УДК 517.911

ПОШАГОВОЕ УСРЕДНЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ПЕРЕМЕННОЙ РАЗМЕРНОСТИ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

А. А. Плотников

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
ул. Дворянская, 2, Одесса, 65000, Украина
e-mail: aaplotnikov@ukr.net

We consider linear differential inclusions of variable dimension, and substantiate a possibility of using a step-by-step averaging on a bounded interval.

Розглядаються лінійні диференціальні включення зі змінною розмірністю та обґрунтовується можливість використання методу покрокового усереднення на скінченному проміжку.

1. Введение. В теории динамических систем метод усреднения является мощным средством для их исследования. Он позволяет получать приближенные аналитические решения для весьма сложных систем. Математическое обоснование метода усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений берет начало с фундаментальной работы Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [1]. Большую роль в разработке метода усреднения для различных классов динамических систем сыграли работы Ю. А. Митропольского, В. И. Арнольда, В. М. Волосова, Н. Н. Моисеева, Н. А. Перестюка, В. А. Плотникова, А. М. Самойленко, А. Н. Филатова, О. П. Филатова, М. М. Хапаева, T. Dontchev, M. Kisielewicz, J. A. Sanders и др. [2–16].

В этой работе рассматриваются линейные дифференциальные включения с переменной размерностью. Такие дифференциальные включения относятся к импульсным дифференциальным включениям, для которых обоснование возможности применения метода усреднения рассматривалось многими авторами (обзоры развития методов усреднения для импульсных дифференциальных включений содержатся в работах [6–8, 14, 34]). Однако, в отличие от ранее рассматриваемых импульсных дифференциальных включений, в данном случае в моменты импульсных воздействий меняется размерность системы, а сам импульс „связывает" разноразмерные решения в эти моменты времени.

В данной работе получены некоторые свойства решений линейных дифференциальных включений с переменной размерностью и обосновывается возможность применения для их исследования метода пошагового усреднения.

2. Основные определения и обозначения. Пусть $\mathrm{comp}\,(\mathbb{R}^n)\,(\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n))$ — семейство всех непустых компактных (выпуклых) подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа

$$h(A,B) = \max\{\max_{a\in A}\min_{b\in B}\|a-b\|, \quad \max_{b\in B}\min_{a\in A}\|a-b\|\},$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $I=[0,T]$, $n: I\to\mathbb{N}$ — кусочно-постоянная функция, непрерывная справа и ограниченная постоянной $\overline{n}>0$: $1\le n(t)\le\overline{n}$ для всех $t\in I$.

Предположение 1. *Предположим, что множество всех точек разрыва функции* $n(\cdot)$ *на сегменте* I *конечно и равно* m.

Рассмотрим семейство линейных дифференциальных включений

$$\dot{x}_i \in A_i(t)x_i + F_i(t), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i = \overline{0, m}, \tag{1}$$

$$x_0(\tau_0) = x_0(0) = \overline{x}_0, \quad x_i(\tau_i) = M_i x_{i-1}(\tau_i - 0), \quad i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^{n(t)}$, $t \in I$, $\tau_i \in I$, $i = \overline{1, m}$, — моменты времени ($\tau_i < \tau_{i+1}$) такие, что $n(\tau_i) \neq \neq n(\tau_i - 0)$, $A_i(t)$ — матричнозначная функция $(n(t) \times n(t))$, $F_i \colon [\tau_i, \tau_{i+1}] \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^{n(t)})$ — многозначное отображение, M_i — матрица $(n(\tau_i) \times n(\tau_i - 0))$, $\tau_{m+1} = T$.

Наряду с системой (1), (2) будем рассматривать следующую вспомогательную систему, которая получена из системы (1), (2) и имеет постоянную размерность:

$$\dot{x} \in N(n(t))A(t)x + N(n(t))F(t), \quad t \neq \tau_i, \tag{3}$$

$$x(0) = x_0, \quad x(\tau_i) = M(n(\tau_i))x(\tau_i - 0), \quad i = \overline{1, m}, \tag{4}$$

где $t \in I$, $E(n(t))$ — единичная матрица $(n(t) \times n(t))$, $N(n(t))$ — матричнозначная функция $(\overline{n} \times \overline{n})$ такая, что

$$N(n(t)) = \begin{pmatrix} E(n(t)) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$P(t)$ — матричнозначная функция $(n(t) \times \overline{n})$ такая, что $P(n(t)) = (E(n(t))0)$, $A(t)$ — матричнозначная функция $(\overline{n} \times \overline{n})$ такая, что $N(n(t))A(t) \equiv P^T(n(t))A_i(t)P(n(t))$ для всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{0, m}$, $F \colon I \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^{\overline{n}})$ — многозначное отображение такое, что $N(n(t))F(t) \equiv P^T(n(t))F_i(t)$ для всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{0, m}$, $M(n(t))$ — матричнозначная функция $(\overline{n} \times \overline{n})$ такая, что

$$M(n(t)) = M(n(\tau_i)) = \begin{pmatrix} M_i & 0 \\ 0 & E(\overline{n} - n(\tau_i)) \end{pmatrix}$$

для всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{0, m-1}$, $M_0 = E(\overline{n})$, $N(n(0))x_0 \equiv P^T(n(0))\overline{x}_0$.

Определение 1. *Вектор-функция* $x \colon I \to (\mathbb{R}^{\overline{n}})$ *называется решением системы (3), (4), если она абсолютно непрерывна, удовлетворяет дифференциальному включению (3) почти всюду на интервалах, которые не содержат* τ_i*, и удовлетворяет условию (4) для* $t = \tau_i$.

Замечание 1. Очевидно, что $P^T(n(t))x(t) = x_i(t)$ для всех $t \in I$, где $x(\cdot)$ — решение системы (3), (4), а $x_i(\cdot)$ — решения системы (1), (2), т. е. первые $n(t)$ элементов вектора $x(t)$ совпадают со всеми элементами вектора $x_i(t)$ для всех $t \in I$.

Замечание 2. Очевидно, что если дифференциальное включение (3) удовлетворяет условиям теорем существования решений для обыкновенных линейных дифференциальных включений на I (см., например, [6, 8, 17–19]), то система (3), (4) будет иметь решения на I [20].

Через $X(I)$ обозначим множество решений системы (3), (4), через $X(t)$ — его сечение в момент t, т. е. $X(t) = \{x(t) \colon x(\cdot) \in X(I), t \in I\}$.

Замечание 3. К таким системам сводятся, например, управляемые процессы возникновения и развития объектов, дифференцированных по моменту создания [21–23], управляемые гибридные системы [24–28] и управляемые системы с переменной размерностью [29]. Если же $n(t) \equiv n$, то система (3), (4) является обыкновенным линейным дифференциальным включением [8, 18, 19].

Теперь рассмотрим две системы:

$$\dot{x} \in [N(n(t))A_1(t)x + N(n(t))F_1(t)] \quad t \neq \tau_i, \tag{5}$$

$$x(0) = x_0, \quad x(\tau_i) = M(n(\tau_i))x(\tau_i - 0), \quad i = \overline{1,m}, \tag{6}$$

и

$$\dot{y} \in [N(n(t))A_2(t)y + N(n(t))F_2(t)], \quad t \neq \tau_i, \tag{7}$$

$$y(0) = y_0, \quad y(\tau_i) = M(n(\tau_i))y(\tau_i - 0), \quad i = \overline{1,m}. \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть $A_1(t)$, $A_2(t)$, $F_1(t)$, $F_2(t)$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) $A_1(\cdot)$, $A_2(\cdot)$ — матричнозначные функции $(\overline{n} \times \overline{n})$, непрерывные на $I \setminus \{\tau_i\}$ и непрерывные справа в τ_i, $i = \{1, 2, \ldots, m\}$;

2) $F_1(\cdot), F_2(\cdot) \colon I \to \operatorname{conv}\left(\mathbb{R}^{\overline{n}}\right)$ — многозначные отображения, непрерывные на $I \setminus \{\tau_i\}$ и непрерывные справа в τ_i, $i = \{1, 2, \ldots, m\}$;

3) существует постоянная $\eta > 0$ такая, что для всех $t \in I$

$$\|A_1(t) - A_2(t)\| \le \eta, \quad h(F_1(t), F_2(t)) \le \eta; \tag{9}$$

4) существует постоянная $\lambda > 0$ такая, что для всех $t \in I$

$$\|M(n(t))\| \le \lambda. \tag{10}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) для любого решения $x(\cdot)$ системы (5), (6) существует решение $y(\cdot)$ системы (7), (8) такое, что для всех $t \in I$

$$\|x(t) - y(t)\| \le \max\{1, \lambda^m\}\, e^{\sqrt{\overline{n}}a_1 T}\delta_0 + C\eta; \tag{11}$$

2) для любого решения $y(\cdot)$ системы (7), (8) существует решение $x(\cdot)$ системы (5), (6) такое, что для всех $t \in I$ выполняется условие (11).

Следовательно, для всех $t \in I$

$$h(X(t), Y(t)) \le \max\{1, \lambda^m\}\, e^{\sqrt{\overline{n}}a_1 T}\delta_0 + C\eta, \tag{12}$$

где $\|x_0 - y_0\| = \delta_0$, $a_1 = \max_{t \in I}\|A_1(t)\|$, C — некоторая постоянная, зависящая от λ, a_1, T и m (см. (27)).

Доказательство. Докажем первое утверждение, т. е. включение $X(t) \subset Y(t) + S_\varsigma(0)$, где $\varsigma = \max\{1, \lambda^m\}e^{\sqrt{\overline{n}}a_1 T}\delta_0 + C\eta$.

Пусть $\tau_0 = 0$, $\tau_{m+1} = T$. Возьмем произвольное решение $x(\cdot) \in X$ системы (5), (6). Тогда

$$x(t) = x(\tau_i) + \int\limits_{\tau_i}^{t} [N(n(s))A_1(s)x(s) + N(n(s))f_1(s)]ds \tag{13}$$

для всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{0, m}$, где $f_1(\cdot)$ — измеримая вектор-функция такая, что $f_1(t) \in \in F_1(t)$ для всех $t \in I$, а также $x(\tau_i) = M(n(\tau_i))x(\tau_i - 0)$, $i = \overline{1, m}$.

Возьмем $f_2(t) = \min_{f \in F_2(t)} \|f_1(t) - f\|$. Очевидно, что $f_2(\cdot)$ является измеримой вектор-функцией.

Пусть вектор-функция $y(\cdot)$ такая, что для всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{0, m}$,

$$y(t) = y(\tau_i) + \int\limits_{\tau_i}^{t} [N(n(s))A_2(t)y(s) + N(n(s))f_2(s)]ds \tag{14}$$

и $y(\tau_i) = M(n(\tau_i))y(\tau_i - 0)$, $i = \overline{1, m}$. Следовательно, $y(\cdot) \in Y$.

Возьмем произвольное $t \in I$. Очевидно, что t принадлежит некоторому полуинтервалу $[\tau_i, \tau_{i+1})$, где $i \in \{0, \ldots, m\}$. Обозначим

$$\delta_i^- = \|x(\tau_i - 0) - y(\tau_i - 0)\|, \quad \delta_i = \|x(\tau_i) - y(\tau_i)\|.$$

Из (13) и (14) получим

$$\|x(t) - y(t)\| = \left\| x(\tau_i) + \int\limits_{\tau_i}^{t} [N(n(s))A_1(s)x(s) + N(n(s))f_1(s)]ds - \right.$$

$$\left. - y(\tau_i) - \int\limits_{\tau_i}^{t} [N(n(s))A_2(t)y(s) + N(n(s))f_2(s)]ds \right\| \leq$$

$$\leq \delta_i + \int\limits_{\tau_i}^{t} \|N(n(s))\| \|A_1(s)\| \|x(s) - y(s)\| ds +$$

$$+ \int\limits_{\tau_i}^{t} \|N(n(s))\| \|A_1(s)y(s) - A_2(s)y(s)\| ds + \int\limits_{\tau_i}^{t} \|N(n(s))\| \|f_1(s) - f_2(s)\| ds \leq$$

$$\leq \delta_i + \int\limits_{\tau_i}^{t} \|N(n(s))\| \|A_1(s)\| \|x(s) - y(s)\| ds +$$

$$+ \int\limits_{\tau_i}^{t} \|N(n(s))\| \|A_1(s)y(s) - A_2(s)y(s)\| ds + \int\limits_{\tau_i}^{t} \|N(n(s))\| h(F_1(s), F_2(s)) ds \leq$$

$$\leq \delta_i + \int\limits_{\tau_i}^{t} [\sqrt{n}\|A_1(s)\|\|x(s) - y(s)\| + 2\sqrt{n}\eta]ds.$$

Воспользовавшись неравенством Гронуолла – Беллмана [10], получим

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \left(\delta_i + \frac{2\eta}{a_1}\right) e^{\sqrt{n}a_1(t-\tau_i)} - \frac{2\eta}{a_1}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}). \tag{15}$$

Тогда

$$\delta_{i+1}^{-} \leq \left(\delta_i + \frac{2\eta}{a_1}\right) e^{\sqrt{n}a_1(\tau_{i+1}-\tau_i)} - \frac{2\eta}{a_1},$$

а также

$$\delta_i = \|x(\tau_i) - y(\tau_i)\| = \|M(n(\tau_i))x(\tau_i - 0) - M(n(\tau_i))y(\tau_i - 0)\| \leq$$
$$\leq \lambda\|x(\tau_i - 0) - y(\tau_i - 0)\| = \lambda\delta_i^{-}.$$

Следовательно,

$$\delta_{i+1} \leq \lambda e^{\sqrt{n}a_1(\tau_{i+1}-\tau_i)}\delta_i + \frac{2\lambda\eta}{a_1}\left(e^{\sqrt{n}a_1(\tau_{i+1}-\tau_i)} - 1\right).$$

Пусть $\kappa = \dfrac{2\eta}{a_1}$ и $\mu = \sqrt{n}a_1$. Тогда

$$\delta_{i+1} \leq \lambda e^{\mu(\tau_{i+1}-\tau_i)}\delta_i + \lambda\kappa\left(e^{\mu(\tau_{i+1}-\tau_i)} - 1\right).$$

Поскольку $\delta_0^{-} = \delta_0$, то

$$\delta_1 \leq \lambda e^{\mu\tau_1}\delta_0 + \lambda\kappa\left(e^{\mu\tau_1} - 1\right),$$

$$\delta_2 \leq \lambda e^{\mu(\tau_2-\tau_1)}\left(\lambda e^{\mu\tau_1}\delta_0 + \lambda\kappa\left(e^{\mu\tau_1} - 1\right)\right) + \lambda\kappa\left(e^{\mu(\tau_2-\tau_1)} - 1\right) =$$
$$= \lambda^2 e^{\mu\tau_2}\delta_0 + \lambda^2\kappa\left(e^{\mu\tau_2} - e^{\mu(\tau_2-\tau_1)}\right) + \lambda\kappa\left(e^{\mu(\tau_2-\tau_1)} - 1\right),$$

$$\delta_3 \leq \lambda e^{\mu(\tau_3-\tau_2)}\delta_2 + \lambda\kappa\left(e^{\mu(\tau_3-\tau_2)} - 1\right) \leq$$
$$\leq \lambda e^{\mu(\tau_3-\tau_2)}\left(\lambda^2 e^{\mu\tau_2}\delta_0 + \lambda^2\kappa\left(e^{\mu\tau_2} - e^{\mu(\tau_2-\tau_1)}\right) + \lambda\kappa\left(e^{\mu(\tau_2-\tau_1)} - 1\right)\right) +$$
$$+ \lambda\kappa\left(e^{\mu(\tau_3-\tau_2)} - 1\right) \leq \lambda^3 e^{\mu\tau_3}\delta_0 + \lambda^3\kappa\left(e^{\mu\tau_3} - e^{\mu(\tau_3-\tau_1)}\right) +$$
$$+ \lambda^2\kappa\left(e^{\mu(\tau_3-\tau_1)} - e^{\mu(\tau_3-\tau_2)}\right) + \lambda\kappa\left(e^{\mu(\tau_3-\tau_2)} - 1\right).$$

Следовательно, воспользовавшись методом математической индукции, получим

$$\delta_{i+1} \le \lambda e^{\mu(\tau_{i+1}-\tau_i)}\delta_i + \lambda\kappa\left(e^{\mu(\tau_{i+1}-\tau_i)}-1\right) \le$$
$$\le \lambda^{i+1}e^{\mu\tau_{i+1}}\delta_0 + \lambda^{i+1}\kappa\left(e^{\mu\tau_{i+1}} - e^{\mu(\tau_{i+1}-\tau_1)}\right) + \lambda^i\kappa\left(e^{\mu(\tau_{i+1}-\tau_1)} - e^{\mu(\tau_{i+1}-\tau_2)}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \lambda^2\kappa\left(e^{\mu(\tau_{i+1}-\tau_{i-1})} - e^{\mu(\tau_{i+1}-\tau_i)}\right) + \lambda\kappa\left(e^{\mu(\tau_{i+1}-\tau_i)}-1\right). \tag{16}$$

Теперь мы можем рассмотреть следующие случаи относительно λ:
1) если $\lambda \le 1$, то заменим все λ^j, $j = \overline{2, i+1}$, на λ:

$$\delta_{i+1} \le \lambda e^{\mu\tau_{i+1}}\delta_0 + \lambda\kappa\left(e^{\mu\tau_{i+1}}-1\right); \tag{17}$$

2) если $\lambda > 1$, то заменим все λ^j, $j = \overline{1, i}$, на λ^{i+1}:

$$\delta_{i+1} \le \lambda^{i+1} e^{\mu\tau_{i+1}}\delta_0 + \lambda^{i+1}\kappa\left(e^{\mu\tau_{i+1}}-1\right), \tag{18}$$

а также получить другую оценку, в которой не используется оценка λ. Так как

$$e^{\mu\tau_{i+1}} - e^{\mu(\tau_{i+1}-\tau_1)} \le e^{\mu\tau_{i+1}} - 1, \quad e^{\mu(\tau_{i+1}-\tau_1)} - e^{\mu(\tau_{i+1}-\tau_2)} \le e^{\mu\tau_{i+1}} - 1, \ldots,$$
$$e^{\mu(\tau_{i+1}-\tau_{i-1})} - e^{\mu(\tau_{i+1}-\tau_i)} \le e^{\mu\tau_{i+1}} - 1, \quad e^{\mu(\tau_{i+1}-\tau_i)} - 1 \le e^{\mu\tau_{i+1}} - 1,$$

то из (16) имеем

$$\delta_{i+1} \le \lambda^{i+1}e^{\mu\tau_{i+1}}\delta_0 + (\lambda^{i+1} + \lambda^i + \ldots + \lambda^2 + \lambda)\kappa\left(e^{\mu\tau_{i+1}}-1\right).$$

Если $\lambda \ne 1$, то, воспользовавшись формулой суммы геометрической прогрессии, будем иметь

$$\delta_{i+1} \le \lambda^{i+1}e^{\mu\tau_{i+1}}\delta_0 + \kappa\frac{\lambda^{i+1}-\lambda}{\lambda-1}\left(e^{\mu\tau_{i+1}}-1\right), \tag{19}$$

а если $\lambda = 1$, то

$$\delta_{i+1} \le e^{\mu\tau_{i+1}}\delta_0 + \kappa(i+1)\left(e^{\mu\tau_{i+1}}-1\right). \tag{20}$$

Из (15), (17), получим

$$\|x(t) - y(t)\| \le \lambda e^{\mu t}\delta_0 + \lambda\kappa\left(e^{\mu t} - e^{\mu(t-\tau_i)}\right) + \kappa\left(e^{\mu(t-\tau_i)}-1\right) \le$$
$$\le \lambda e^{\mu t}\delta_0 + \kappa\left(e^{\mu t}-1\right) = \lambda e^{\sqrt{n}a_1 t}\delta_0 + \frac{2\eta}{a_1}\left(e^{\sqrt{n}a_1 t}-1\right), \tag{21}$$

из (15), (18) —

$$\begin{aligned}\|x(t)-y(t)\| &\le \left(\lambda^i e^{\mu\tau_i}\delta_0 + \lambda^i\kappa\left(e^{\mu\tau_i}-1\right)+\kappa\right)e^{\mu(t-\tau_i)}-\kappa \le \\ &\le \lambda^i e^{\mu t}\delta_0 + \lambda^i\kappa\left(e^{\mu t}-e^{\mu(t-\tau_i)}\right)+\kappa\left(e^{\mu(t-\tau_i)}-1\right) = \\ &= \lambda^i e^{\mu t}\delta_0 + \kappa\left(\lambda^i+1\right)\left(e^{\mu t}-1\right) \le \\ &\le \lambda^i e^{\sqrt{n}a_1 t}\delta_0 + \frac{2\eta}{a_1}\left(\lambda^i+1\right)\left(e^{\sqrt{n}a_1 t}-1\right),\end{aligned} \tag{22}$$

из (15), (19) —

$$\begin{aligned}\|x(t)-y(t)\| &\le \lambda^i e^{\mu t}\delta_0 + \kappa\,\frac{\lambda^i-1}{\lambda-1}\left(e^{\mu t}-e^{\mu(t-\tau_i)}\right)+\kappa\left(e^{\mu(t-\tau_i)}-1\right) \le \\ &\le \lambda^i e^{\mu t}\delta_0 + \kappa\,\frac{\lambda^i+\lambda-2}{\lambda-1}\left(e^{\mu t}-1\right) = \\ &= \lambda^i e^{\sqrt{n}a_1 t}\delta_0 + \frac{2\eta}{a_1}\,\frac{\lambda^i+\lambda-2}{\lambda-1}\left(e^{\sqrt{n}a_1 t}-1\right),\end{aligned} \tag{23}$$

а из (15), (20) —

$$\begin{aligned}\|x(t)-y(t)\| &\le e^{\mu t}\delta_0 + \kappa(i+1)\left(e^{\mu t}-e^{\mu(t-\tau_i)}\right)+\kappa\left(e^{\mu(t-\tau_i)}-1\right) \le \\ &\le e^{\mu t}\delta_0 + \kappa(i+2)\left(e^{\mu t}-1\right) = e^{\sqrt{n}a_1 t}\delta_0 + \frac{2\eta}{a_1}(i+2)\left(e^{\sqrt{n}a_1 t}-1\right).\end{aligned} \tag{24}$$

Следовательно, так как $i \le m$ и $t \le T$, то для любого $t \in I$ из (21)–(24) получим

$$\|x(t)-y(t)\| \le \max\{1\lambda^m\}e^{\sqrt{n}a_1 T}\delta_0 + C\eta, \tag{25}$$

где

$$C = \begin{cases} \dfrac{2}{a_1}\left(e^{\sqrt{n}a_1 T}-1\right), & \text{если} \quad \lambda \le 1, \\[2ex] \dfrac{2}{a_1}\left(\lambda^m+1\right)\left(e^{\sqrt{n}a_1 T}-1\right), & \text{если} \quad \lambda > 1, \\[2ex] \dfrac{2}{a_1}\max\left\{1, \dfrac{\lambda^m+\lambda-2}{\lambda-1}\right\}\left(e^{\sqrt{n}a_1 T}-1\right), & \text{если} \quad \lambda \ne 1, \\[2ex] \dfrac{2}{a_1}(m+2)\left(e^{\sqrt{n}a_1 T}-1\right), & \text{если} \quad \lambda = 1. \end{cases} \tag{26}$$

Оценив выражения в (26), будем иметь

$$C = \begin{cases} \dfrac{2}{a_1}\left(e^{\sqrt{\overline{n}}a_1 T} - 1\right), & \text{если} \quad \lambda \le 1, \\ \dfrac{2}{a_1}\min\left\{(\lambda^m + 1), \dfrac{\lambda^m + \lambda - 2}{\lambda - 1}\right\}\left(e^{\sqrt{\overline{n}}a_1 T} - 1\right), & \text{если} \quad \lambda > 1. \end{cases} \tag{27}$$

Таким образом, из (25), (27) получим первое утверждение теоремы. Аналогично доказывается второе утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 4. Рассмотрим некоторые специальные случаи этой теоремы.

Пусть $\eta = 0$, $\delta_0 \neq 0$. Тогда

$$h(X(t), Y(t)) \le \max\{1, \lambda^m\} e^{\sqrt{\overline{n}}a_1 T}\delta_0 \tag{28}$$

для всех $t \in I$.

Из (28) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) = \varepsilon \max\{1, \lambda^m\}^{-1} e^{-\sqrt{\overline{n}}a_1 T}$ такое, что если $\delta_0 = \|x_0 - y_0\| < \delta$, то $h(X(t), Y(t)) < \varepsilon$ для всех $t \in I$. Следовательно, множество решений системы (5) непрерывно зависит от начального условия.

Если $\delta_0 = 0$ и $\eta \neq 0$, то $h(X(t), Y(t)) \le C\eta$ для всех $t \in I$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{C}$, что если неравенства (9), (10) выполняются, то $h(X(t), Y(t)) < \varepsilon$ для всех $t \in I$. Тем самым множество решений системы (5) непрерывно зависит от правой части системы.

3. Метод пошагового усреднения. Рассмотрим линейную систему с малым параметром

$$\dot{x} \in \varepsilon[N(n(t))A(t)x + N(n(t))F(t)], \quad t \neq \tau_i, \tag{29}$$

$$x(0) = x_0, \quad x(\tau_i) = M(n(\tau_i))x(\tau_i - 0), \tag{30}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $\tau_i \in R_+$ — моменты времени ($\tau_i < \tau_{i+1}$) такие, что $n(\tau_i - 0) \neq n(\tau_i)$.

Предположение 2. *Предположим, что множество разрывов функции $n(\cdot)$ на любом сегменте, принадлежащем R_+, конечно.*

Возьмем некоторое $\omega > 0$. Обозначим через Γ множество таких точек пространства R_+, что $\gamma_i = i\omega$, $i = 0, 1, \ldots$, а через Υ множество таких точек τ_i, что $n(\tau_i - 0) - n(\tau_i + 0) \neq 0$. Обозначим через Ξ множество точек t_i, $i = 0, 1, \ldots$, таких, что $\Xi = \Gamma \bigcup \Upsilon$. Очевидно, что $t_{i+1} - t_i \le \omega$ для всех $i = 0, 1, \ldots$.

Системе (29), (30) поставим в соответствие усредненную систему

$$\dot{y} \in \varepsilon[N(n(t))\overline{A}(t)y + N(n(t))\overline{F}(t)], \quad t \neq \tau_i, \tag{31}$$

$$y(0) = x_0, \quad y(\tau_i) = M(n(\tau_i))y(\tau_i - 0), \tag{32}$$

где

$$\overline{A}(t) = \left\{ A_i \colon A_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)ds,\ t \in [t_i, t_{i+1}),\ i = 0, 1, \ldots \right\}, \tag{33}$$

$$\overline{F}(t) = \left\{ F_i \colon F_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(s)ds,\ t \in [t_i, t_{i+1}),\ i = 0, 1, \ldots \right\}. \tag{34}$$

Теорема 2. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) $A(\cdot) \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{\overline{n} \times \overline{n}}$ *— матричнозначная функция* $(\overline{n} \times \overline{n})$ *с непрерывными элементами на* $\mathbb{R}_+ \backslash \{\tau_i\}$ *и непрерывными справа в* $t = \tau_i$*;*

2) $F(\cdot) \colon R_+ \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^{\overline{n}})$ *— непрерывное многозначное отображение на* $\mathbb{R}_+ \backslash \{\tau_i\}$ *и непрерывное справа в* $t = \tau_i$*;*

3) существует такое $\alpha > 0$*, что* $\|N(n(t))A(t)\| \le \alpha$*,* $\|N(n(t))F(t)\| \le \alpha$ *для всех* $t \ge 0$*;*

4) существует такое $0 < \lambda < 1$*, что для всех* $t \ge 0$

$$\|M(n(t))\| \le \lambda. \tag{35}$$

Тогда для любого $L > 0$ *существуют такие* $\varepsilon_0(L) > 0$ *и* $C(L) > 0$*, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *справедливы следующие утверждения:*

1) для любого решения $x(\cdot)$ *системы (29), (30) существует такое решение* $y(\cdot)$ *системы (31), (32), что*

$$\|x(t) - y(t)\| < C\varepsilon; \tag{36}$$

2) для любого решения $y(\cdot)$ *системы (31), (32) существует такое решение* $x(\cdot)$ *системы (29), (30), что выполняется неравенство (36).*

Следовательно,

$$h(X(t), Y(t)) < C\varepsilon. \tag{37}$$

Доказательство. Докажем первое утверждение, т. е. включение

$$X(t) \subset Y(t) + S_{C\varepsilon}(0).$$

Обозначим $\Xi_\varepsilon = [0, L\varepsilon^{-1}] \bigcap \Xi$ и $\Upsilon_\varepsilon = [0, L\varepsilon^{-1}] \bigcap \Upsilon$. Очевидно, что множества Ξ_ε и Υ_ε конечны, и будем считать, что они содержат $k+1$ элемент $t_0, t_1, \ldots, t_k$ и l элементов $\tau_1, \ldots, \tau_l$ соответственно. Кроме того, обозначим $t_{k+1} = L\varepsilon^{-1}$.

Возьмем любое решение $x(\cdot) \in X$ системы (29), (30). Тогда

$$x(t) = x(t_i) + \varepsilon \int\limits_{t_i}^{t} [N(n(s))A(s)x(s) + N(n(s))f(s)]ds \tag{38}$$

для всех $t \in [t_i, t_{i+1})$, если $t_{i+1} \in \Upsilon$, и $t \in [t_i, t_{i+1}]$, если $t_{i+1} \notin \Upsilon$, $i = 0, 1, \ldots, k$, где $f(\cdot)$ — измеримая вектор-функция такая, что $f(t) \in F(t)$ почти для всех $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$, а также $x(0) = x_0$ и $x(t_i) = M(n(t_i))x(t_i - 0)$ для всех $t_i \in \Xi_\varepsilon \bigcap \Upsilon$.

Возьмем $\overline{f}(t) = \min_{f \in \overline{F}(t)} \|f(t) - f\|$. Очевидно, что $\overline{f}(\cdot)$ — измеримая вектор-функция на $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$.

Пусть $y(\cdot)$ такое, что

$$y(t) = y(t_i) + \varepsilon \int\limits_{t_i}^{t} [N(n(s))\overline{A}(s)y(s) + N(n(s))\overline{f}(s)]ds \tag{39}$$

для всех $t \in [t_i, t_{i+1})$, если $t_{i+1} \in \Upsilon$, и $t \in [t_i, t_{i+1}]$, если $t_{i+1} \notin \Upsilon$, $i = 0, 1, \ldots, k$, $y(0) = x_0$ и $y(t_i) = M(n(t_i))y(t_i - 0)$ для всех $t_i \in \Xi_\varepsilon \bigcap \Upsilon$. Следовательно, $y(\cdot)$ является решением системы (31), (32), т. е. $y(\cdot) \in Y$.

Возьмем произвольное $t \in (0, L\varepsilon^{-1})$. Тогда возможны следующие случаи:

1) $t \in (0, \tau_1)$, где $\tau_1 \in \Upsilon_\varepsilon$;

2) $t \in (\tau_j, \tau_{j+1})$, где $\tau_j, \tau_{j+1} \in \Upsilon_\varepsilon$;

3) $t \in (\tau_l, t_{k+1})$, где $\tau_l \in \Upsilon_\varepsilon$;

4) $t = \tau_r$, где $\tau_r \in \Upsilon_\varepsilon$, $r \in \{1, \ldots, l\}$.

Рассмотрим первый случай. Из (38) и (39) имеем

$$|x(t)| \le (|x_0| + \alpha L)e^{\alpha L}, \quad |y(t)| \le (|x_0| + \alpha L)e^{\alpha L}. \tag{40}$$

Далее получим

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| = \Bigg\| x(0) + \varepsilon \int\limits_0^t [N(n(s))A(s)x(s) + N(n(s))f(s)]ds - \\ - y(0) + \varepsilon \int\limits_0^t [N(n(s))\overline{A}(s)y(s) + N(n(s))\overline{f}(s)]ds \Bigg\| \le \\ \le \varepsilon \left\| \int\limits_0^t N(n(s))A(s)x(s)ds - \int\limits_0^t N(n(s))\overline{A}(s)y(s)ds \right\| + \\ + \varepsilon \left\| \int\limits_0^t N(n(s))f(s)ds - \int\limits_0^t N(n(s))\overline{f}(s)ds \right\|. \end{aligned} \tag{41}$$

Предположим, что $[0, \tau_1] \bigcap \Xi_\varepsilon = \{t_0, \ldots, t_m\}$ и $t \in (t_{m-1}, t_m)$, где $t_0 = 0$, $t_m = \tau_1$. Теперь оценим первое слагаемое в (41):

$$\left\| \int\limits_0^t N(n(s))A(s)x(s)ds - \int\limits_0^t N(n(s))\overline{A}(s)y(s)ds \right\| \le \tag{42}$$

$$\leq \sum_{i=0}^{m-2} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))A(s)x(s)ds - \int_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))\overline{A}(s)x(s)ds \right\| + \tag{43}$$

$$+ \left\| \int_{t_{m-1}}^{t} N(n(s))A(s)x(s)ds - \int_{t_{m-1}}^{t} N(n(s))\overline{A}(s)x(s)ds \right\| + \tag{44}$$

$$+ \int_0^t \left\| N(n(s))\overline{A}(s)x(s) - N(n(s))\overline{A}(s)y(s) \right\| ds. \tag{45}$$

Оценим каждое слагаемое в (43):

$$\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))A(s)x(s)ds - \int_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))\overline{A}(s)x(s)ds \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))A(s)x(s)ds - \int_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))A(s)x(t_i)ds \right\| +$$

$$+ \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))A(s)x(t_i)ds - \int_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))\overline{A}(s)x(t_i)ds \right\| +$$

$$+ \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))\overline{A}(s)x(t_i)ds - \int_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))\overline{A}(s)x(s)ds \right\|.$$

Поскольку

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))A(s)x(t_i)ds = \int_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))\overline{A}(s)x(t_i)ds = \int_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))A_i x(t_i)ds$$

и

$$\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))A(s)x(s)ds - \int_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))A(s)x(t_i)ds \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))A(s)[x(t_i) + \varepsilon \int_{t_i}^{s} [N(n(\zeta))A(\zeta)x(\zeta) + N(n(\zeta))f(\zeta)]d\zeta]ds - \right.$$

$$-\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))A(s)x(t_i)ds\Bigg\| \leq$$

$$\leq \left\|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))A(s)\left[\varepsilon\int\limits_{t_i}^{s}\left[N(n(\zeta))A(\zeta)x(\zeta)+N(n(\zeta))f(\zeta)\right]d\zeta\right]ds\right\| \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha\left[\varepsilon\int\limits_{t_i}^{s}[\alpha\|x(\zeta)\|+\alpha]d\zeta\right]ds \leq \varepsilon\alpha^2\left[(\|x_0\|+\alpha L)e^{\alpha L}+1\right]\frac{(t_{i+1}-t_i)^2}{2} \leq$$

$$\leq \varepsilon\alpha^2[(\|x_0\|+\alpha L)e^{\alpha L}+1]\frac{\omega^2}{2},$$

а также аналогично

$$\left\|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))\overline{A}(s)x(t_i)ds - \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))\overline{A}(s)x(s)ds\right\| \leq \varepsilon\alpha^2\left[(\|x_0\|+\alpha L)e^{\alpha L}+1\right]\frac{\omega^2}{2},$$

то

$$\left\|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))A(s)x(s)ds - \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))\overline{A}(s)x(s)ds\right\| \leq \varepsilon\alpha^2\left[(|x_0|+\alpha L)e^{\alpha L}+1\right]\omega^2.$$

Теперь можно получить оценку выражения (43):

$$\sum_{i=0}^{m-2}\left\|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))A(s)x(s)ds - \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} N(n(s))\overline{A}(s)x(s)ds\right\| \leq$$

$$\leq (m-1)[\varepsilon\alpha^2\left[(\|x_0\|+\alpha L)e^{\alpha L}+1]\omega^2\right]. \tag{46}$$

Далее, оценим выражение (44):

$$\left\|\int\limits_{t_{m-1}}^{t} N(n(s))A(s)x(s)ds - \int\limits_{t_{m-1}}^{t} N(n(s))\overline{A}(s)x(s)ds\right\| \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_{m-1}}^{t} \|x(s)\|\|N(n(s))A(s)-N(n(s))\overline{A}(s)\|ds \leq 2\alpha(\|x_0\|+\alpha L)e^{\alpha L}\omega, \tag{47}$$

а также интеграл (45):

$$\int\limits_0^t \|N(n(s))\overline{A}(s)x(s)-N(n(s))\overline{A}(s)y(s)\|ds \leq \alpha\int\limits_0^t \|x(s)-y(s)\|ds. \tag{48}$$

Тогда из (42) и (46) – (48) получим

$$\left\| \int_0^t N(n(s))A(s)x(s)ds - \int_0^t N(n(s))\overline{A}(s)y(s)ds \right\| \le$$

$$\le (m-1)\left[\varepsilon\alpha^2\left[(\|x_0\| + \alpha L)e^{\alpha L} + 1\right]\omega^2\right] +$$

$$+ 2\alpha(\|x_0\| + \alpha L)e^{\alpha L}\omega + \alpha \int_0^t \|x(s) - y(s)\|ds. \tag{49}$$

Теперь оценим аналогично второе слагаемое в (41):

$$\left\| \int_0^t N(n(s))f(s)ds - \int_0^t N(n(s))\overline{f}(s)ds \right\| \le 2\alpha\omega. \tag{50}$$

Тогда, благодаря (41) и (49), (50), получим

$$\|x(t) - y(t)\| \le \varepsilon\alpha \int_0^t \|x(s) - y(s)\|ds + \varepsilon\left\{(m-1)\left[\varepsilon\alpha^2\left[(\|x_0\| + \alpha L)e^{\alpha L} + 1\right]\omega^2\right] +\right.$$

$$\left. +2\alpha(\|x_0\| + \alpha L)e^{\alpha L}\omega + 2\alpha\omega\right\}.$$

На основании леммы Грануолла – Беллмана будем иметь

$$\|x(t) - y(t)\| \le \varepsilon\left\{(m-1)\left[\varepsilon\alpha^2\left[(\|x_0\| + \alpha L)e^{\alpha L} + 1\right]\omega^2\right] +\right.$$

$$\left. +2\alpha(\|x_0\| + \alpha L)e^{\alpha L}\omega + 2\alpha\omega\right\} e^{\alpha L},$$

т. е.

$$\|x(t) - y(t)\| \le C_0\varepsilon,$$

где

$$C_0 = \left\{\alpha^2 L\left[(\|x_0\| + \alpha L)e^{\alpha L} + 1\right] + 2\alpha(\|x_0\| + \alpha L)e^{\alpha L} + 2\alpha\right\} e^{\alpha L}\omega.$$

Заметим, что если $t = \tau_1$, то

$$\|x(\tau_1) - y(\tau_1)\| \le \|M(n(\tau_1))x(\tau_1 - 0) - M(n(\tau_1))y(\tau_1 - 0)\| \le \lambda C_0\varepsilon.$$

Рассмотрим второй случай (когда $t \in (\tau_1, \tau_2)$). Из (40) имеем

$$\|x(\tau_1 - 0)\| \le (\|x_0\| + \varepsilon\alpha\tau_1)e^{\varepsilon\alpha\tau_1}, \quad \|y(\tau_1 - 0)\| \le (\|x_0\| + \varepsilon\alpha\tau_1)e^{\varepsilon\alpha\tau_1}.$$

Тогда

$$\|x(\tau_1)\| \le \lambda(\|x_0\| + \varepsilon\alpha\tau_1)e^{\varepsilon\alpha\tau_1}, \quad \|y(\tau_1)\| \le \lambda(\|x_0\| + \varepsilon\alpha\tau_1)e^{\varepsilon\alpha\tau_1}.$$

Следовательно,

$$\|x(t)\| \le \|x(\tau_1)\| + \varepsilon\alpha \int\limits_{\tau_1}^{t} \|x(s)\|ds + \varepsilon\alpha(\tau_2 - \tau_1) \le$$
$$\le \lambda\|x_0\|e^{\varepsilon\alpha t} + \varepsilon\lambda\alpha\tau_1 e^{\varepsilon\alpha t} + \varepsilon\alpha(\tau_2 - \tau_1)e^{\varepsilon\alpha(t-\tau_1)} \le$$
$$\le \lambda\|x_0\|e^{\alpha L} + \lambda\alpha L e^{\alpha L} + \alpha L e^{\alpha L} = \lambda e^{\alpha L}\left(\|x_0\| + \alpha L\left(1 + \lambda^{-1}\right)\right). \tag{51}$$

Аналогично
$$\|y(t)\| \le \lambda e^{\alpha L}\left(\|x_0\| + \alpha L\left(1 + \lambda^{-1}\right)\right).$$

Из (38) и (39) находим

$$\|x(t) - y(t)\| \le \|x(\tau_1) - y(\tau_1)\| + \varepsilon\left\|\int\limits_{\tau_1}^{t} N(n(s))A(s)x(s)ds - \int\limits_{\tau_1}^{t} N(n(s))\overline{A}(s)y(s)ds\right\| +$$
$$+ \varepsilon\left\|\int\limits_{\tau_1}^{t} N(n(s))f(s)ds - \int\limits_{\tau_1}^{t} N(n(s))\overline{f}(s)ds\right\|.$$

Предположим, что $[\tau_1, \tau_2]\bigcap\Xi_\varepsilon = \{t_z, \ldots, t_{z+m}\}$ и $t \in (t_{z+m-1}, t_{z+m})$, где $t_z = \tau_1$, $t_{z+m} = \tau_2$. Тогда аналогично (49) получим

$$\left\|\int\limits_{t_z}^{t} N(n(s))A(s)x(s)ds - \int\limits_{t_z}^{t} N(n(s))\overline{A}(s)y(s)ds\right\| \le$$
$$\le \alpha\int\limits_{t_z}^{t}\|x(s) - y(s)\|ds + (m-1)\left[\varepsilon\alpha^2\left[\lambda e^{\alpha L}\left(\|x_0\| + \alpha L\left(1+\lambda^{-1}\right)\right) + 1\right]\omega^2\right] +$$
$$+ 2\alpha\lambda e^{\alpha L}\left(\|x_0\| + \alpha L\left(1+\lambda^{-1}\right)\right)\omega, \tag{52}$$

а также аналогично (50)

$$\left\|\int\limits_{t_z}^{t} N(n(s))f(s)ds - \int\limits_{t_z}^{t} N(n(s))\overline{f}(s)ds\right\| \le 2\alpha\omega. \tag{53}$$

Тогда

$$\|x(t) - y(t)\| \le \lambda C_0\varepsilon + \varepsilon\left\{(m-1)\varepsilon\alpha^2\omega[\lambda e^{\alpha L}(\|x_0\| + \alpha L(1+\lambda^{-1})) + 1] +\right.$$
$$\left. +2\alpha\lambda e^{\alpha L}(\|x_0\| + \alpha L(1+\lambda^{-1})) + 2\alpha\right\} e^{\alpha\varepsilon(t-\tau_1)}\omega.$$

Следовательно,

$$\|x(t) - y(t)\| \le C_1 \varepsilon,$$

где

$$C_1 = \lambda C^{(0)} + C^{(1)}, \quad C^{(0)} = C_0,$$

$$C^{(1)} = \left\{\alpha^2 L \left[\lambda e^{\alpha L}\left(\|x_0\| + \alpha L\left(1 + \lambda^{-1}\right)\right) + 1\right] + \right.$$
$$\left. + 2\alpha\lambda e^{\alpha L}\left(\|x_0\| + \alpha L\left(1 + \lambda^{-1}\right)\right) + 2\alpha\right\} e^{\alpha L}\omega.$$

Заметим, что если $t = \tau_2$, то $\|x(\tau_2) - y(\tau_2)\| \le \lambda C_1 \varepsilon$.

Теперь рассмотрим третий случай, когда $t \in [\tau_l, L\varepsilon^{-1}]$. Тогда аналогично предыдущим рассуждениям получим

$$\|x(\tau_l) - y(\tau_l)\| \le \lambda C_{l-1}\varepsilon,$$

$$\|x(t)\| \le \lambda^l e^{\alpha L}\left(\|x_0\| + \alpha L\left(1 + \lambda^{-1} + \lambda^{-2} + \ldots + \lambda^{-l}\right)\right) = \lambda^l e^{\alpha L}\left(\|x_0\| + \alpha L\,\frac{\lambda^{-l-1} - 1}{\lambda^{-1} - 1}\right),$$

$$\|y(t)\| \le \lambda^l e^{\alpha L}\left(\|x_0\| + \alpha L\frac{\lambda^{-l-1} - 1}{\lambda^{-1} - 1}\right),$$

а также

$$\|x(t) - y(t)\| \le C_l \varepsilon,$$

где

$$C_l = \lambda^l C^{(0)} + \lambda^{l-1} C^{(1)} + \ldots + \lambda C^{(l-1)} + C^{(l)},$$

$$C^{(i)} = e^{\alpha L}\omega(\alpha^2 L + 2\alpha)\left[\lambda^i e^{\alpha L}\left(\|x_0\| + \alpha L\,\frac{\lambda^{-i-1} - 1}{\lambda^{-1} - 1}\right) + 1\right].$$

Выполнив тождественные преобразования, будем иметь

$$C_l = \lambda^l e^{\alpha L}\omega(\alpha^2 L + 2\alpha)\left\{(l+1)e^{\alpha L}\|x_0\| + e^{\alpha L}\alpha L\,\frac{l+1}{1 - \lambda^{-1}} + \frac{1 - \lambda^{-l-1}}{1 - \lambda^{-1}}(e^{\alpha L}\alpha L\lambda^{-1} + 1)\right\}.$$

Для фиксированных $\alpha,\ L,\ \omega,\ x_0$ и $0 < \lambda < 1$ последовательность $\{C_l\}_{l=1}^{\infty}$ является возрастающей и $\lim_{l\to+\infty} C_l = C(\lambda, \alpha, L, \omega, x_0)$, где $0 < C(\lambda, \alpha, L, \omega, x_0) < +\infty$. Тогда мы возьмем $C = C(\lambda, \alpha, L, \omega, x_0)$ и получим справедливость первого утверждения теоремы. Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

Теорема доказана.

Замечание 5. Если в условии 4 теоремы предположить существование только $\lambda > 0$, то при $\lambda \ge 1$ получим $\lim_{l\to+\infty} C_l = +\infty$. Но в этом случае можно доказать аналогичную теорему, если предположить, что множество разрывов функции $n(\cdot)$ на R_+ конечно.

Замечание 6. Если $n(t) \equiv n$, то данная теорема обосновывает возможность применения пошагового усреднения для обыкновенных линейных дифференциальных включений на конечном промежутке.

Замечание 7. Аналогично могут быть рассмотрены линейные управляемые дифференциальные включения с переменной размерностью в условиях неопределенности и нечеткие линейные дифференциальные включения с переменной размерностью, а также доказаны теоремы, которые обобщают результаты работ [30 – 40] для линейного случая.

Литература

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н.Н.* Введение в нелинейную механику. — Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
2. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.
3. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. — М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1971.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Физматгиз, 1963.
5. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наук. думка, 1971.
6. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007.
7. *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.* Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities // De Gruyter Stud. Math. — 2011. — **40**.
8. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса: АстроПринт, 1999.
9. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. — Ташкент: Фан, 1974.
10. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1976.
11. *Филатов О. П., Хапаев М. М.* Усреднение систем дифференциальных включений. — М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1998.
12. *Филатов О. П.* Усреднение дифференциальных включений и пределы максимальных средних. — Самара: Универс групп, 2009.
13. *Gama R., Smirnov G.* Stability and optimality of solutions to differential inclusions via averaging method // Set-Valued Var. Anal. — 2014. — **22**, № 2. — P. 349 – 374.
14. *Klymchuk S., Plotnikov A., Skripnik N.* Overview of V. A. Plotnikov's research on averaging of differential inclusions // Physica D. — 2012. — **241**, № 22. — P. 1932 – 1947.
15. *Lochak P., Meunier C.* Multiphase averaging for classical systems // Appl. Math. Sci. — 1988. — **72**.
16. *Sanders J. A., Verhulst F.* Averaging methods in nonlinear dynamical systems // Appl. Math. Sci. — 1985. — **59**.
17. *Благодатских В. И., Филлипов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы. — М.: Наука, 1985. — С. 194 – 252.
18. *Aubin J.-P., Cellina A.* Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1984.
19. *Smirnov G. V.* Introduction to the theory of differential inclusions // Grad. Stud. Math. — 2002. — **41**.
20. *Кичмаренко О. Д., Плотников А. А.* Нелинейные дифференциальные включения с переменной размерностью и их свойства // Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика і механіка. — 2013. — **18**, вип. 2(18). — С. 29 – 34.
21. *Федосеев А. В.* Исследование методами оптимального управления одной модели разработки группы месторождений полезного ископаемого с ограниченными запасами // Методы системного анализа и пробл. рационального использования ресурсов. — М.: ВЦ АН СССР, 1977. — С. 117 – 134.

22. *Хачатуров В. Р., Босолейль Р., Федосеев А. В.* Имитационное моделирование и задачи оптимального управления при долгосрочном планировании производства многолетних сельскохозяйственных культур. — М.: ВЦ АН СССР, 1985.
23. *Романенко А. В., Федосеев А. В.* Оптимальное управление экономическими системами с возрастной структурой // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1993. — **33**, № 8. — С. 1155–1165.
24. *Barton P. I., Lee Ch. K.* Modeling, simulation, sensitivity analysis, and optimization of hybrid systems // ACM Trans. Model. and Comput. Simul. — 2002. — **12**, № 4. — P. 256–289.
25. *Guan Zhi-Hong, Hill D.J., Shen X.* On hybrid impulsive and switching systems and application to nonlinear control // IEEE Trans. Autom. Control. — 2005. — **50**, № 7. — P. 1058–1062.
26. *Haddad W. M., Chellaboina V. S., Nersesov S. G.* Impulsive and hybrid dynamical systems. — Princeton: Princeton Univ. Press, 2008.
27. *Liu B., Liu X., Liao X.* Stability and robustness of quasi-linear impulsive hybrid systems // J. Math. Anal. and Appl. — 2003. — **283**. — P. 416–430.
28. *Vidal R., Chiuso A., Soatto S., Sastry Sh.* Observability of linear hybrid systems // Hybrid Systems: Comput. and Control Lect. Notes in Comput. Sci. — 2003. — **2623**. — P. 526–539.
29. *Kichmarenko O. D., Plotnikov A. A.* The averaging of control linear differential equations with variable dimension on finite interval // Int. J. Sensing, Comput. and Control. — 2015. — **5**, № 1. — P. 25–35.
30. *Плотников А. В.* Усреднение уравнений управляемого движения с многозначными траекториями // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, № 5. — С. 657–659.
31. *Плотников А. В.* Асимптотическое исследование уравнений управляемого движения с многозначными траекториями // Укр. мат. журн. — 1990. — **42**, № 10. — С. 1409–1412.
32. *Плотников А. В.* Усреднение уравнений управляемого движения с многозначным критерием качества // Нелінійні коливання. — 2000. — **3**, № 4. — С. 505–510.
33. *Плотников А. В.* Усреднение нечетких управляемых дифференциальных включений с терминальным критерием качества // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 1. — С. 105–110.
34. *Перестюк Н. А., Скрипник Н. В.* Усреднение импульсных многозначных систем // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 1. — С. 126–142.
35. *Plotnikov A. V., Komleva T. A.* The partial averaging of fuzzy differential inclusions on finite interval // Int. J. Different. Equat. — 2014. — Article ID 307941. — 5 p.
36. *Plotnikov A. V., Komleva T. A., Plotnikova L. I.* The partial averaging of differential inclusions with fuzzy right-hand side // J. Adv. Res. Dyn. Control Syst. — 2010. — **2**, № 2. — P. 26–34.
37. *Плотников А. В.* Схема полного усреднения для нечетких дифференциальных включений на конечном промежутке // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, № 3. — С. 366–374.
38. *Plotnikov A. V., Komleva T. A.* The averaging of fuzzy linear differential inclusions on finite interval // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B. Appl. Algorithms. — 2016. — **23**, № 1. — P. 1–9.
39. *Skripnik N. V.* The partial averaging of fuzzy impulsive differential inclusions // Different. Integral Equat. — 2011. — **24**, № 7–8. — P. 743–758.
40. *Skripnik N. V.* Step scheme of averaging method for impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side // Contemp. Methods in Math. Phys. and Gravitation. — 2015. — **1**, № 1. — P. 9–26.

Получено 23.01.16,
после доработки — 07.08.16