УДК 517.911

СИНГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, НЕ РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ

А. Е. Зернов, Ю. В. Кузина

Южноукр. нац. пед. ун-т им. К. Д. Ушинского
ул. Старопортофранковская, 26, Одесса, 65020, Украина

For a singular Cauchy problem

$$\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} a_{ijk}t^i(x(t))^j(x'(t))^k + \varphi(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad x(0) = 0,$$

where $N \geq 2$ *and* a_{ijk} *are constants,* $a_{00k} = 0,\ k \in \{0, 1, \ldots, N\},\ a_{100} \neq 0,\ a_{010} \neq 0,\ a_{ijk} = 0, 1 \leq \leq i + j < m,\ k \in \{1, \ldots, N\},\ 2 \leq m \leq N$, *and the function* φ *is small in a certain sense, we find a nonempty set of continuously differentiable solutions* $x\colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$, *where* ρ *is sufficiently small, such that*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k t^k + o(t^m), \quad t \to +0,$$

where $c_1, \ldots, c_m$ *are known constants.*

Для сингулярної задачі Коші

$$\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} a_{ijk}t^i(x(t))^j(x'(t))^k + \varphi(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad x(0) = 0,$$

де $N \geq 2, a_{ijk}$ *— сталі,* $a_{00k} = 0,\ k \in \{0, 1, \ldots, N\},\ a_{100} \neq 0,\ a_{010} \neq 0,\ a_{ijk} = 0, 1 \leq i + j < m,\ k \in \{1, \ldots, N\},\ 2 \leq m \leq N$, *функція* φ *є малою в деякому сенсі, знайдено непорожню множину неперервно диференційовних розв'язків* $x\colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$ *(*ρ *є достатньо малим) таких, що*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k t^k + o(t^m), \quad t \to +0,$$

де $c_1, \ldots, c_m$ *— відомі сталі.*

К настоящему времени сингулярная задача Коши вида

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = 0,$$

изучена достаточно подробно. Получены существенные результаты [7, 15, 17, 18] о разрешимости и числе решений и об асимптотическом поведении решений [3, 7]. В то же время для задачи Коши вида

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad x(0) = 0,$$

хорошо исследованы вопросы о существовании и единственности решений [1, 2, 5, 17, 20], а также о сходимости к решению различных последовательностей приближений [4, 16, 19, 21]. Однако асимптотические свойства решений такой задачи исследованы сравнительно мало даже в регулярном случае. В настоящей работе рассмотрен один класс сингулярных задач данного вида и приведены достаточные условия существования непрерывно дифференцируемых решений, определенных в некоторой (достаточно малой) правой полуокрестности начальной точки и имеющих в этой полуокрестности требуемые свойства. При анализе поставленной задачи использовались методы качественной теории дифференциальных уравнений [6, 7], а также [8]. Эта работа является продолжением цикла работ авторов [9–13]. Более подробный обзор литературы, дальнейшие исследования рассматриваемой задачи, а также многочисленные примеры можно найти в [14].

Рассмотрим задачу Коши

$$P(t, x(t), x'(t)) + \varphi(t, x(t), x'(t)) = 0, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

где t —действительная переменная, $t \in (0, \tau)$, $x\colon (0, \tau) \to \mathbb{R}$ — неизвестная функция, $P\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — многочлен, определенный равенством

$$P(t, y_1, y_2) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} a_{ijk} t^i y_1^j y_2^k. \tag{3}$$

Здесь N— натуральное число, $N \geq 2$, все i, j, k — целые неотрицательные числа, все a_{ijk} — постоянные, причем $a_{00k} = 0$, $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Предполагается, что $\varphi\colon D_\varphi \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $D_\varphi \subset (0, \tau) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, имеющая определенные свойства, которые будут указаны далее. Сейчас лишь отметим, что рассматриваемые далее значения φ будут в некотором смысле малы в сравнении со значениями P.

Определение. *Решением задачи (1), (2) будем называть непрерывно дифференцируемую функцию* $x\colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$ *(*ρ *— постоянная,* $\rho \in (0, \tau)$*) со следующими свойствами:*

1) $(t, x(t), x'(t)) \in D_\varphi$, $t \in (0, \rho]$;

2) x *тождественно удовлетворяет уравнению (1) при всех* $t \in (0, \rho]$;

3) $\lim_{t\to+0} x(t) = 0$.

Исследуем вопрос о существовании решений $x\colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$ задачи (1), (2) таких, что

$$x(t) = S_m(t) + o(t^m), \quad t \to +0.$$

Здесь $\rho \in (0, \tau)$ достаточно мало, m — некоторое натуральное число, $2 \leq m \leq N$, многочлен $S_m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определяется равенством

$$S_m(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k t^k, \tag{4}$$

где все c_k — постоянные, которые однозначно выражаются только через коэффициенты a_{ijk}.

Будем предполагать, что в уравнении (1) многочлен P имеет не произвольный, а некоторый частный вид, а именно, для (3) выполнены следующие условия:

$$a_{100} \neq 0, \quad a_{010} \neq 0, \tag{5}$$

$$a_{ijk} = 0, \quad 1 \leq i + j < m, \quad k \in \{1, \dots, N\}, \tag{6}$$

для некоторого натурального $m, 2 \leq m \leq N$. Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$-\sum_{\substack{i=0 \\ i+j=m}}^{m} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=1}^{N} a_{ijk} t^i (x(t))^j (x'(t))^k = \sum_{\substack{i=0 \\ l \leq i+j \leq m}}^{m} \sum_{j=0}^{m} a_{ij0} t^i (x(t))^j +$$

$$+ \sum_{\substack{i=0 \\ i+j \geq m+1}}^{N} \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=1}^{N} a_{ijk} t^i (x(t))^j (x'(t))^k + \varphi(t, x(t), x'(t)).$$

Далее будем рассматривать именно этот специальный класс уравнений (1) с начальным условием (2).

Если потребовать, чтобы выполнялось условие

$$P\left(t, S_m(t), S'_m(t)\right) = O(t^{m+1}), \quad t \to +0, \tag{7}$$

где P, S_m определены равенствами (3), (4) соответственно, то все коэффициенты $c_1, \dots, c_m$ в (4) можно найти однозначно; в частности,

$$c_1 = -\frac{a_{100}}{a_{010}}.$$

Действительно, для каждого $n \in \{1, \dots, m\}$ обозначим через b_n коэффициент при t^n в сумме $P\left(t, S_m(t), S'_m(t)\right)$. Тогда получим

$$b_1 = a_{100} + a_{010} c_1,$$

$$b_k = a_{010} c_k + g_k(c_1, \dots, c_{k-1}), \quad k \in \{2, \dots, m\},$$

где $g_2, \dots, g_m$ — некоторые известные многочлены. Если положить, что

$$b_n = 0, \quad n \in \{1, \dots, m\}, \tag{8}$$

то условие (7) будет выполнено. Так как согласно (5) $a_{010} \neq 0$, то из системы уравнений (8) можно последовательно найти все коэффициенты $c_1, \dots, c_m$, причем единственным образом.

Очевидно, из (7) следует, что

$$\left|P(t, S_m(t), S'_m(t))\right| \leq K t^{m+1}, \quad t \in (0, \tau), \tag{9}$$

где K — некоторая положительная постоянная.

Пусть

$$D = \left\{(t, y_1, y_2) \colon t \in (0, \tau), |y_1 - S_m(t)| < t^m \gamma(t), |y_2 - S'_m(t)| < \gamma(t)\right\}.$$

Здесь $\gamma \colon (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — непрерывная функция, $\lim_{t\to+0} \gamma(t) = 0$, $S_m \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — многочлен, определенный равенством (4) и удовлетворяющий условию (7). Предположим, что $D \subset D_\varphi$.

Назовем *условиями (A)* совокупность следующих условий:

1) $\alpha \neq 0$, где

$$\alpha = -\sum_{\substack{i=0\\ i+j=m}}^{m} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=1}^{N} k a_{ijk} c_1^{j+k-1}, \quad c_1 = -\frac{a_{100}}{a_{010}}; \tag{10}$$

2) $|\varphi(t, S_m(t), S'_m(t))| \leq t^m \xi(t)$, $t \in (0, \tau)$, где $\xi \colon (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — непрерывно дифференцируемая функция, при этом

$$\begin{gathered} \lim_{t\to+0} \xi(t)(\gamma(t))^{-1} = 0, \quad \lim_{t\to+0} t(\xi(t))^{-1} = L_1, \\ \lim_{t\to+0} t\xi'(t)(\xi(t))^{-1} = L_2, \quad 0 \leq L_i < +\infty, \quad i \in \{1, 2\} \end{gathered} \tag{11}$$

(из второго и третьего условий (11) следует, что $0 \leq L_2 \leq 1$ и, более того, если $L_2 < 1$, то заведомо $L_1 = 0$, поэтому второе из условий (11) является существенным только в случае, когда $L_2 = 1$);

3) $|\varphi(t_1, x, y) - \varphi(t_2, x, y)| \leq l_1(\mu)|t_1 - t_2|$, $(t_i, x, y) \in D$, $0 < \mu \leq t_i$, $i \in \{1, 2\}$, где $l_1 \colon (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — непрерывная невозрастающая функция;

4) $|\varphi(t, x_1, y_2) - \varphi(t, x_2, y_2)| \leq l_2(t)|x_1 - x_2| + l_3 t^m |y_1 - y_2|$, $(t, x_i, y_i) \in D$, $i \in \{1, 2\}$, где $l_2 \colon (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — непрерывная функция, $\lim_{t\to+0} l_2(t) = 0$, l_3 — постоянная, $0 < l_3 < |\alpha|/2$.

Обозначим через $U(\rho, M)$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u \colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$, каждая из которых удовлетворяет условиям

$$|u(t) - S_m(t)| \leq M t^m \xi(t), \quad |u'(t) - S'_m(t)| \leq |a_{010}| l_3^{-1} M \xi(t), \quad t \in (0, \rho]. \tag{12}$$

Здесь ρ, M — постоянные, $\rho \in (0, \tau)$, $M > 0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (A). Тогда:*

а) если $\alpha a_{010} > 0$, то существуют ρ, M такие, что задача (1), (2) имеет бесконечное множество решений, принадлежащих множеству $U(\rho, M)$; при этом если постоянная β удовлетворяет условию

$$|\beta - S_m(\rho)| < M \rho^m \xi(\rho), \tag{13}$$

то существует решение $x_\beta \in U(\rho, M)$ задачи (1), (2) такое, что $x_\beta(\rho) = \beta$;

б) если $\alpha a_{010} < 0$, то существуют ρ, M такие, что задача (1), (2) имеет хотя бы одно решение, принадлежащее множеству $U(\rho, M)$.

Доказательство. Вначале выберем постоянные ρ, M, q. Пусть

$$2|a_{010}||\alpha|^{-1} < q < |a_{010}|l_3^{-1}, \tag{14}$$

$$M > (KL_1 + 1)(|a_{010}| - ql_3)^{-1}, \tag{15}$$

где K — постоянная из условия (9). Условия, определяющие выбор ρ, здесь не приведены. Отметим лишь, что ρ достаточно мало и выбор ρ обеспечивает законность всех дальнейших рассуждений, в которых используется малость ρ. Далее всегда, когда требуется достаточная малость ρ, это будет специально отмечено в ходе доказательства.

Пусть B — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x\colon [0,\rho] \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|x\|_B = \max_{t\in[0,\rho]}(|x(t)| + |x'(t)|). \tag{16}$$

Обозначим через U подмножество B, каждый элемент $u\colon [0,\rho] \to \mathbb{R}$ которого удовлетворяет условиям

$$|u(t) - S_m(t)| \le Mt^m\xi(t), \quad |u'(t) - S'_m(t)| \le qM\xi(t), \quad t \in (0,\rho], \tag{17}$$

причем

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = c_1. \tag{18}$$

Кроме того, выполнено условие

$$\forall u \in U \;\; \forall\varepsilon > 0 \;\; \forall t_i \in [0,\rho], \quad i \in \{1,2\}\colon |t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow \big|u'(t_1) - u'(t_2)\big| \le \varepsilon, \tag{19}$$

где $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/(8B(t_\varepsilon))$, $B(t_\varepsilon) = t_\varepsilon^{-(m+1)}(l_1(t_\varepsilon) + 1)$, причем постоянная $t_\varepsilon \in (0,\rho)$ выбрана так, чтобы при $t \in (0, t_\varepsilon]$ одновременно выполнялись условия

$$qM\xi(t) \le \varepsilon/37 \quad \text{и} \quad (2|c_1| + 1)t \le \varepsilon/37. \tag{20}$$

Множество U является замкнутым, ограниченным, выпуклым и (в соответствии с теоремой Арцела) компактным.

Преобразуем уравнение (1) к виду

$$-\sum_{\substack{i=0 \\ i+j=m}}^{m}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{N} k a_{ijk} t^i (S_m(t))^j (S'_m(t))^{k-1}(x'(t) - S'_m(t)) = \sum_{\substack{i=0 \\ l \le i+j \le m}}^{m}\sum_{j=0}^{m} a_{ij0} t^i (x(t))^j +$$

$$+\sum_{\substack{i=0 \\ i+j \ge m+1}}^{N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{N} a_{ijk} t^i (x(t))^j (x'(t))^k + \varphi(t, x(t), x'(t)) +$$

$$+\sum_{\substack{i=0 \\ i+j=m}}^{m}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{N} a_{ijk} t^i (S_m(t))^j (S'_m(t))^k +$$

$$+\sum_{\substack{i=0 \\ i+j=m}}^{m}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{N} a_{ijk} t^i (S_m(t))^j \sum_{r=2}^{k} C_k^r (S'_m(t))^{k-r} (x'(t) - S'_m(t))^r +$$

$$+\sum_{\substack{i=0 \\ i+j=m}}^{m}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{N} a_{ijk} t^i \left((x(t))^j - (S_m(t))^j\right) (x'(t))^k \tag{21}$$

(очевидно, что правая часть (21) содержит предпоследнюю сумму только при $k \ge 2$; далее об этом не будем специально упоминать). Затем рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x'(t) = S'_m(t) + (\lambda(t))^{-1} \Bigg(\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} a_{ij0} t^i (x(t))^j +$$

$$+\sum_{\substack{i=0 \\ i+j \geqslant m+1}}^{N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{N} a_{ijk} t^i (u(t))^j (u'(t))^k + \varphi(t, u(t), u'(t)) +$$

$$+\sum_{\substack{i=0 \\ i+j=m}}^{m}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{N} a_{ijk} t^i (S_m(t))^j (S'_m(t))^k +$$

$$+\sum_{\substack{i=0 \\ i+j=m}}^{m}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{N} a_{ijk} t^i (S_m(t))^j \sum_{r=2}^{k} C_k^r \left(S'_m(t)\right)^{k-r} \left(u'(t) - S'_m(t)\right)^r +$$

$$+\sum_{\substack{i=0 \\ i+j=m}}^{m}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{N} a_{ijk} t^i \left((x(t))^j - (S_m(t))^j\right) \left(u'(t)\right)^k \Bigg), \tag{22}$$

где функция $\lambda\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определяется равенством

$$\lambda(t) = -\sum_{\substack{i=0 \\ i+j=m}}^{m}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{N} k a_{ijk} t^i (S_m(t))^j (S'_m(t))^{k-1}, \tag{23}$$

$u \in U$ — произвольная фиксированная функция. Поскольку ρ достаточно мало, то $(t, u(t), u'(t)) \in D$, $t \in (0, \rho]$, для всех $u \in U$. Отметим, что

$$\lambda(t) = (\alpha + o(1))t^m, \quad t \to +0. \tag{24}$$

Пусть

$$D_0 = \{(t, x) \colon t \in (0, \rho], \quad x \in \mathbb{R}\}. \tag{25}$$

Если $(t, x) \in D_0$, то для уравнения (22) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных, так как для любого заданного $r \in (0, \rho)$ в замкнутой подобласти $D_0(r) = \{(t, x) \colon t \in [r, \rho], x \in \in \mathbb{R}\}$ области D_0 правая часть уравнения (22) непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной x. Положим

$$\Phi_1 = \{(t, x) \colon t \in (0, \rho], |x - S_m(t)| = M t^m \xi(t)\},$$

$$D_1 = \{(t, x) \colon t \in (0, \rho], |x - S_m(t)| < M t^m \xi(t)\},$$

$$H = \{(t, x) \colon t = \rho, |x - S_m(\rho)| < M \rho^m \xi(\rho)\}.$$

Пусть вспомогательная функция $A_1 \colon D_0 \to [0, +\infty)$ определяется равенством

$$A_1(t, x) = (x - S_m(t))^2 (t^m \xi(t))^{-2}.$$

Обозначим через $a_1 \colon D_0 \to \mathbb{R}$ производную этой функции в силу уравнения (22). Если $(t, x) \in \Phi_1$, то легко видеть, что

$$a_1(t, x) = 2(t^m \xi(t))^{-2} (\lambda(t))^{-1} \left((a_{010} + o(1))(x - S_m(t))^2 + (x - S_m(t))\Lambda_1(t)\right), \quad t \to +0,$$

где

$$|\Lambda_1(t)| \le M t^m \xi(t) (q l_3 + M^{-1} + K L_1 M^{-1} + o(1)), \quad t \to +0.$$

Так как ρ достаточно мало и выполнены условия (14), (15), то, принимая во внимание (24) и равенство $M t^m \xi(t) = |x - S_m(t)|$, выполненное при $(t, x) \in \Phi_1$, получаем

$$\operatorname{sign} a_1(t, x) = \operatorname{sign} \alpha a_{010} \quad \text{при} \quad (t, x) \in \Phi_1.$$

Далее последовательно рассматриваем два случая.

I. Пусть $\alpha a_{010} > 0$. Тогда $a_1(t, x) > 0$ при $(t, x) \in \Phi_1$. Отсюда следует, что если взять произвольную точку $(t_0, x_0) \in \Phi_1$ и обозначить через $J_0 \colon (t, x_0(t))$ интегральную кривую уравнения (22), проходящую через эту точку, то при достаточно малом $\delta > 0$ будем иметь $(t, x_0(t)) \notin \overline{D_1}$ при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ (здесь $t \leq \rho$) и $(t, x_0(t)) \in D_1$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$.

Действительно, поскольку

$$A_1(t_0, x_0(t_0)) = A_1(t_0, x_0) = M^2, \quad a_1(t_0, x_0(t_0)) = a_1(t_0, x_0) > 0,$$

то при $t_0 \in (0, \rho)$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\operatorname{sign}\left(A_1(t, x_0(t)) - A_1(t_0, x_0(t_0))\right) = \operatorname{sign}(t - t_0), \quad |t - t_0| < \delta,$$

или

$$\operatorname{sign}\left(|x_0(t) - S_m(t)|\,(t^m \xi(t))^{-1} - M\right) = \operatorname{sign}(t - t_0), \quad |t - t_0| < \delta,$$

или

$$\operatorname{sign}\left(|x_0(t) - S_m(t)| - M t^m \xi(t)\right) = \operatorname{sign}(t - t_0), \quad |t - t_0| < \delta.$$

Если же $t_0 = \rho$, то существует такое $\delta > 0$, что

$$A_1(t, x_0(t)) < A_1(t_0, x_0(t_0)), \quad t \in (\rho - \delta, \rho),$$

или

$$|x_0(t) - S_m(t)|\,(t^m \xi(t))^{-1} < M, \quad t \in (\rho - \delta, \rho),$$

или

$$|x_0(t) - S_m(t)| < M t^m \xi(t), \quad t \in (\rho - \delta, \rho).$$

Утверждение доказано.

Отсюда следует, что каждая из интегральных кривых уравнения (22), пересекающих множество H, определена при $t \in (0, \rho]$ и лежит в D_1 при всех $t \in (0, \rho]$. Действительно, любая такая интегральная кривая при убывании t не может иметь общих точек с Φ_1, так как в противном случае мы получили бы противоречие с только что доказанным утверждением.

Пусть $G(\rho, x_G) \in H$ — произвольная фиксированная точка. Обозначим через $J_u\colon (t, x_u(t))$ интегральную кривую уравнения (22), проходящую через точку G. Согласно изложенному выше интегральная кривая $J_u\colon (t, x_u(t))$ лежит в D_1 при $t \in (0, \rho]$. Поэтому

$$|x_u(t) - S_m(t)| \leq M t^m \xi(t), \quad t \in (0, \rho]. \tag{26}$$

Легко видеть, что

$$\left|x_u'(t) - S_m'(t)\right| \leq q M \xi(t), \quad t \in (0, \rho]. \tag{27}$$

При доказательстве (27) используются оценки, полученные при доказательстве (26), условие (14) и достаточная малость ρ. Полагаем по определению

$$x_u(0) = 0, \quad x_u'(0) = c_1. \tag{28}$$

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$, любого $u \in U$ и любых $t_i \in [0, \rho]$, $i \in \{1, 2\}$, таких, что $|t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon)$, выполнено неравенство

$$\left|x'_u(t_1) - x'_u(t_2)\right| \le \varepsilon, \tag{29}$$

т. е. докажем, что функция $x_u \colon [0, \rho] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию (19). Для этого последовательно рассмотрим три возможных случая.

1. Если $t_i \in [0, t_\varepsilon]$, $i \in \{1, 2\}$, то в силу (20), (26) имеем

$$\begin{aligned} \left|x'_u(t_1) - x'_u(t_2)\right| \le \left|x'_u(t_1) - S'_m(t_1)\right| + \left|S'_m(t_1) - c_1\right| + \\ + \left|x'_u(t_2) - S'_m(t_2)\right| + \left|S'_m(t_2) - c_1\right| \le qM\xi(t_1) + (2|c_2| + 1)t_1 + \\ + qM\xi(t_2) + (2|c_2| + 1)t_2 \le \frac{4\varepsilon}{37} < \frac{\varepsilon}{9} < \varepsilon. \end{aligned} \tag{30}$$

2. Если $t_i \in [t_\varepsilon, \rho]$, $i \in \{1, 2\}$, и $|t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon)$, то, используя достаточную малость ρ, получаем

$$\left|x'_u(t_1) - x'_u(t_2)\right| \le \left(l_3|\alpha|^{-1} + \frac{1}{4}\right)\left|u'(t_1) - u'(t_2)\right| + (l_1(t_\varepsilon) + 1)t_\varepsilon^{-(m+1)}|t_1 - t_2|.$$

Поскольку, по предположению, $l_3|\alpha|^{-1} < \dfrac{1}{2}$, то

$$\left|x'_u(t_1) - x'_u(t_2)\right| \le \frac{3}{4}\left|u'(t_1) - u'(t_2)\right| + B(t_\varepsilon)|t_1 - t_2|.$$

В соответствии с определением множества U из условия $|t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon)$ следует, что $|u'(t_1) - u'(t_2)| \le \varepsilon$. Поэтому имеем

$$\left|x'_u(t_1) - x'_u(t_2)\right| \leqslant \frac{3}{4}\varepsilon + B(t_\varepsilon)\delta(\varepsilon) = \frac{7}{8}\varepsilon < \varepsilon. \tag{31}$$

3. Если $t_1 \in [0, t_\varepsilon]$ и $t_2 \in [t_\varepsilon, \rho]$, причем $|t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon)$ (случай, когда $t_2 \in [0, t_\varepsilon]$ и $t_1 \in [t_\varepsilon, \rho]$, причем $|t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon)$, рассматривается аналогично), то, очевидно, t_1, t_ε принадлежат отрезку $[0, t_\varepsilon]$, а t_ε, t_2 — отрезку $[t_\varepsilon, \rho]$ и при этом $|t_\varepsilon - t_2| \le |t_1 - t_2| \le \le \delta(\varepsilon)$. Поэтому можно использовать оценки, полученные в двух предыдущих случаях. В соответствии с (30) и (31)

$$\left|x'_u(t_1) - x'_u(t_2)\right| \le \left|x'_u(t_1) - x'_u(t_\varepsilon)\right| + \left|x'_u(t_\varepsilon) - x'_u(t_2)\right| \le \frac{\varepsilon}{9} + \frac{7\varepsilon}{8} < \varepsilon.$$

Неравенство (29) доказано, а значит, доказано, что $x_u \in U$.

Определим оператор $T \colon U \to U$, положив $Tu = x_u$.

Следует отметить, что зафиксированная ранее точка $G(\rho, x_G)$ множества H остается неизменной при любом выборе функции $u \in U$ в правой части уравнения (22). Следовательно, всегда выполнено условие $x_u(\rho) = x_G$.

II. Пусть $\alpha a_{010} < 0$. Тогда $a_1(t,x) < 0$ при $(t,x) \in \Phi_1$. Отсюда следует, что если взять произвольную точку $(t_0, x_0) \in \Phi_1$ и обозначить через $J_0\colon (t, x_0(t))$ интегральную кривую уравнения (22), проходящую через эту точку, то при достаточно малом $\delta > 0$ будем иметь $(t, x_0(t)) \in D_1$ при $t \in (t_0, t_0+\delta)$ (здесь $t \le \rho$) и $(t, x_0(t)) \notin \overline{D_1}$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству, проведенному в случае $\alpha a_{010} > 0$.

Докажем, что среди интегральных кривых уравнения (22), пересекающих H, хотя бы одна интегральная кривая определена при $t \in (0,\rho]$ и лежит в D_1 при всех $t \in (0,\rho]$. Действительно, пусть интегральная кривая уравнения (22) пересекает Φ_1. Тогда при последующем возрастании t она не сможет иметь общих точек с Φ_1 (в противном случае получили бы противоречие со сформулированным выше утверждением о свойствах интегральных кривых уравнения (22), пересекающих Φ_1). Значит, эта интегральная кривая пересекается с $\overline{H}$. Определим отображение $\psi\colon \Phi_1 \to \overline{H}$ так: каждой точке $P \in \Phi_1$ поставим в соответствие точку $\psi(P) \in \overline{H}$, лежащую на той же интегральной кривой уравнения (22), что и точка P. Обозначим через $\psi(\Phi_1)$ множество образов всех точек множества Φ_1 при отображении ψ. Поскольку множество Φ_1 незамкнуто (оно не содержит свою предельную точку $(0,0)$), то его образ $\psi(\Phi_1)$ тоже является незамкнутым множеством. В то же время множество $\overline{H}$ замкнуто. Поэтому множество $\Omega = \overline{H} \setminus \psi(\Phi_1)$ непусто. Пусть $J_u\colon (t, x_u(t))$ — такая интегральная кривая уравнения (22), что $(\rho, x_u(\rho)) \in \Omega$. Очевидно, что при убывании t от $t=\rho$ эта интегральная кривая не сможет иметь общих точек с Φ_1. Поэтому указанная интегральная кривая определена при всех $t \in (0,\rho]$ и лежит в D_1 при $t \in (0,\rho]$. Как и в случае $\alpha a_{010} > 0$, нетрудно убедиться в том, что выполнены оценки (26), (27). Пусть, по определению, имеют место равенства (28). Как и в случае $\alpha a_{010} > 0$, для любых $\varepsilon > 0$, $u \in U$, $t_i \in [0,\rho]$, $i \in \{1,2\}$, доказывается выполнение условия (29), если только $|t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon)$. Следовательно, доказано, что $x_u \in U$.

Теперь докажем, что уравнение (22) имеет единственную интегральную кривую с указанными свойствами, а именно, интегральную кривую $J_u\colon (t, x_u(t))$. Действительно, рассмотрим однопараметрические семейства множеств

$$\Phi_2(\nu) = \{(t,x)\colon t \in (0,\rho], |x - x_u(t)| = \nu t^m \xi(t)(-\ln t)\},$$

$$D_2(\nu) = \{(t,x)\colon t \in (0,\rho], |x - x_u(t)| < \nu t^m \xi(t)(-\ln t)\},$$

где ν, $\nu \in (0,1]$, — параметр. Пусть вспомогательная функция $A_2\colon D_0 \to [0,+\infty)$ определяется равенством

$$A_2(t,x) = (x - x_u(t))^2 \left(t^m \xi(t)(-\ln t)\right)^{-2}.$$

Обозначим через $a_2\colon D_0 \to \mathbb{R}$ производную этой функции в силу уравнения (22). Легко видеть, что если $(t,x) \in D_0$, $x \ne x_u(t)$, то

$$a_2(t,x) = 2\left(t^m \xi(t)(-\ln t)\right)^{-2} (\lambda(t))^{-1}(a_{010} + o(1))(x - x_u(t))^2, \quad t \to +0.$$

Поскольку ρ достаточно мало, то в соответствии с (24) $\operatorname{sign} a_2(t,x) = \operatorname{sign} \alpha a_{010}$ при $(t,x) \in$ $\in D_0$, $x \ne x_u(t)$, т. е. $a_2(t,x) < 0$ при $(t,x) \in D_0$, $x \ne x_u(t)$. В частности, $a_2(t,x) < 0$ в каждой точке каждой кривой $\Phi_2(\nu)$ построенного семейства. Поэтому если взять любую точку (t_0, x_0) любой кривой $\Phi_2(\nu)$, $\nu \in (0,1]$, и рассмотреть интегральную кривую $J_0(t, x_0(t))$ уравнения (22), проходящую через эту точку, то при достаточно малом $\delta > 0$

будем иметь $(t, x_0(t)) \in D_2(\nu)$ при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ (здесь $t \le \rho$) и $(t, x_0(t)) \notin \overline{D_2(\nu)}$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Это доказывается так же, как и аналогичное утверждение для Φ_1 в случае $\alpha a_{010} < 0$. Далее, пусть $P_*(t_*, x_*) \in \overline{D_1} \setminus \{(0,0)\}$ — любая точка, удовлетворяющая условию $x_* \ne x_u(t_*)$. Существует $\nu_* \in (0,1]$ такое, что $P_* \in \Phi_2(\nu_*)$. Обозначим через $x^* \colon (t_* - \varepsilon, t_*) \to \mathbb{R}$ (единственное) решение дифференциального уравнения (22), удовлетворяющее начальному условию $x(t_*) = x_*$. Здесь $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Пусть (t_-, t_*) — левый максимальный интервал существования этого решения (здесь $t_- \ge 0$). На основании изложенного выше интегральная кривая $J_* \colon (t, x^*(t))$ уравнения (22), проходящая через точку P_*, лежит вне $\overline{D_2(\nu_*)}$ при всех $t \in (t_-, t_*)$. В то же время если t_{**} достаточно мало, $t_{**} \in (0, \rho)$ и (t, x) — любая точка множества $\overline{D_1} \setminus \{(0,0)\}$, удовлетворяющая условию $t \in (0, t_{**}]$, то

$$|x - x_u(t)| \le |x - S_m(t)| + |x_u(t) - S_m(t)| \le 2Mt^m\xi(t) < \nu_* t^m \xi(t)(-\ln t).$$

Это означает, что все точки (t, x) множества $\overline{D_1} \setminus \{(0,0)\}$, удовлетворяющие условию $t \in (0, t_{**}]$, принадлежат множеству $D_2(\nu_*)$. Пусть $t^* = \min\{t_*, t_{**}\}$. Из изложенного выше следует, что интегральная кривая $J_* \colon (t, x^*(t))$ уравнения (22) лежит вне $\overline{D_1}$ при $t \in (t_-, t^*)$.

Утверждение доказано.

Определим оператор $T \colon U \to U$, положив $Tu = x_u$.

Докажем, что $T \colon U \to U$ — непрерывный оператор. Пусть $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$, — произвольные фиксированные функции и $Tu_i = x_i$, $i \in \{1, 2\}$. Если $u_1 = u_2$, то и $x_1 = x_2$. Пусть далее $\|u_1 - u_2\|_B = h$, $h > 0$. Будем исследовать поведение интегральных кривых дифференциального уравнения (22), в котором полагаем $u = u_1$. Далее будем обозначать полученное таким образом дифференциальное уравнение через (22*); очевидно, $x_1 \colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$ — это решение уравнения (22*). Положим

$$\Phi_3 = \left\{(t, x) \colon t \in (0, \rho], |x - x_2(t)| = h^\nu (t^m \xi(t))^{1-\nu}\right\},$$

$$D_3 = \left\{(t, x) \colon t \in (0, \rho], |x - x_2(t)| < h^\nu (t^m \xi(t))^{1-\nu}\right\},$$

где ν — постоянная, удовлетворяющая условию

$$0 < \nu < 1 - \frac{1}{m}. \tag{32}$$

Пусть вспомогательная функция $A_3 \colon D_0 \to [0, +\infty)$ определяется равенством

$$A_3(t, x) = (x - x_2(t))^2 (t^m \xi(t))^{-2(1-\nu)}.$$

Обозначим через $a_3 \colon D_0 \to \mathbb{R}$ производную этой функции в силу уравнения (22*). Поскольку ρ достаточно мало, а ν удовлетворяет неравенствам (32), то легко видеть, что при $(t, x) \in \Phi_3$

$$a_3(t, x) = 2\,(t^m \xi(t))^{-2(1-\nu)}\,(\lambda(t))^{-1} \times$$
$$\times \Big((a_{010} + o(1))(x - x_2(t))^2 + (x - x_2(t))o(1)h^\nu\,(t^m \xi(t))^{1-\nu}\Big), \quad t \to +0.$$

Здесь использованы оценки

$$|u_1(t) - u_2(t)| = |u_1(t) - u_2(t)|^\nu |u_1(t) - u_2(t)|^{1-\nu} \le$$
$$\le \|u_1 - u_2\|_B^\nu \left(|u_1(t) - S_m(t)| + |u_2(t) - S_m(t)|\right)^{1-\nu} \le$$
$$\le h^\nu \left(2Mt^m \xi(t)\right)^{1-\nu}, \quad t \in (0, \rho],$$

и

$$\left|u_1'(t) - u_2'(t)\right| = \left|u_1'(t) - u_2'(t)\right|^\nu \left|u_1'(t) - u_2'(t)\right|^{1-\nu} \le$$
$$\le \|u_1 - u_2\|_B^\nu \left(\left|u_1'(t) - S_m'(t)\right| + \left|u_2'(t) - S_m'(t)\right|\right)^{1-\nu} \le$$
$$\le h^\nu (2qM\xi(t))^{1-\nu}, \quad t \in (0, \rho].$$

Так как ρ достаточно мало и $h^\nu (t^m \xi(t))^{1-\nu} = |x - x_2(t)|$ при $(t, x) \in \Phi_3$, то в силу (24)

$$\operatorname{sign} a_3(t, x) = \operatorname{sign} \alpha a_{010} \quad \text{при} \quad (t, x) \in \Phi_3.$$

Далее последовательно рассматриваем два случая.

1. Пусть $\alpha a_{010} > 0$. Тогда $a_3(t, x) > 0$ при $(t, x) \in \Phi_3$. Отсюда следует, что если взять произвольную точку $(t_0, x_0) \in \Phi_3$ и обозначить через $J_0\colon (t, x_0(t))$ интегральную кривую уравнения (22*), проходящую через эту точку, то при достаточно малом $\delta > 0$ будем иметь $(t, x_0(t)) \notin \overline{D_3}$ при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ (здесь $t \le \rho$) и $(t, x_0(t)) \in D_3$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Это доказывается так же, как и аналогичное утверждение для Φ_1 в случае $\alpha a_{010} > 0$. При этом $x_1(\rho) = x_2(\rho) = x_G$. На основании изложенного выше, если t уменьшается от $t = \rho$ до $t = 0$, то интегральная кривая $J_1\colon (t, x_1(t))$ уравнения (22*) не может иметь общих точек с Φ_3. Значит, эта интегральная кривая лежит в D_3 при всех $t \in (0, \rho]$, поэтому

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le h^\nu (t^m \xi(t))^{1-\nu}, \quad t \in (0, \rho]. \tag{33}$$

Далее, легко видеть, что

$$\left|x_1'(t) - x_2'(t)\right| \le (|a_{010}| + o(1))|\lambda(t)|^{-1} h^\nu (t^m \xi(t))^{1-\nu}, \quad t \to +0,$$

откуда в силу (24) следует, что

$$\left|x_1'(t) - x_2'(t)\right| \le \frac{|a_{010} + o(1)|}{|\alpha| + o(1)}\, h^\nu (t^m \xi(t))^{1-\nu} t^{-m} = o(1) h^\nu t^{-m}, \quad t \to +0. \tag{34}$$

Поскольку ρ достаточно мало, то из (33), (34) имеем

$$|x_1(t) - x_2(t)| + \left|x_1'(t) - x_2'(t)\right| \le h^\nu t^{-m}, \quad t \in (0, \rho]. \tag{35}$$

2. Пусть $\alpha a_{010} < 0$. Тогда $a_3(t, x) < 0$ при $(t, x) \in \Phi_3$. Отсюда следует, что если взять произвольную точку $(t_0, x_0) \in \Phi_3$ и обозначить через $J_0\colon (t, x_0(t))$ интегральную кривую

уравнения (22*), проходящую через эту точку, то при достаточно малом $\delta > 0$ будем иметь $(t, x_0(t)) \in D_3$ при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ (здесь $t \le \rho$) и $(t, x_0(t)) \notin \overline{D_3}$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Это доказывается так же, как и соответствующее утверждение для Φ_1 в случае $\alpha a_{010} < 0$. При этом

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le |x_1(t) - S_m(t)| + |x_2(t) - S_m(t)| \le 2Mt^m\xi(t) < h^\nu (t^m\xi(t))^{1-\nu},$$

если только $t \in (0, t(h)]$, где постоянная $t(h) \in (0, \rho)$ достаточно мала. Значит, интегральная кривая $J_1\colon (t, x_1(t))$ уравнения (22*) лежит в D_3 при $t \in (0, t(h)]$. На основании изложенного выше, если t увеличивается от $t = t(h)$ до $t = \rho$, то интегральная кривая $J_1\colon (t, x_1(t))$ уравнения (22*) не может иметь общих точек с Φ_3. Следовательно, эта интегральная кривая лежит в D_3 при всех $t \in (0, \rho]$. Поэтому выполнено неравенство (33). Далее точно так же, как и в случае $\alpha a_{010} > 0$, получаем оценки (34), (35).

Перейдем теперь непосредственно к доказательству непрерывности оператора $T\colon U \to U$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Очевидно, существует достаточно малое $t_\varepsilon \in (0, \rho)$ такое, что

$$2Mt^m\xi(t) + 2qM\xi(t) \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad t \in (0, t_\varepsilon].$$

Поэтому если $t \in (0, t_\varepsilon]$, то

$$|x_1(t) + x_2(t)| + \left|x_1'(t) - x_2'(t)\right| \le |x_1(t) - S_m(t)| + |x_2(t) - S_m(t)| +$$
$$+ \left|x_1'(t) - S_m'(t)\right| + \left|x_2'(t) - S_m'(t)\right| \le 2Mt^m\xi(t) + 2qM\xi(t) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если же $t \in [t_\varepsilon, \rho]$, то на основании (35)

$$|x_1(t) - x_2(t)| + \left|x_1'(t) - x_2'(t)\right| \le h^\nu t_\varepsilon^{-m}. \tag{36}$$

Положим

$$\delta(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{2}\, t_\varepsilon^m\right)^{\frac{1}{\nu}}.$$

Если $h < \delta(\varepsilon)$, то из (36) получаем

$$|x_1(t) - x_2(t)| + \left|x_1'(t) - x_2'(t)\right| \le \frac{\varepsilon}{2} \tag{37}$$

при $t \in [t_\varepsilon, \rho]$. В то же время неравенство (37) выполнено при $t \in (0, t_\varepsilon]$ и, кроме того,

$$x_i(0) = 0, \quad x_i'(0) = c_1, \quad i \in \{1, 2\}. \tag{38}$$

Значит,

$$\max_{t \in [0,\rho]} \left(|x_1(t) - x_2(t)| + \left|x_1'(t) - x_2'(t)\right|\right) \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{или} \quad \|x_1 - x_2\|_B \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ указано $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из соотношения $\|u_1 - u_2\|_B = h < \delta(\varepsilon)$ следует, что $\|Tu_1 - Tu_2\|_B = \|x_1 - x_2\|_B \le \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Проведенные рассуждения не зависят ни от выбора $\varepsilon > 0$, ни от выбора $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$. Непрерывность оператора $T \colon U \to U$ доказана.

Таким образом, непрерывный оператор $T \colon U \to U$ отображает замкнутое, ограниченное, выпуклое, компактное множество U в себя. На основании теоремы Шаудера этот оператор имеет в U хотя бы одну неподвижную точку, т. е. существует хотя бы один элемент $x_0 \in U$ такой, что

$$Tx_0 = x_0. \tag{39}$$

Функция $x_0 \colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$ является решением задачи (1), (2), принадлежащим множеству $U(\rho, M)$. Кроме того, если мы вернемся к способу построения оператора $T \colon U \to U$ в случае, когда $\alpha a_{010} > 0$, то увидим, что точка $G(\rho, x_G) \in H$ была выбрана произвольным образом. В частности, можно взять и точку $G(\rho, \beta)$, если только для постоянной β выполнено неравенство (13). Тогда полученное решение $x_0 \colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$ будет удовлетворять условию $x_0(\rho) = \beta$.

Теорема 1 доказана.

Назовем *условиями* (B) совокупность следующих условий:

1) выполнено неравенство $\alpha \neq 0$, где постоянная α определена формулой (10);

2) $|\varphi(t, S_m(t), S_m'(t))| \leq t^m \xi(t)$, $t \in (0, \tau)$, где $\xi \colon (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям (11) (из второго и третьего условий (11) следует, что $0 \leq L_2 \leq 1$ и, более того, если $L_2 < 1$, то заведомо $L_1 = 0$, поэтому второе из условий (11) является существенным только в случае, когда $L_2 = 1$);

3) $|\varphi(t, x_1, y_1) - \varphi(t, x_2, y_2)| \leq l_2 t^{m-1}|x_1 - x_2| + l_3 t^m |y_1 - y_2|$, $(t, x_i, y_i) \in D$, $i \in \{1, 2\}$, где l_2, l_3 — постоянные, $l_2 + l_3 < \dfrac{|\alpha|}{2}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (B). Тогда:*

а) если $\alpha a_{010} > 0$, то существуют ρ, M такие, что задача (1), (2) имеет бесконечное множество решений, принадлежащих множеству $U(\rho, M)$; при этом если постоянная β удовлетворяет условию (13), то существует единственное решение $x_\beta \in U(\rho, M)$ задачи (1), (2) такое, что $x_\beta(\rho) = \beta$;

б) если $\alpha a_{010} < 0$, то существуют ρ, M такие, что задача (1), (2) имеет единственное решение, принадлежащее множеству $U(\rho, M)$.

Доказательство. Вначале выберем постоянные ρ, M, q. Пусть постоянные q, M удовлетворяют соответственно условиям (14), (15). Условия, определяющие выбор ρ, здесь не приводим. Как и при доказательстве теоремы 1, отметим лишь, что ρ достаточно мало. Законность всех дальнейших рассуждений, связанных с малостью ρ, обеспечена выбором ρ; каждый раз, когда потребуется достаточная малость ρ, это будет ниже специально отмечено в ходе доказательства.

Пусть B — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x \colon [0, \rho] \to \mathbb{R}$ с нормой (16). Обозначим через U подмножество B, каждый элемент $u \colon [0, \rho] \to \mathbb{R}$ которого удовлетворяет неравенствам (17), причем выполнены условия (18). Множество U замкнуто и ограничено. Преобразуем уравнение (1) к виду (21) и будем далее рассматривать дифференциальное уравнение (22), в котором $u \in U$ — произвольная фиксированная функция, а функция $\lambda \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определена равенством (23). Отметим, что выполнено условие (24). Поскольку ρ достаточно мало, то $(t, u(t), u'(t)) \in D$, $t \in (0, \rho]$ для всех $u \in U$. Рассмотрим те же множества D_0, Φ_1, D_1, H и вспомогательную функцию

$A_1\colon D_0 \to [0,+\infty)$, что и при доказательстве теоремы 1. Обозначим через $a_1\colon D_0 \to \mathbb{R}$ производную функции $A_1\colon D_0 \to [0,+\infty)$ в силу уравнения (22). Тогда легко видеть, что

$$\operatorname{sign} a_1(t,x) = \operatorname{sign} \alpha a_{010} \quad \text{при} \quad (t,x) \in \Phi_1,$$

так как ρ достаточно мало. Далее последовательно рассматриваем два случая.

1. Пусть $\alpha a_{010} > 0$. Тогда, как и при доказательстве теоремы 1, покажем, что каждая из интегральных кривых уравнения (22), пересекающих H, определена при $t \in (0,\rho]$ и лежит в D_1 при всех $t \in (0,\rho]$. Пусть $G(\rho, x_G) \in H$ — произвольная фиксированная точка. Обозначим через $J_u\colon (t, x_u(t))$ интегральную кривую уравнения (22), проходящую через точку G. Если считать по определению выполненными условия (28), то функция $x_u\colon [0,\rho] \to \mathbb{R}$ принадлежит множеству U. (Для доказательства проводим те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1.) Определим оператор $T\colon U \to U$, положив $Tu = x_u$. Здесь необходимо отметить, что точка $G(\rho, x_G)$ остается неизменной при любом выборе функции $u \in U$ в правой части уравнения (22), поэтому $x_u(\rho) = x_G$ при любом выборе $u \in U$.

2. Пусть $\alpha a_{010} < 0$. Тогда, как и при доказательстве теоремы 1, покажем, что среди интегральных кривых уравнения (22), которые пересекают H, существует одна и только одна интегральная кривая (будем обозначать ее через $J_u\colon (t, x_u(t))$), которая определена при $t \in (0,\rho]$ и лежит в D_1 при всех $t \in (0,\rho]$. При этом рассматриваем те же однопараметрические семейства множеств $\Phi_2(\nu)$, $D_2(\nu)$ (где ν — параметр, $\nu \in (0,1]$) и вспомогательную функцию $A_2\colon D_0 \to [0,+\infty)$, что и при доказательстве теоремы 1. Считая выполненными по определению равенства (28), получаем, как и при доказательстве теоремы 1, что $x_u \in U$. Определим оператор $T\colon U \to U$ равенством $Tu = x_u$.

Докажем, что $T\colon U \to U$ — сжимающий оператор. Пусть $u_i \in U$, $i \in \{1,2\}$, — произвольные фиксированные функции и $Tu_i = x_i$, $i \in \{1,2\}$. Если $u_1 = u_2$, то и $x_1 = x_2$. Пусть далее $\|u_1 - u_2\|_B = h$, $h > 0$. Будем исследовать поведение интегральных кривых дифференциального уравнения (22), в котором полагаем $u = u_1$. При этом полученное таким образом дифференциальное уравнение обозначим через (22*). Очевидно, $x_1(0,\rho] \to \mathbb{R}$ — решение уравнения (22*). Положим

$$\Phi_3 = \{(t,x)\colon t \in (0,\rho], |x - x_2(t)| = \eta t^m h\},$$

$$D_3 = \{(t,x)\colon t \in (0,\rho], |x - x_2(t)| < \eta t^m h\},$$

где η — постоянная, удовлетворяющая условию

$$(l_2 + l_3)|a_{010}|^{-1} < \eta < (|\alpha| - (l_2 + l_3))|a_{010}|^{-1}.$$

Определим вспомогательную функцию $A_3\colon D_0 \to [0,+\infty)$ равенством

$$A_3(t,x) = (x - x_2(t))^2 t^{-2m}$$

и обозначим через $a_3\colon D_0 \to \mathbb{R}$ производную этой функции в силу уравнения (22*). Поскольку

$$|u_1(t)-u_2(t)| = \left|\int\limits_0^t u_1'(s)\,ds - \int\limits_0^t u_2'(s)\,ds\right| \le \left|\int\limits_0^t \left|u_1'(s)-u_2'(s)\right|\,ds\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_0^t \max_{s\in[0,\rho]}\left(|u_1(s)-u_2(s)| + \left|u_1'(s)-u_2'(s)\right|\right)\,ds\right| =$$

$$= \left|\int\limits_0^t h\,ds\right| = ht, \quad t\in(0,\rho],$$

и, кроме того,

$$\left|u_1'(t)-u_2'(t)\right| \le \max_{t\in[0,\rho]}\left(|u_1(t)-u_2(t)| + \left|u_1'(t)-u_2'(t)\right|\right) = h, \quad t\in(0,\rho],$$

то легко видеть, что

$$a_3(t,x) = 2t^{-2m}(\lambda(t))^{-1}\left((a_{010}+o(1))(x-x_2(t))^2 + \right.$$

$$\left. +(x-x_2(t))(l_2+l_3+o(1))t^m h\right), \quad t\to+0.$$

Так как $t^m h = \dfrac{1}{\eta}\,|x-x_2(t)|$ при $(t,x)\in\Phi_3$, ρ достаточно мало и $\dfrac{1}{\eta}\,(l_2+l_3) < |a_{010}|$, то в силу (24)

$$\operatorname{sign} a_3(t,x) = \operatorname{sign}\alpha a_{010} \quad \text{при} \quad (t,x)\in\Phi_3.$$

Далее последовательно рассматриваем два случая.

1. Пусть $\alpha a_{010} > 0$. Тогда $a_3(t,x) > 0$ при $(t,x)\in\Phi_3$. Отсюда следует, что если взять произвольную точку $(t_0,x_0)\in\Phi_3$ и обозначить через $J_0\colon (t,x_0(t))$ интегральную кривую уравнения (22^*), проходящую через эту точку, то при достаточно малом $\delta>0$ будем иметь $(t,x_0(t))\notin\overline{D_3}$ при $t\in(t_0,t_0+\delta)$ (здесь $t\le\rho$) и $(t,x_0(t))\in D_3$ при $t\in(t_0-\delta,t_0)$. Это доказывается так же, как и аналогичное утверждение для Φ_1 (случай $\alpha a_{010}>0$) при доказательстве теоремы 1. При этом $x_1(\rho)=x_2(\rho)=x_G$. На основании изложенного выше, если t уменьшается от $t=\rho$ до $t=0$, то интегральная кривая $J_1\colon (t,x_1(t))$ уравнения (22^*) не может иметь общих точек с Φ_3. Следовательно, эта интегральная кривая лежит в D_3 при всех $t\in(0,\rho]$. Значит,

$$|x_1(t)-x_2(t)| \le \eta t^m h, \quad t\in(0,\rho]. \tag{40}$$

Поэтому

$$\left|x_1'(t)-x_2'(t)\right| \le (|a_{010}|\eta + l_2 + l_3 + o(1))|\lambda(t)|^{-1}t^m h, \quad t\to+0.$$

В силу (24)

$$\left|x_1'(t)-x_2'(t)\right| \le \left((|a_{010}|\eta + l_2 + l_3)|\alpha|^{-1} + o(1)\right)h, \quad t\to+0. \tag{41}$$

Обозначим

$$\omega = \frac{1}{2}\left(1 + (|a_{010}|\eta + l_2 + l_3)|\alpha|^{-1}\right). \tag{42}$$

Поскольку, по предположению, $(|a_{010}|\eta + l_2 + l_3)|\alpha|^{-1} < 1$, то $0 < \omega < 1$. Вследствие достаточной малости ρ из (40) – (42) следует, что

$$|x_1(t) - x_2(t)| + \left|x_1'(t) - x_2'(t)\right| \le \omega h \tag{43}$$

при $t \in (0, \rho]$. Из (38), (43) следует, что $\|x_1 - x_2\|_B \le \omega h$, откуда имеем

$$\|Tu_1 - Tu_2\|_B \le \omega \|u_1 - u_2\|_B, \quad \text{где} \quad 0 < \omega < 1. \tag{44}$$

2. Пусть $\alpha a_{010} < 0$. Тогда $a_3(t,x) < 0$ при $(t,x) \in \Phi_3$. Отсюда следует, что если взять любую точку $(t_0, x_0) \in \Phi_3$ и обозначить через $J_0\colon (t, x_0(t))$ интегральную кривую уравнения (22*), проходящую через эту точку, то при достаточно малом $\delta > 0$ будем иметь $(t, x_0(t)) \in D_3$ при $(t, t_0 + \delta)$ (здесь $t \le \rho$) и $(t, x_0(t)) \notin \overline{D_3}$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Это доказывается так же, как и аналогичное утверждение для Φ_1 (случай $\alpha a_{010} < 0$) при доказательстве теоремы 1. При этом в силу (17)

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le |x_1(t) - S_m(t)| + |x_2(t) - S_m(t)| \le 2Mt^m \xi(t) < \eta t^m h, \tag{45}$$

если только $t \in (0, t(h)]$, где постоянная $t(h) \in (0, \rho)$ достаточно мала. В соответствии с (45) интегральная кривая $J_1\colon (t, x_1(t))$ уравнения (22*) лежит в D_3 при $t \in (0, t(h)]$. Если t возрастает от $t = t(h)$ до $t = \rho$, то, согласно изложенному выше, интегральная кривая $J_1\colon (t, x_1(t))$ не может иметь общих точек с Φ_3. Следовательно, эта интегральная кривая лежит в D_3 при всех $t \in (0, \rho]$. Далее, как и в случае $\alpha a_{010} > 0$, последовательно получаем оценки (40) – (44).

Проведенные рассуждения не зависят от выбора функций $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$. Следовательно, доказано, что $T\colon U \to U$ — сжимающий оператор.

Таким образом, сжимающий оператор $T\colon U \to U$ отображает в себя замкнутое и ограниченное множество U. На основании принципа Банаха сжатых отображений этот оператор имеет в U единственную неподвижную точку, т. е. существует единственный элемент $x_0 \in U$ такой, что справедливо равенство (39). Очевидно, функция $x_0\colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$ является единственным решением задачи (1), (2), принадлежащим множеству $U(\rho, M)$. Кроме того, если обратиться к способу построения оператора $T\colon U \to U$ в случае $\alpha a_{010} > 0$, то заметим, что выбор точки $G(\rho, x_G)$ множества H был произволен. Поэтому если β — любая постоянная, для которой выполнено условие (13), то в качестве фиксированной точки $G(\rho, x_G)$ можно взять точку $G(\rho, \beta)$. Тогда полученное (единственное) решение $x\colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$ задачи (1), (2) будет удовлетворять условию $x_0(\rho) = \beta$.

Теорема 2 доказана.

Литература

1. *Арнольд В. И.* Теория катастроф. — М.: Наука, 1990. — 128 с.
2. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 304 с.

3. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 464 с.
4. *Витюк А. Н.* Обобщенная задача Коши для системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных // Дифференц. уравнения. — 1971. — **7**, № 9. — С. 1575 – 1580.
5. *Давыдов А. А.* Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности особой точки // Функцион. анализ и его прил. — 1985. — **19**, № 2. — С. 1 – 10.
6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
7. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Минск: Наука и техника, 1979. — 744 с.
8. *Зернов А. Е.* Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 3. — С. 302 – 310.
9. *Зернов А. Е., Кузина Ю. В.* Качественный анализ сингулярной задачи Коши для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной // Дифференц. уравнения. — 2003. — **39**, № 10. — С. 1307 – 1314.
10. *Зернов О. Є., Кузіна Ю. В.* Асимптотична поведінка розв'язків сингулярної задачі Коші $F(t, x(t), x'(t)) = 0, x(0) = 0$ // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2005. — Вип. 269. — С. 43 – 48.
11. *Зернов А. Е., Кузина Ю. В.* Качественное исследование сингулярной задачи Коши $F(t, x(t), x'(t)) = 0$, $x(0) = 0$ // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 12. — С. 1720 – 1723.
12. *Зернов А. Е., Кузина Ю. В.* Геометрический анализ некоторой сингулярной задачи Коши // Нелінійні коливання. — 2004. — **7**, № 1. — С. 67 – 80.
13. *Зернов А. Е., Кузина Ю. В.* Качественный анализ задачи Коши $F(t, x(t), x'(t)) = 0$, $x(0) = 0$ // Совр. математика и ее прил. — 2005. — **36**, ч. 2. — С. 78 – 85.
14. *Кузина Ю. В.* Асимптотическое поведение решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной неизвестной функции: Дис. … канд. физ.-мат. наук. — Одесса, 2006.
15. *Кигурадзе И. Т.* О задаче Коши для сингулярной системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1965. — **1**, № 10. — С. 1271 – 1291.
16. *Рудаков В. П.* О существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных // Изв. вузов. Математика. — 1971. — № 9. — С. 79 – 84.
17. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. — Київ: Либідь, 2003. — 600 с.
18. *Чечик В. А.* Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1959. — № 8. — С. 155 – 198.
19. *Anichini G., Conti G.* Boundary value problems for implicit ODE's in a singular case // Different. Equat. and Dynam. Syst. — 1999. — **7**, № 4. — P. 437 – 459.
20. *Conti R.* Sulla risoluzione dell' equazione $F(t, x, dx/dt) = 0$ // Ann. mat. pura ed appl. — 1959. — № 48. — P. 97 – 102.
21. *Kowalsky Z.* The polygonal method of solving the differential equation $y' = h(t, y, y, y')$ // Ann. Pol. Math. — 1963. — **13**, № 2. — P. 173 – 204.

Получено 19.02.08,
после доработки — 23.02.17