их границах. Кроме того, результаты табл. 2 свидетельствуют о точности выполнения кинематических и силовых условий сопряжения при использовании обобщенного функционала для решения данной задачи.

В соответствии с работой [3] рассмотрим оболочку с параметрами

$$\frac{l}{R_0} = 6,06, \quad \nu = 0,29, \quad \frac{R_0}{h} = 150, \quad a = 19,2, \quad \eta = 0,126 \cdot 10^{-7}.$$

Таблица 3

λ_i	s_0	r_0				
		0	1	2	3	4
λ_{r_0+1}	1	0,02062	0,02071	0,02072	0,02072	0,02072
	5	0,02062	0,02071	0,02072	0,02072	0,02072
λ_{r_0+2}	2	0,07459	0,08171	0,08231	0,08250	0,08258
	3	0,07459	0,08160	0,08219	0,08237	0,08245
	4	0,07459	0,08152	0,08209	0,08226	0,08234
	5	0,07459	0,08152	0,08208	0,08226	0,08233
λ_{r_0+3}	3	0,14864	0,15176	0,15193	0,15197	0,15199
	4	0,14864	0,15157	0,15170	0,15173	0,15174
	5	0,14864	0,15156	0,15169	0,15172	0,15173

Значения параметров n и $\varepsilon = H/l$ варьировались. Решение спектральной задачи (6) можно получить методом разделения переменных.

Спектр частот колебаний рассматриваемой механической системы имеет две ветви. Первая ветвь $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r_0}$ связана преимущественно с волновыми движениями жидкости, а вторая $\lambda_{r_0+1}, \lambda_{r_0+2}, \dots, \lambda_{r_0+s_0}$ — с деформациями срединной поверхности оболочки. Для рассматриваемых параметров оболочки низшие частоты преимущественно волновых движений жидкости близки к соответствующим частотам колебаний жидкости в абсолютно жестком цилиндре.

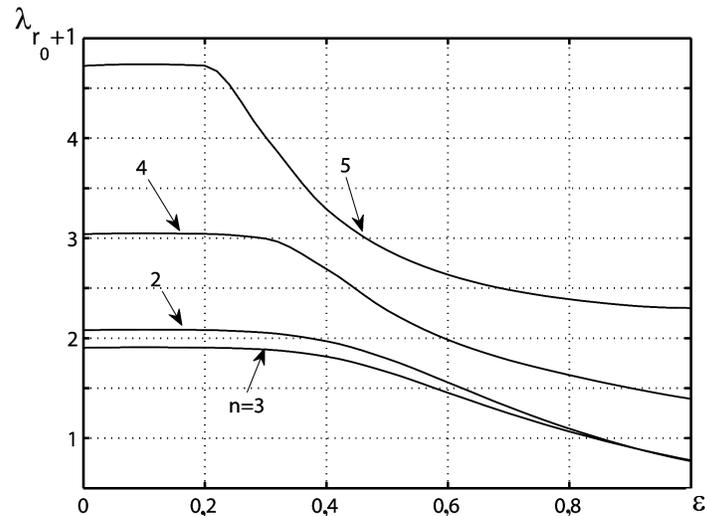
В табл. 3 приведены первые три частоты преимущественно упругих колебаний оболочки при $n = 2, \varepsilon = 0,25$ в зависимости от числа членов r_0 и s_0 в разложениях (8) и (13). Данные этой таблицы свидетельствуют о достаточно быстрой сходимости предложенного алгоритма решения задачи. При получении приведенных выше результатов в рядах (25) и (28) удерживалось соответственно такое количество членов N и q , при которых в найденных значениях частот λ было бы не меньше шести верных значащих цифр. Эти условия выполняются при $N = 14$ и $q = 10$.

Сравнение полученных расчетных и точных табличных данных работы [3] свидетельствует об их полном совпадении.

Характер изменения преимущественно упругих низших частот λ_{r_0+1} в зависимости от числа волн n в окружном направлении и параметра заполнения оболочки жидкостью ε ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) показан на рисунке. При $\varepsilon < 0,125$ частоты близки к частотам колебаний оболочки без жидкости, а при $\varepsilon > 0,9$ — к частотам оболочки, целиком заполненной жидкостью.

Предложенный выше алгоритм может быть использован для расчета частот и форм колебаний произвольных оболочек вращения, частично заполненных идеальной жидкостью.

Заметим, что решение нелинейной краевой задачи для области с переменными границами о немалых колебаниях жидкости в абсолютно жестких резервуарах известными методами [29] сведено к решению некоторой последовательности линейных краевых задач для области с фиксированными границами. В связи с этим полученные в данной работе результаты могут быть использованы при решении соответствующих нелинейных задач гидроупругости.



Литература

1. Горшков А. Г., Морозов В. И., Пономарев А. Т., Шклярчук Ф. Н. Аэроупругость конструкций. — М.: Физматлит, 2000. — 592 с.
2. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. — М.: Машиностроение, 1971. — 563 с.
3. Кулешов В. Б., Швейко Ю. Ю. Неосесимметричные колебания цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1971. — № 3. — С. 126–136.
4. Кулешов В. Б., Швейко Ю. Ю. Неосесимметричные колебания круглых и кольцевых пластин, взаимодействующих с жидкостью // Исследования по теории сооружений. — 1972. — № 19. — С. 28–40.
5. Александрович Л. И., Лампер Р. Е. Собственные колебания упругого осесимметричного сосуда произвольного контура // Тр. 6-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин (Баку, 1966). — М.: Наука, 1967. — С. 27–29.
6. Троценко В. А. О колебаниях жидкости в сосудах, свободная поверхность которой закрыта мембранной оболочкой из гиперупругого материала // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1980. — № 6. — С. 166–177.
7. Шмаков В. П. Об уравнениях осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с жидким заполнением // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. — 1964. — № 1. — С. 170–173.
8. Wen-Hwa Chu, Conzales R. Supplement to breathing vibrations of a partially filled cylindrical tank — linear theory // Trans. ASME. E. J. Appl. Mech. — 1964. — 31, № 4. — P. 722–723.
9. Шмаков В. П. Об одном приеме, упрощающем применение метода Бубнова – Галеркина к решению краевых задач // Механика твердого тела. — 1967. — № 5. — С. 129–136.
10. Балакирев Ю. Г., Шмаков В. П. Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки с полусферическим дном // Колебания упругих конструкций с жидкостью. — Новосибирск: Изд. НЭТИ, 1984. — С. 28–32.
11. Балакирев Ю. Г. Осесимметричные колебания пологой сферической оболочки с жидкостью // Механика твердого тела. — 1967. — № 5. — С. 116–123.
12. Кобычкин В. С., Шмаков В. П., Яблоков В. А. Осесимметричные колебания полусферической оболочки, частично заполненной жидкостью // Механика твердого тела. — 1968. — № 5. — С. 46–54.
13. Брусиловский А. Д., Шмаков В. П., Яблоков В. А. Метод расчета собственных и вынужденных колебаний упругих оболочек вращения, заполненных идеальной несжимаемой жидкостью // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1973. — № 3. — С. 99–110.

14. Григорьев В. Г. Применение метода конечных элементов к расчету колебаний упругих оболочечных конструкций, содержащих жидкость // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью: Труды III сем. — Томск: Том. ун-т, 1978. — С. 55–60.
15. Olson L. G., Bathe K. J. A study of displacement based fluid finite elements for calculating frequencies of fluid and fluid — structure systems // Nucl. Eng. and Des. — 1983. — **76**. — P. 137–151.
16. Мокеев В. В. Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 1998. — № 6. — С. 166–174.
17. Alphose Zingoni. Liquid-containment shells of revolution: A review of recent studies on strength, stability and dynamics // Thin-Walled Structures. — 2015. — **87**. — P. 102–114.
18. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. — М.; Л.: Гостехиздат, 1949. — 784 с.
19. Шмаков В. П. Избранные труды по гидроупругости и динамике упругих конструкций. — М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2011. — 287 с.
20. Нариманов Г. С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью // Прикл. математика и механика. — 1956. — **20**, вып. 1. — С. 21–38.
21. Микишев Г. С., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — М.: Машиностроение, 1968. — 532 с.
22. Феценко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В. Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. — Киев: Наук. думка, 1969. — 250 с.
23. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. — Л.: Судпромгиз, 1962. — 431 с.
24. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. — М.: Физматгиз, 1970. — 512 с.
25. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. — М.: Наука, 1965. — 439 с.
26. Троценко Ю. В. Структура интегралов уравнений колебаний оболочек вращения в форме купола // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **5**, № 2. — С. 334–348.
27. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. — М.: Гостехиздат, 1951. — **1**. — 476 с.
28. Троценко В. А., Троценко Ю. В. Неосесимметричные колебания оболочки вращения, частично заполненной жидкостью // Нелінійні коливання. — 2015. — **18**, № 3. — С. 394–412.
29. Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. — М.: Машиностроение, 1977. — 208 с.

Получено 07.06.16,
после доработки — 20.09.16