УДК 517.925, 519.216

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Г. К. Василина, М. И. Тлеубергенов

Казах. нац. ун-т им. аль-Фараби
Ин-т математики и мат. моделирования МОН РК
ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан
e-mail: v_gulmira@mail.ru
marat207@mail.ru

By using the Lyapunov functions method, we study an optimal stabilization problem for an analytically defined integral manifold in a class of stochastic differential equations in the case where the random perturbations belong to the class of processes with independent increments.

Методом функцій Ляпунова досліджується задача оптимальної стабілізації аналітично заданого інтегрального многовиду у класі стохастичних диференціальних рівнянь при наявності випадкових збурень із класу процесів із незалежними приростами.

Одним из основных требований в теории обратных задач дифференциальных систем (см., например, [1]), связанных с работоспособностью системы, является требование устойчивости заданных свойств движения, поэтому решение задачи устойчивости программного движения имеет существенное значение для дальнейшего развития качественной теории обратных задач дифференциальных систем и теории построения систем программного движения.

Наиболее общим методом исследования устойчивости движения является метод функций Ляпунова [2]. Благодаря фундаментальным исследованиям Н. Г. Четаева [3], И. Г. Малкина [4] и др. в настоящее время известны различные модификации и обобщения классических теорем второго метода Ляпунова [2] об устойчивости невозмущенного движения, значительно расширяющие возможности качественного исследования движения в задачах нелинейной механики и особенно нелинейных процессов управления.

Существенное обобщение и развитие эти исследования получили в работах В. И. Зубова [5], В. М. Матросова [6], T. Yoshizawa [7], А. М. Самойленко [8] и других авторов, в которых основные теоремы Ляпунова и их различные модификации обобщаются на случай устойчивости интегральных множеств с помощью функции Ляпунова вида $V(\rho, t)$, где $\rho = \rho(x, \Lambda(t))$ — расстояние от изображающей точки x до множества $\Lambda(t)$.

Применение общих теорем об устойчивости множества [5 – 7] в решении задачи устойчивости программного движения вызывает трудности, связанные с построением функции Ляпунова вида $V(\rho, t)$.

Учитывая сложность построения функции $V(\rho, t)$, как функции от расстояния ρ, в задаче построения уравнений устойчивого программного движения [1] обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) используется аналитическое описание множества (заданных свойств движения) и, по-существу, задача исследования устойчивости множества сводится к исследованию устойчивости тривиального решения некоторой системы.

Впервые задача о стохастической устойчивости невозмущенного движения методом функций Ляпунова исследовалась в [9, 10]. В классе ОДУ при случайных возмущениях из класса винеровских процессов (как частный случай процессов с независимыми приращениями) методом функций Ляпунова в [11] доказаны теоремы о стохастической устойчивости невозмущенного движения. В этом же классе в [11 – 14] доказаны теоремы о стохастической устойчивости инвариантных множеств с помощью функций Ляпунова вида $V(\rho, t)$.

Достаточные условия устойчивости аналитически заданного интегрального многообразия [15] в классе ОДУ обобщаются в [16] на класс стохастических дифференциальных уравнений при наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов. Задача о стохастической устойчивости при случайных возмущениях из класса процессов с независимыми приращениями для невозмущенного движения рассматривалась в [17], а для аналитически заданного интегрального многообразия — в [18].

В монографиях А. М. Летова [19], Н. Н. Красовского [20] и др. ставятся и решаются в классе ОДУ различные задачи об оптимальной стабилизации невозмущенного движения, метод решения которых заключается [20] в соответствующей модификации теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Говоря о стохастической постановке, отметим, что в работах Н. Н. Красовского и Э. А. Лидского [21] результаты А. М. Летова [22] об аналитическом конструировании регулятора обобщаются с ОДУ на некоторый класс стохастических уравнений. Обобщение теоремы Н. Н. Красовского [20] об оптимальной стабилизации невозмущеного движения в классе ОДУ на класс уравнений диффузионного типа проведено в работах Р. З. Хасьминского [11, 23] и М. Б. Невельсона, Р. З. Хасьминского [24]. В работе [25] для некоторых случаев уравнений диффузии аналитически строится управление u, разрешающее задачу об оптимальной стабилизации. Дальнейшее развитие методов решения стохастических задач оптимизации невозмущенного движения, а также их модификация получены в работах [26, 27].

В данной работе рассматривается задача об оптимальной стабилизации аналитически заданного интегрального многообразия в классе стохастических дифференциальных уравнений, которая, с одной стороны, обобщает постановку задачи Р. З. Хасьминского [11] об оптимальной стабилизации невозмущенного движения стохастического уравнения Ито, а с другой — распространяет на стохастический случай теорему [28] об оптимальной стабилизации аналитически заданного интегрального многообразия $\Lambda(t)$ в классе ОДУ.

Пусть заданы:

1) управляемая система стохастических дифференциальных уравнений вида

$$dx = X(x,u,t)dt + \sigma(x,u,t)dw(t) + \int\limits_{R^n} f(x,u,t,v)\tilde{\nu}(dt,dv), \tag{1}$$

где $X(x,u,t)$, $\sigma(x,u,t)$, $f(x,u,t,v)$ неслучайны, X, f — векторные функции со значениями в R^n, $t \geq 0$, $x \in R^n$, $u \in R^k$, $v \in R^n$, $\sigma(x,u,t)$ — матричная функция размера $n \times m$, $w(t)$ — m-мерный винеровский процесс с независимыми компонентами, $\tilde{\nu}(t,A) = \nu(t,A) - t\Pi(A)$, $\nu(t,A)$ — пуассоновская мера на R^n, $E\nu(t,A) = t\Pi(A)$, процесс $w(t)$ и мера $\nu(t,A)$ независимы между собой, $\Pi(A)$ — мера на σ-алгебре борелевских множеств R^n. Предполагаем, что управление u в системе (1) выбирается в виде обратной связи, т. е. функции $u = u(x(t),t)$;

2) программное движение со свойствами в виде интегрального многообразия

$$\Lambda(t)\colon \lambda(x,t)=0, \quad \lambda=\lambda(x,t)\in C^{21}_{xt}, \quad \lambda\in R^1, \tag{2}$$

уравнения (1);

3) некоторый функционал

$$J^{x_0,t_0}(u)=\int\limits_{t_0}^{\infty} EW\left(\lambda\left(x^{x_0,t_0}(t),t\right);x^{x_0,t_0}(t),u\left(x^{x_0,t_0}(t),t\right),t\right)dt, \tag{3}$$

где (x_0,t_0) — фиксированная начальная точка.

Требуется найти управляющее воздействие $u^0(x,t)$, которое обеспечивает устойчивость в целом в среднем интегрального многообразия (2). При этом, каковы бы ни были другие допустимые управляющие воздействия $u^*(x,t)$, должно выполняться неравенство $J(u^0)\le J(u^*)$, т. е. управление u^0 решает задачу минимизации функционала (3).

Определение 1. *Интегральным многообразием уравнения (1) называется гладкая поверхность* $\Lambda(t)$ *такая, что из условия* $(x(t_0),t_0)\in\Lambda(t_0)$ *следует, что с вероятностью 1* $(x(t),t)\in\Lambda(t)$ *при всех* $t\ge t_0$.

В дальнейшем предполагаем, что коэффициенты системы (1) и управление $u=u(x,t)$ удовлетворяют следующим условиям:

i) существует такая постоянная $L>0$, что

$$\|X(x,u,t)\|^2+\|\sigma(x,u,t)\|^2+\int\limits_{R^n}\|f(x,u,t,v)\|^2\Pi(dv)\le L(1+\|x\|^2)\ \forall x\in R^n,\ u\in R^k,\ t\ge 0;$$

ii) функции $X(x,u(x,t),t)$, $\sigma(x,u(x,t),t)$, $f(x,u(x,t),t,v)$ непрерывны по совокупности аргументов;

iii) выполнено локальное условие Липшица по x, т. е. для любого $R>0$ найдется такая постоянная $C_R>0$, что при $\|x\|\le R$, $\|y\|\le R$

$$\|X(x,u(x,t),t)-X(y,u(y,t),t)\|^2+\|\sigma(x,u(x,t),t)-\sigma(y,u(y,t),t)\|^2+$$
$$+\int\limits_{R^n}\|f(x,u(x,t),t,v)-f(y,u(y,t),t,v)\|^2\,\Pi(dv)\le C_R\|x-y\|^2.$$

Согласно [17, с. 276], условия i) – iii) обеспечивают существование и единственность с точностью до стохастической эквивалентности решения $x^{x_0,t_0}(t)$ (1) с начальным условием $x(t_0)=x_0$, являющегося непрерывным справа с вероятностью 1 строго марковским случайным процессом.

Управления, удовлетворяющие условиям ii), iii), называются допустимыми для задачи минимизации (1), (3). Класс допустимых управлений обозначим U.

Определение 2. *Функцию* $a(t)$ *назовем функцией класса* K $(a\in K)$, *если* $a(t)$ *— непрерывная, строго возрастающая функция и* $a(0)=0$.

Будем рассматривать функции Ляпунова $V(\lambda; x, t)$, принадлежащие $C^{221}_{\lambda xt}\colon R^1 \times R^n \times \times R^+ \to R^+$ и такие, что $V(0; x, t) \equiv 0$. Обозначим $\widetilde{V}(x,t) = V(\lambda(x,t), x, t)$. Очевидно, что $\widetilde{V}(x,t) \in C^{21}_{xt}$. Рассмотрим такие функции Ляпунова, чтобы выполнялись неравенства

$$\int\limits_{R^n} \left| \left[\widetilde{V}(x + f(x,u,t,v), t) - \widetilde{V}(x,t) - \left(\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial x_i} \right)^T f_i(x,u,t,v) \right] \right| \Pi(dv) < \infty,$$

$$\int\limits_{R^n} \left| \left[\widetilde{V}(x + f(x,u,t,v), t) - \widetilde{V}(x,t) - \left(\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial x_i} \right)^T f_i(x,u,t,v) \right] \right|^2 \Pi(dv) < \infty.$$

Для каждого $u \in U$ введем производящий оператор

$$L_u V(\lambda(x,t), x, t) = L_u \tilde{V}(x,t) = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_i} \right)^T X_i + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x_i \partial x_j} \sigma_{ik} \sigma^T_{jk} \right] +$$

$$+ \int\limits_{R^n} \left[\tilde{V}(x + f(x,u,t,v), t) - \tilde{V}(x,t) - \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_i} \right)^T f_i(x,u,t,v) \right] \Pi(dv).$$

Будем изучать устойчивость в среднем интегрального многообразия (2) в смысле следующего определения.

Определение 3. *Интегральное многообразие $\Lambda(t)$ уравнения (1), определенное формулой (2), называется устойчивым в среднем при $t \geq t_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $r > 0$, что из неравенства $\rho(x_0, \Lambda(t_0)) < r$ следует*

$$E\rho\left(x^{x_0,t_0}(t), \Lambda(t)\right) < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

Определение 4. *Интегральное многообразие $\Lambda(t)$ называется асимптотически устойчивым в среднем при $t \geq t_0$, если оно устойчиво в среднем и существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $\rho(x_0, \Lambda(t_0)) < \delta$ следует*

$$\lim_{t \to \infty} E\rho(x^{x_0,t_0}(t), \Lambda(t)) = 0. \tag{4}$$

Определение 5. *Интегральное многообразие $\Lambda(t)$ называется устойчивым в целом в среднем при $t \geq t_0$, если оно устойчиво в среднем, а соотношение (4) выполняется для всех $x_0 \in R^n$.*

Теорема 1. *Пусть для уравнения (1) существуют функция Ляпунова $V(\lambda; x, t) \in C^{221}_{\lambda xt}$ и функция $u = u^0(x,t) \in U$, удовлетворяющие в области $\lambda \in R^1$, $x \in R^n$, $t \geq 0$ следующим условиям:*

1) $a(|\lambda|) \leq V(\lambda; x, t) \leq b(|\lambda|)$, $a, b \in K$, причем функция $a(t)$ выпукла вниз, а $b(t)$ удовлетворяет условию $\exists\, C_1 > 0$: $b(t) \leq C_1 t$;

2) $W(\lambda, x, u, t) \geq c(|\lambda|)$, $c \in K$, функция $c(t)$ выпукла вниз;

3) функция $\lambda(x,t) \in C^{21}_{xt}$ удовлетворяет условиям:

a) существует такое $C_2 > 0$, что $|L_u|\lambda(x,t)|| \leq C_2|\lambda(x,t)|$, *б)* $|\lambda(x,t)| \geq \alpha(\rho(x,\Lambda(t)))$, $\alpha \in K$, $\alpha(t)$ *выпукла вниз,*

в) существует такие $C_3 > 0$, $p > 0$, *что* $|\lambda(x,t)| \leq C_3(|x|^p + 1)$.

Кроме того, выполнены следующие условия:

4) $L_{u^0}V(\lambda(x,t);x,t) + W(\lambda(x,t),x,u^0(x,t),t) \equiv 0$;

5) $L_uV(\lambda(x,t);x,t) + W(\lambda(x,t),x,u,t) \geq 0$.

Тогда управляющая функция $u^0(x,t)$ *разрешает задачу оптимизации в смысле критерия качества (3), при этом* $u^0(x,t)$ *стабилизирует систему (1) до устойчивости в среднем в целом интегрального многообразия* $\Lambda(t)$.

Доказательство. Пусть $u = u(x,t)$ — произвольное допустимое управление. Из условий 1 и 3 в) следует существование математического ожидания

$$\mathrm{E}V\left(\lambda\left(x_u^{x_0,t_0}(t),t\right);x_u^{x_0,t_0}(t),t\right).$$

Применяя формулу Ито, получаем

$$\mathrm{E}V\left(\lambda\left(x_u^{x_0,t_0}(t),t\right),x_u^{x_0,t_0}(t),t\right) - V(\lambda(x_0,t_0),x_0,t_0) =$$

$$= \mathrm{E}\int_{t_0}^{t} L_uV\left(\lambda\left(x_u^{x_0,t_0}(s),s\right);x_u^{x_0,t_0}(s),s\right)ds. \tag{5}$$

Полагая в (5) $u = u^0(x,t)$ и применяя условие 4, находим

$$\mathrm{E}V\left(\lambda\left(x_{u^0}^{x_0,t_0}(t),t\right),x_{u^0}^{x_0,t_0}(t),t\right) \leq V(\lambda(x_0,t_0),x_0,t_0).$$

Используя условия 1 и 3 в), имеем

$$\mathrm{E}a(|\lambda(x_{u^0}^{x_0,t_0}(t),t)|) \leq b(|\lambda(x_0,t_0)|). \tag{6}$$

В силу определения $\Lambda(t)$, непрерывности $\lambda(x,t)$ и свойств функции $b(s)$ выражение справа в (6) можно сделать столь угодно малым надлежащим выбором такого r, что $\rho(x_0,\Lambda(t_0)) < r$. Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $r > 0$, что если $\rho(x_0,\Lambda(t_0)) < r$, то

$$b(|\lambda(x_0,t_0)|) < \varepsilon. \tag{7}$$

С другой стороны, в силу неравенства Иенсена, из (6) и (7) получаем оценку

$$\mathrm{E}\left|\lambda\left(x_{u^0}^{x_0,t_0}(t),t\right)\right| \leq a^{-1}(\varepsilon).$$

Отсюда в силу условия 3 б) имеем

$$\mathrm{E}\alpha\left(\rho(x_{u^0}^{x_0,t_0}(t),\Lambda(t))\right) \leq a^{-1}(\varepsilon).$$

Снова используя неравенство Иенсена и свойства функции класса Хана K, получаем

$$\mathrm{E}\rho\left(x_{u^0}^{x_0,t_0}(t),\Lambda(t)\right) \leq \alpha^{-1}(a^{-1}(\varepsilon)),$$

что доказывает устойчивость в среднем интегрального многообразия $\Lambda(t)$.

Далее, из (5) и условия 4 имеем

$$\mathrm{E}\int\limits_{t_0}^{t} W\left(\lambda\left(x_{u^0}^{x_0,t_0}(s),s\right),x_{u^0}^{x_0,t_0}(s),s\right)ds =$$

$$= V(\lambda(x_0,t_0),x_0,t_0) - \mathrm{E}V\left(\lambda\left(x_{u^0}^{x_0,t_0}(t),t\right),x_{u^0}^{x_0,t_0}(t),t\right). \tag{8}$$

Отсюда следует неравенство $J^{x_0,t_0} < \infty$. Из этого неравенства и условия 2 имеем

$$\mathrm{E}\int\limits_{t_0}^{\infty} c\left(\left|\lambda\left(x_{u^0}^{x_0,t_0}(t),t\right)\right|\right)dt < \infty,$$

откуда в силу выпуклости функции $c(s)$ получаем оценку

$$c\left(\mathrm{E}\int\limits_{t_0}^{\infty}\left|\lambda\left(x_{u^0}^{x_0,t_0}(t),t\right)\right|dt\right) < \infty,$$

поэтому и

$$\mathrm{E}\int\limits_{t_0}^{\infty}\left|\lambda\left(x_{u^0}^{x_0,t_0}(t),t\right)\right|dt < \infty. \tag{9}$$

Применяя к функции $|\lambda(x,t)|$ формулу Ито и учитывая условие 3 а), находим

$$\mathrm{E}\left|\lambda\left(x_{u^0}^{x_0,t_0}(t+h),t+h\right)\right| - \mathrm{E}\left|\lambda\left(x_{u^0}^{x_0,t_0}(t),t\right)\right| \le C_2\int\limits_{t}^{t+h}\mathrm{E}\left|\lambda\left(x_{u^0}^{x_0,t_0}(s),s\right)\right|ds,$$

поэтому

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{E}\left|\lambda\left(x_{u^0}^{x_0,t_0}(t),t\right)\right|\right| \le C\mathrm{E}\left|\lambda\left(x_{u^0}^{x_0,t_0}(t),t\right)\right|.$$

Отсюда и из (9) следует, что

$$\mathrm{E}\left|\lambda\left(x_{u^0}^{x_0,t_0}(t),t\right)\right| \to 0 \quad \text{при} \quad t\to\infty. \tag{10}$$

Из (10) с учетом условия 3 б) очевидным образом теперь следует устойчивость в целом в среднем интегрального многообразия $\Lambda(t)$.

Покажем теперь, что $u = u^0(x,t)$ минимизирует функционал (3).

Действительно, в силу условия 1

$$\mathrm{E}V\left(\lambda\left(x_{u^0}^{x_0,t_0}(t),t\right);x_{u^0}^{x_0,t_0}(t),t\right) \le \mathrm{E}b\left(\left|\lambda\left(x_{u^0}^{x_0,t_0}(t),t\right)\right|\right) \to 0 \quad \text{при} \quad t\to\infty.$$

Поэтому, переходя в (8) к пределу при $t \to \infty$, имеем

$$J^{x_0,t_0}(u^0) = V(\lambda(x_0,t_0),x_0,t_0). \tag{11}$$

Пусть $u = u(x,t)$ — любое другое допустимое управление, для которого $J^{x_0,t_0}(u) < < \infty$. Для него, аналогично выкладкам для u^0, получаем

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}V\left(\lambda\left(x_u^{x_0,t_0}(t),t\right);x_u^{x_0,t_0}(t),t\right) = 0.$$

Из этого равенства, (5) и условия 5 находим

$$\mathrm{E}\int\limits_{t_0}^{t} W\left(\lambda\left(x_u^{x_0,t_0}(s),s\right);x_u^{x_0,t_0}(s),u\left(x_u^{x_0,t_0}(s),s\right),s\right)ds \geq V(\lambda(x_0,t_0),x_0,t_0).$$

Отсюда и из (11) следует, что

$$\min_{u\in U} J^{x_0,t_0}(u) = J^{x_0,t_0}(u^0),$$

что и доказывает теорему.

Линейно-квадратическая задача. Применим теорему 1 к исследованию линейного относительно $x \in R^1$ и $u \in R^1$ уравнения

$$dx = \left[g(t)dt + \sigma(t)d\omega + \int f(t,v)\widetilde{\nu}(dt,dv)\right]x + \left[h(t)dt + \varphi(t)d\omega + \int q(t,v)\widetilde{\nu}(dt,dv)\right]u, \tag{12}$$

где $g(t), \sigma(t), f(t,v), h(t), \varphi(t), q(t,v)$ — непрерывные ограниченные функции по времени.

Рассмотрим задачу об оптимальной стабилизации системы (12) при критерии качества с функцией

$$W(x,u,t) = p(t)x^2 + \gamma u^2,$$

где $p(t) > 0$ при $t \geq t_0$, $\gamma > 0$.

Будем искать оптимальную функцию Ляпунова $V(x,t)$, удовлетворяющую условиям теоремы, в виде неотрицательной функции

$$V(x,t) = B(t)x^2. \tag{13}$$

Уравнение Беллмана

$$\min_{u\in(-\infty,\infty)} \left[L_u V(x,t) + W(x,u,t)\right] = 0,$$

связывающее оптимальную функцию Ляпунова $V(x,t)$ и оптимальное управление $u_0(x,t)$, имеет вид

$$\frac{dB}{dt}x^2 + 2Bg(t)x^2 + B\sigma^2(t)x^2 + \int B(t)f^2(t,v)x^2\Pi(dv) + p(t)x^2 =$$

$$= -\min_{u\in(-\infty,\infty)}\left\{u\left[2Bh(t)x + 2B\sigma(t)\varphi(t)x + 2\int B(t)f(t,v)q(t,v)x\Pi(dv)\right] + \right.$$

$$\left. + u^2\left[B\varphi^2(t) + \gamma + \int B(t)q^2(t,v)\right]\Pi(dv)\right\} =$$

$$= -u_0\left[2Bh(t)x + 2B\sigma(t)\varphi(t)x + 2\int B(t)f(t,v)q(t,v)x\Pi(dv)\right] -$$

$$- u_0^2\left[B\varphi^2(t) + \gamma + \int B(t)q^2(t,v)\Pi(dv)\right]. \tag{14}$$

Функция $u_0(x,t)$ в (14) такова:

$$u_0(x,t) = -\frac{B(t)h(t)x + B(t)\sigma(t)\varphi(t)x + \int B(t)f(t,v)q(t,v)x\Pi(dv)}{\gamma + B(t)\varphi^2(t) + \int B(t)q^2(t,v)\Pi(dv)}. \tag{15}$$

Оптимальное управление линейно по x, оптимальная функция Ляпунова задается формулой (13).

Из (14) и (15) для определения функции $B(t)$ получаем уравнение

$$\frac{dB}{dt} + 2Bg(t) + B\sigma^2(t) + \int B(t)f^2(t,v)\Pi(dv) + p(t) =$$

$$= \frac{\left(Bh(t) + B\sigma(t)\varphi(t) + \int B(t)f(t,v)q(t,v)\Pi(dv)\right)^2}{\gamma + B\varphi^2(t) + \int B(t)q^2(t,v)\Pi(dv)}. \tag{16}$$

Из теоремы 1 следует такое утверждение.

Лемма 1. *Если уравнение (16) имеет ограниченное положительно определенное при всех $t \geq t_0$ решение $B(t)$, то управление (15) доставляет минимум функционалу*

$$J^{x_0,t_0}(u) = \int\limits_{t_0}^{\infty} \mathrm{E}\left[p(t)\left(x_u^{x_0,t_0}(t)\right)^2 + \gamma u^2\left(x_u^{x_0,t_0}(t),t\right)\right]dt.$$

Сформулируем условия существования ограниченного положительно определенного решения уравнения (16).

Теорема 2. *Если существует линейное допустимое управление $u_1(x,t) = \mu(t)x$, стабилизирующее систему (5) до экспоненциально устойчивой в среднем квадратическом, то для любого $\gamma > 0$ и любой положительно определенной непрерывной ограниченной функции $p(t)$ существует линейное управление $u_0(x,t) \in U$, оптимальное в смысле критерия качества $J^{x_0,t_0}(u)$. Управление $u_0(x,t)$ также стабилизирует уравнение (12) до экспоненциально устойчивой в среднем квадратическом системы. При этом*

$$J^{x_0,t_0}(u_0) = \min_{u\in U} J^{x_0,t_0}(u) = V(x_0,t_0) = B_0(t_0)x_0^2,$$

где $B_0(t_0)$ — единственное ограниченное положительно определенное решение уравнения (16).

Доказательство. Определим функцию $V_1^T(x, t_0)$ формулой

$$V_1^T(x, t_0) = \int\limits_{t_0}^{T} \mathrm{E}W\left(x_{u_1}^{x_0,t_0}(s), u_1(x_{u_1}^{x_0,t_0}(s), s), s\right) ds.$$

В силу равенства

$$V_1^T(x, t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} \mathrm{E}W\left(x_{u_1}^{x_0,t_0}(s), u_1\left(x_{u_1}^{x_0,t_0}(s), s\right), s\right) ds + \mathrm{E}V_1^T\left(x^{x_0,t_0}(t_0+\Delta), t_0+\Delta\right)$$

и формулы Ито получим

$$L_{u_1}V_1^T + p(t_0)x^2 + \gamma u_1^2(x, t_0) = 0, \quad V_1^T(x, T) \equiv 0. \tag{17}$$

С другой стороны, из линейности $u_1(x, t)$ следует, что процесс $x_{u_1}(t)$ описывается системой линейных стохастических уравнений, и, значит, $V_1^T(x, t_0)$ является квадратичной формой по x :

$$V_1^T(x, t_0) = B_1^T(t_0)x^2.$$

Отсюда и из структуры уравнения (8) следует, что это уравнение можно рассматривать как линейное дифференциальное уравнение относительно $B_1^T(t_0)$. Коэффициенты этого уравнения не зависят от T. Кроме того, из экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом уравнения (12) при $u = u_1(x, t)$ и неравенства $W(x, u, t) \le k_1|x|^2$ следуют ограниченность $B_1^T(t_0)$ и существование предела

$$V_1(x, t_0) = \lim_{T\to\infty} V_1^T(x, t_0) = B_1(t_0)x^2.$$

Отсюда и из леммы 4.1 [11, с. 339] находим, что $B_1(t_0)$ также непрерывно дифференцируема и удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению. Следовательно, функция $V_1(x, t_0)$ удовлетворяет уравнению

$$L_{u_1}V_1 + p(t_0)x^2 + \gamma u_1^2(x, t_0) = 0. \tag{18}$$

Определим теперь функцию $u_2(x, t_0)$ соотношением

$$\min_{u\in(-\infty,\infty)} \left[L_u V_1 + p(t_0)x^2 + \gamma u^2\right] = L_{u_2}V_1 + p(t_0)x^2 + \gamma u_2^2. \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует неравенство

$$L_{u_2}V_1 + p(t_0)x^2 + \gamma u_2^2 \le 0. \tag{20}$$

Кроме того, из (19) получаем

$$u_2(x,t_0) = -\frac{B_1(t_0)h(t_0)x + B_1(t_0)\sigma(t_0)\varphi(t_0)x + \int B_1(t_0)f(t_0,v)q(t_0,v)x\Pi(dv)}{\gamma + B_1(t_0)\varphi^2(t_0) + \int B_1(t_0)q^2(t_0,v)\Pi(dv)}.$$

Поскольку $h(t_0)$, $\varphi(t_0)$, $\sigma(t_0)$, $\varphi(t_0)$, $B_1(t_0)$ ограничены, а

$$B_1(t_0)\varphi^2(t_0) \geq 0, \quad \int B_1(t_0)q^2(t,v)\Pi(dv) \geq 0,$$

то $u_2(x,t_0)$ — линейная форма с ограниченными коэффициентами. Пусть теперь $V_2^T(x,t_0)$ задается формулой

$$V_2^T(x,t_0) = \int\limits_{t_0}^{T} \mathrm{E}W\left(x_{u_2}^{x_0,t_0}(s), u_2\left(x_{u_2}^{x_0,t_0}(s),s\right),s\right)ds.$$

Аналогично (17) для $V_2^T(x,t_0)$ получаем соотношения

$$L_{u_2}V_2^T + p(t_0)x^2 + \gamma u_2^2(x,t_0) = 0, \quad V_2^T(x,T) \equiv 0. \tag{21}$$

Отсюда и из (20) для разности

$$V_1(x,t_0) - V_2^T(x,t_0) = \Phi^T(x,t_0)$$

следуют оценки

$$L_{u_2}\Phi^T(x,t_0) \leq 0, \quad \Phi^T(x,T) \geq 0.$$

Из этих оценок и формулы Ито

$$\mathrm{E}\Phi^T(x^{x_0,t_0}(T),T) - \Phi^T(x,t_0) = \int\limits_{t_0}^{T} EL_{u_2}\Phi^T(x^{x_0,t_0}(s),s)ds$$

следуют неравенства

$$-\Phi^T(x,t_0) \leq \mathrm{E}\Phi^T(x_{u_2}^{x_0,t_0}(T),T) - \Phi^T(x,t_0) \leq 0.$$

Таким образом,

$$\Phi^T(x,t_0) = V_1(x,t_0) - V_2^T(x,t_0) \geq 0$$

и при любом $T \geq t_0$ выполняется неравенство

$$V_1(x,t_0) \geq V_2^T(x,t_0). \tag{22}$$

Поэтому интеграл

$$V_2(x,t_0) = \int\limits_{t_0}^{T} \mathrm{E}W\left(x_{u_2}^{x_0,t_0}(s), u_2\left(x_{u_2}^{x_0,t_0}(s),s\right),s\right)ds$$

сходится. Точно так же, как и выше, отсюда и из (21) получаем, что $V_2(x,t_0) = B_2(t_0)x^2$ тоже удовлетворяет уравнению (21). Переходя в (22) к пределу при $T \to \infty$, имеем

$$B_2(t_0) \le B_1(t_0).$$

Действуя далее аналогичным образом, находим функции $u_3(x,t_0)$, $u_4(x,t_0)$, ... из соотношений

$$\min_{u \in (-\infty,\infty)} \left[L_u V_{n-1} + p(t_0)x^2 + \gamma u^2 \right] = L_{u_n} V_{n-1} + p(t_0)x^2 + \gamma u_n^2. \tag{23}$$

При этом

$$u_n(x,t_0) = -\frac{B_{n-1}(t_0)h(t_0)x + B_{n-1}(t_0)\sigma(t_0)\varphi(t_0)x + \int B_{n-1}(t_0)f(t_0,v)q(t_0,v)x\Pi(dv)}{\gamma + B_{n-1}(t_0)\varphi^2(t_0) + \int B_{n-1}(t_0)q^2(t_0,v)\Pi(dv)}. \tag{24}$$

Функции $V_3(x,t_0), V_4(x,t_0), \ldots$ определяются равенствами

$$V_n(x,t_0) = \int\limits_{t_0}^{\infty} \mathrm{E}W\left(x_{u_n}^{x_0,t_0}(s), u_n\left(x_{u_n}^{x_0,t_0}(s), s\right), s\right) ds. \tag{25}$$

Аналогично предыдущему интеграл в (25) сходится и справедливо равенство

$$L_{u_n} V_n + p(t_0)x^2 + \gamma u_n^2 = 0. \tag{26}$$

Кроме того,

$$B_1(t_0) \ge B_2(t_0) \ge \ldots \ge B_n(t_0) \ge \ldots.$$

Предел монотонно убывающей последовательности функций $B_1(t_0), B_2(t_0), \ldots, B_n(t_0), \ldots$ существует. Обозначим его $B_0(t_0)$, тогда

$$V(x,t_0) = B_0(t_0)x^2.$$

Отсюда и из (24) следует существование предела управлений

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x,t_0) = u_0(x,t_0) = \mu(t_0)x. \tag{27}$$

Из (24) следует также, что функция $u_0(x,t_0)$ линейна по x. Из (23), (26) и (27) следует, что функции $V(x,t_0)$ и $u_0(x,t_0)$ связаны уравнением Беллмана

$$\min_{u \in (-\infty,\infty)} \left[L_u V + p(t_0)x^2 + \gamma u^2 \right] = L_{u_0} V + p(t_0)x^2 + \gamma u_0^2 = 0.$$

Отсюда и из теоремы 1 следуют все утверждения теоремы 2.

Литература

1. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. — М., 1986. — 224 с.
2. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — М., 1950. — 472 с.
3. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. — М.: Наука, 1965. — 208 с.
4. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. — М., 1966. — 530 с.
5. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. — М., 1973. — 272 с.
6. *Матросов В. М.* Об устойчивости множеств неизолированных положений равновесия систем // Труды КАИ. — 1965. — Вып. 89. — С. 20 – 32.
7. *Yoshizawa T.* Stability theory by Liapunov's second method. — Tokyo: Math. Soc. Jap., 1966. — 224 p.
8. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 303 с.
9. *Bertram J. E., Sarachik P. E.* Stability of circuits with randomly time-varying parameters // Proc. Int. Circ. and Inform. Theory. Los Angeles. Calif. IRE Trans. CT-6. — 1959. — P. 260 – 270.
10. *Кац И. Я., Красовский Н. Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и механика. — 1960. — **27**, вып. 5. — С. 809 – 823.
11. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М., 1969. – 368 с.
12. *Samoilenko A. M., Stanzhytskyi O. M.* Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations. — Singapore: World Sci. Publ., 2011. — 312 p.
13. *Станжицкий А. Н.* Об устойчивости по вероятности инвариантных множеств систем со случайными возмущениями // Нелінійні коливання. — 1998. — **1**, № 2. — С. 138 – 142.
14. *Станжицький О. М.* Дослідження інваріантних множин стохастичних систем Іто за допомогою функцій Ляпунова // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 2. — С. 282 – 285.
15. *Галиуллин А. С.* Устойчивость движения. — М.: Наука, 1973. — 104 с.
16. *Тлеубергенов М. И.* Об устойчивости по вероятности программного движения // Изв. МОН РК, НАН РК. — 2002. — № 3. — С. 47 – 53.
17. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Наук. думка, 1968. — 356 с.
18. *Василина Г. К., Тлеубергенов М. И.* О решении задачи стохастической устойчивости интегрального многообразия вторым методом Ляпунова // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, № 1. — С. 14 – 27.
19. *Летов А. М.* Динамика полета и управление. — М., 1969. — 360 с.
20. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. Дополнение к книге Малкина И. Г. Теория устойчивости движения. — М., 1966. — 530 с.
21. *Красовский Н. Н., Лидский Э. А.* Аналитическое конструирование регуляторов. I, II, III // Автоматика и телемеханика. — 1961. — **22**, № 9. — С. 1145 – 1150; № 10. — С. 1273 – 1278; № 11. — С. 1425 – 1431.
22. *Летов А. М.* Аналитическое конструирование регуляторов. I – V // Автоматика и телемеханика. — 1960. — **21**, № 4. — С. 436 – 441; № 5. — С. 561 – 568; № 6. — С. 661 – 665; 1961. — **22**, № 4. — С. 425-435; 1962. — **23**, № 11. — С. 1405 – 1413.
23. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость стохастических дифференциальных уравнений с переключением режима // Проблемы передачи информации. — 2012. — **48**, вып. 3. — С. 70 – 82.
24. *Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.* Устойчивость и стабилизация стохастических дифференциальных уравнений // Летняя школа по теории вероятностей и мат. статистике. — Киев, 1969. — С. 68 – 121.
25. *Phillis Y. A.* Optimal stabilization of stochastic systems // J. Math. Anal. and Appl. — 1983. — **94**, № 2. — P. 489 – 500.

26. *Валеев К. Г., Карелова О. Л., Горелов В. И.* Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. — М.: Изд-во Рос. ун-та дружбы народов, 1996. — 258 с.

27. *Рачков М. Ю.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. — М.: МГИУ, 2005. — 136 с.

28. *Тлеубергенов М. И.* Об оптимальной стабилизации программного движения // Материалы V конф. молодых ученых Ун-та дружбы народов (мат., физ., хим.). — М., 1982. — Ч. I. — С. 9-13. — Деп. в ВИНИТИ, № 3814 – 82.

Получено 23.02.16,
после доработки — 12.05.16