УДК 517.929

БІФУРКАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ*

І. А. Бондар

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна
e-mail: holovatska.iv@gmail.com

Р. Ф. Овчар

Нац. ун-т біоресурсів і природокористування України
вул. Героїв оборони, 15, Київ, 03041, Україна

We find sufficient conditions for existence of solutions to a weakly perturbed boundary-value problem for a system of integro-differential equations. We establish existence and uniqueness of solutions to such problems. We also give an iteration procedure for solution construction.

Найдены достаточные условия существования решений слабовозмущенной линейной краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений. Установлены условия существования и единственности решений таких задач. Предложен итерационный процесс построения решения.

У даній роботі знайдено умови існування та побудови розв'язків лінійних слабкозбурених крайових задач для систем інтегро-диференціальних рівнянь, де крайова умова визначається за допомогою лінійного векторного функціонала, кількість компонент якого не збігається з порядком відповідної системи. Таким чином, досліджено маловивчені нетерові крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь у просторі абсолютно неперервних на заданому відрізку функцій.

Задачі побудови конструктивних методів аналізу лінійних слабкозбурених крайових задач для широкого класу систем функціонально-диференціальних рівнянь, які традиційно займають одне із центральних та важливих місць у якісній теорії диференціальних рівнянь, ґрунтовно вивчались у роботах М. В. Азбелева, О. А. Бойчука, Б. Ван-дер-Поля, В. Вольтерра, М. М. Крилова, А. М. Ляпунова, І. Г. Малкіна, М. О. Перестюка, А. Пуанкаре, А. М. Самойленка. Це зумовлено, насамперед, важливістю практичного застосування теорії крайових задач у теорії нелінійних коливань, теорії стійкості руху, теорії керування, у низці радіотехнічних, механічних та біологічних задач.

Специфіка розгляду крайових задач для систем інтегро-диференціальних рівнянь полягає в тому, що їх лінійна частина є оператором, який не має оберненого. Цей факт суттєво ускладнює дослідження таких операторних рівнянь і крайових задач для них та призводить до того, що розв'язок крайової задачі для таких систем складається з умов розв'язності як самої операторної системи, так і крайової задачі для неї.

Для дослідження існування розв'язків таких задач використано апарат теорії псевдо-

* Підтримано грантом НАН України для молодих учених 2017 р.

обернених матриць та операторів, який розвинено у роботах А. М. Самойленка та О. А. Бойчука [1–3].

1. Постановка задачі. Розглянемо слабкозбурену лінійну крайову задачу для системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int\limits_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)]\, ds = f(t) + \varepsilon \int\limits_a^b [K(t,s)x(s) + K_1(t,s)\dot{x}(s)]\, ds, \tag{1}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) \tag{2}$$

і будемо шукати структуру множини розв'язків даної задачі у просторі $D_2[a,b]$ n-вимірних абсолютно неперервних диференційовних вектор-функцій:

$$x = x(t,\varepsilon)\colon x(\cdot,\varepsilon) \in D_2[a,b], \quad \dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b], \quad x(t,\cdot) \in C(0,\varepsilon_0].$$

Будемо використовувати такі припущення та позначення з [3–5]: $A(t)$, $B(t)$ — $(m \times n)$-, $\Phi(t)$ — $(n \times m)$-, $K(t,s)$, $K_1(t,s)$ — $(n \times n)$-вимірні матриці, складові яких визначені у просторі інтегровних на відрізку функцій $L_2[a,b]$; $f(t) \in L_2[a,b]$ — n-вимірна вектор-функція; вектор-стовпчики матриці $\Phi(t)$ є лінійно незалежними на $[a,b]$; $\alpha = \operatorname{col}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p) \in R^p$; ℓ, ℓ_1 — обмежені лінійні векторні функціонали, визначені у просторі абсолютно неперервних на відрізку функцій:

$$\ell = \operatorname{col}(\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_p)\colon D_2[a;b] \to R^p, \quad \ell_i\colon D_2[a;b] \to R,$$

$$\ell_1 = \operatorname{col}(\ell_1^1,\ell_2^1,\ldots,\ell_p^1)\colon D_2[a;b] \to R^p, \quad \ell_j^1\colon D_2[a;b] \to R.$$

Розглянемо нетерову ($n \neq p$) крайову задачу (1), (2) та з'ясуємо умови біфуркації її розв'язку.

Паралельно із слабкозбуреною крайовою задачею (1), (2) розглянемо породжуючу крайову задачу ($\varepsilon = 0$)

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int\limits_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)]\, ds = f(t), \tag{3}$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha \in R^p. \tag{4}$$

Припустимо, що задача (3), (4) нерозв'язна при будь-яких неоднорідностях $f(t) \in L_2[a,b]$ та $\alpha \in R^p$.

Тоді, згідно з критерієм розв'язності крайової задачі (3), (4), наведеним у роботі [3] (теорема 2), умови

$$\begin{gathered} P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} = 0, \quad P_{Q^*_{d_2}}(\alpha - l(F(\cdot))) = 0, \\ d_1 = m - \operatorname{rank} D, \quad d_2 = p - \operatorname{rank} Q, \end{gathered} \tag{5}$$

не виконуються. Нагадаємо, що

$$D = \left[I_m - \int\limits_a^b [A(s)\Psi(s) + B(s)\Phi(s)]\, ds, - \int\limits_a^b A(s) ds \right]$$

— $(m \times (m+n))$-вимірна матриця, $\Psi(t) = \int_a^t \Phi(s)\, ds$, $\Psi_0(t) = [\Psi(t), I_n]$, $F(t) = \tilde{f}(t) + +\Psi_0(t) D^+ \tilde{b}$, $\tilde{b} = \int_a^b \left[A(s)\tilde{f}(s) + B(s) f(s) \right] ds$, $X_{r_1}(t) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}}$ — $(n \times r_1)$-вимірна матриця; $Q = \ell X_{r_1}(\cdot)$ — $(p \times r_1)$-вимірна матриця. P_D, P_{D^*} — $((m+n) \times (m+n))$-, $(m \times m)$-вимірні матриці-ортопроектори, які діють з R^{m+n}, R^m у ядро та коядро матриці D відповідно. Матриця $P_{D_{r_1}}$ ($P_{D^*_{d_1}}$) складається із повної системи r_1 (d_1) лінійно незалежних стовпчиків (рядків) матриці $P_D(P_{D^*})$. Матриці P_Q, P_{Q^*} — $(r_1 \times r_1)$-, $(p \times p)$-вимірні ортопроектори, які переводять простори R^{r_1}, R^p у ядро та коядро матриці Q відповідно. Матриця $P_{Q_{r_2}}$ ($P_{Q^*_{d_2}}$) складається із повної системи r_2 (d_2) лінійно незалежних стовпчиків (рядків) матриці $P_Q(P_{Q^*})$.

Питання полягає в тому, чи можна крайову задачу (3), (4) зробити розв'язною шляхом введення лінійного збурення і якщо можна, то якими повинні бути збурені матриці $K(t,s)$, $K_1(t,s)$, щоб крайова задача (1), (2) була скрізь розв'язною. Наша мета — встановити умови існування та алгоритм побудови структури множини розв'язку $x = x(t,\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2). Основний метод, який використовується для аналізу поставленого завдання, ґрунтується на теорії псевдообернених матриць [1, 3] та методі Вішика–Люстерника [6].

Таким чином, будемо шукати розв'язок $x = x(t,\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2) у вигляді частини ряду Лорана за степенями малого параметра ε :

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t, c_k) = \frac{x_{-1}(t, c_{-1})}{\varepsilon} + x_0(t, c_0) + \varepsilon x_1(t, c_1) + \ldots, \tag{6}$$

який є збіжним при фіксованому $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$.

2. Ітераційний процес побудови розв'язку. Підставивши ряд (6) у крайову задачу (1), (2) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε, прийдемо до ітераційного процесу, на першому кроці якого, при ε^{-1}, отримаємо однорідну крайову задачу

$$\dot{x}_{-1}(t, c_{-1}) - \Phi(t) \int\limits_a^b [A(s) x_{-1}(s, c_{-1}) + B(s)\dot{x}_{-1}(s, c_{-1})]\, ds = 0,$$

$$\ell x_{-1}(\cdot, c_{-1}) = 0.$$

Згідно з критерієм розв'язності (теорема 2 [3]), однорідна крайова задача завжди розв'язна і має r_2-параметричну ($r_2 = r_1 - n_2$) сім'ю розв'язків

$$x_{-1}(t, c_{-1}) = X_{r_2}(t) c_{-1}, \tag{7}$$

де $c_{-1} \in R^{r_2}$ — r_2-вимірний вектор сталих, який буде визначено на наступному кроці, $X_{r_2}(t) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_{r_2}}$ — $(n \times r_2)$-вимірна матриця.

На другому кроці, при ε^0, отримаємо неоднорідну крайову задачу

$$\dot{x}_0(t, c_0) - \Phi(t) \int_a^b [A(s) x_0(s, c_0) + B(s) \dot{x}_0(s, c_0)] \, ds = f_{-1}(t), \tag{8}$$

$$\ell x_0(\cdot, c_0) = \alpha_{-1}. \tag{9}$$

Тут

$$f_{-1}(t) := f(t) + \int_a^b [K(t,s) x_{-1}(s, c_{-1}) + K_1(t,s) \dot{x}_{-1}(s, c_{-1})] \, ds =$$

$$= f(t) + \int_a^b \Big[K(t,s) X_{r_2}(s) + K_1(t,s) \dot{X}_{r_2}(s) \Big] \, ds \, c_{-1}, \tag{10}$$

$$\alpha_{-1} := \alpha + \ell_1 x_{-1}(\cdot, c_{-1}) = \alpha + \ell_1 X_{r_2}(\cdot) c_{-1}.$$

Крайова задача (8), (9) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли неоднорідності $f_{-1}(t) \in \in L_2[a;b]$ та $\alpha_{-1} \in R^p$ задовольняють умови

$$P_{D^*_{d_1}} \tilde{b}_{-1} = 0, \quad P_{Q^*_{d_2}} (\alpha_{-1} - \ell F_{-1}(\cdot)) = 0, \tag{11}$$

де

$$F_{-1}(t) := \tilde{f}_{-1}(t) + \Psi_0(t) D^+ \tilde{b}_{-1} =$$

$$= F(t) + \left(\tilde{L}(t) + \Psi_0(t) D^+ \int_a^b \Big[A(s) \tilde{L}(s) + B(s) L(s) \Big] \, ds \right) c_{-1},$$

$$\tilde{b}_{-1} := \int_a^b \Big[A(s) \tilde{f}_{-1}(s) + B(s) f_{-1}(s) \Big] \, ds, \quad \tilde{f}_{-1}(t) = \int_a^t f_{-1}(s) ds.$$

Підставивши (7) у (11), отримаємо алгебраїчну систему відносно c_{-1} :

$$B_0 c_{-1} = g_{-1}, \tag{12}$$

де

$$B_0 := \begin{bmatrix} P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{L}(s) + B(s)L(s)\Big]\, ds \\ \\ P_{Q^*_{d_2}} \left(\ell_1 X_{r_2}(\cdot) - \ell\left(\tilde{L}(\cdot) + \Psi_0(\cdot)D^+ \int\limits_a^b [A(s)\tilde{L}(s) + B(s)L(s)]ds\right)\right) \end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$g_{-1} := \begin{bmatrix} -P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} \\ -P_{Q^*_{d_2}}(\alpha - \ell F(\cdot)) \end{bmatrix},$$

$$L(t) = \int\limits_a^b \Big[K(t,s)X_{r_2}(s) + K_1(t,s)\dot{X}_{r_2}(s)\Big]\, ds, \quad \tilde{L}(t) = \int\limits_a^t L(s)\, ds.$$

Тут $L(t)$, B_0 — відповідно $(n \times r_2)$-, $((d_1 + d_2) \times r_2)$-вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a; b]$.

Система (12) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{B_0^*} g_{-1} = 0, \tag{14}$$

і має r_2-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$c_{-1} = B_0^+ g_{-1} + P_{B_0}\tilde{c}, \quad \tilde{c} \in R^{r_2}.$$

Виконання умови (14) перевірити важко, але якщо виконується умова

$$P_{B_0^*} \begin{bmatrix} P_{D^*_{d_1}} \\ P_{Q^*_{d_2}} \end{bmatrix} = 0, \tag{15}$$

то система (12) має хоча б один розв'язок вигляду $c_{-1} = B_0^+ g_{-1}$, $c_{-1} \in R^{r_2}$. Тут B_0^+ — $(r_2 \times (d_1 + d_2))$-вимірна матриця, псевдообернена (за Муром – Пенроузом) до B_0.

Таким чином, якщо має місце рівність (15), то крайова задача (8), (9) має r_2-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$\begin{gathered} x_0(t, c_0) = X_{r_2}(t)c_0 + Y_{-1}(t, c_{-1}), \\ Y_{-1}(t, c_{-1}) := F_{-1}(t) + \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+(\alpha_{-1} - \ell(F_{-1}(\cdot, c_{-1}))), \end{gathered} \tag{16}$$

де c_0 — r_2-вимірний вектор сталих, який буде визначено на наступному кроці.

При ε^1 отримаємо крайову задачу

$$\dot{x}_1(t, c_1) - \Phi(t) \int\limits_a^b [A(s)x_1(s, c_1) + B(s)\dot{x}_1(s, c_1)]\, ds = f_0(t), \tag{17}$$

$$\ell x_1(\cdot, c_1) = \alpha_0. \tag{18}$$

Тут

$$f_0(t) = \int\limits_a^b [K(t,s)x_0(s,c_0) + K_1(t,s)\dot{x}_0(s,c_0)]\,ds =$$

$$= \int\limits_a^b \Big[K(t,s)X_{r_2}(s) + K_1(t,s)\dot{X}_{r_2}(s)\Big]\,dsc_0 +$$

$$+ \int\limits_a^b \Big[K(t,s)Y_{-1}(s,c_{-1}) + K_1(t,s)\dot{Y}_{-1}(s,c_{-1})\Big]\,ds =$$

$$= L(t)c_0 + M_{-1}(t,c_{-1}),$$

$$\alpha_0 = \ell_1 x_0(\cdot,c_0) = \ell_1 X_{r_2}c_0 + \ell_1 Y_{-1}(\cdot,c_{-1}).$$

Таким чином,

$$M_{-1}(t,c_{-1}) := \int\limits_a^b \Big[K(t,s)Y_{-1}(s,c_{-1}) + K_1(t,s)\dot{Y}_{-1}(s,c_{-1})\Big]\,ds.$$

Умова розв'язності задачі (17), (18) є такою:

$$P_{D^*_{d_1}}\tilde{b}_0 = 0, \quad P_{Q^*_{d_2}}(\alpha_0 - \ell F_0(\cdot)) = 0, \tag{19}$$

де

$$F_0(t) = \tilde{f}_0(t) + \Psi_0(t)B_0^+\tilde{b}_0,$$

$$\tilde{b}_0 = \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{f}_0(s) + B(s)f_0(s)\Big]\,ds, \quad \tilde{f}_0(t) = \int\limits_a^t f_0(s)ds.$$

Підставивши $x_0(t,c_0)$ (16) у рівності (19), отримаємо подібну до (12) алгебраїчну систему

$$B_0c_0 = g_0, \tag{20}$$

яка є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$P_{B_0^*}g_0 = 0. \tag{21}$$

Тут

$$g_0 := \begin{bmatrix} P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{M}_{-1}(s,c_{-1}) + B(s)M_{-1}(s,c_{-1})\Big]\, ds \\ \\ P_{Q^*_{d_2}} \Bigg(\ell_1 \left(F_{-1}(\cdot) + \Psi_0(\cdot) P_{D_{r_1}} Q^+ \left(\alpha_{-1} - \ell F_{-1}(\cdot)\right)\right) - \\ - \ell \left(\tilde{M}_{-1}(\cdot, c_{-1}) + \Psi_0(\cdot) D^+ \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{M}_{-1}(s,c_{-1}) + B(s)M_{-1}(s,c_{-1})\Big]\, ds \right) \Bigg) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{M}_{-1}(t,c_{-1}) = \int\limits_a^t M_{-1}(s,c_{-1})\, ds.$$

Як і у попередньому випадку, достатньо, щоб виконувалась умова (18), тоді один із розв'язків системи (15) має вигляд $c_0 = B_0^+ g_0,\, c_0 \in R^{r_2}$.

Таким чином, якщо виконується умова (15), то крайова задача (17), (18) має r_2-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$x_1(t,c_1) = X_{r_2}(t)c_1 + F_0(t) + \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+(\alpha_0 - \ell F_0(\cdot)),$$

де c_1 — r_2-вимірний вектор сталих, який буде визначено на наступному кроці даного ітераційного процесу.

При ε^2 отримаємо крайову задачу

$$\dot{x}_2(t,c_2) - \Phi(t) \int\limits_a^b [A(s)x_2(s,c_2) + B(s)\dot{x}_2(s,c_2)]\, ds = f_1(t), \tag{22}$$

$$\ell x_2(\cdot, c_2) = \alpha_1. \tag{23}$$

Тут

$$f_1(t) = \int\limits_a^b [K(t,s)x_1(s,c_1) + K_1(t,s)\dot{x}_1(s,c_1)]\, ds = L(t)c_1 + M_0(t,c_0),$$

$$\alpha_1 := \ell_1 x_1(\cdot, c_1) = \ell_1 X_{r_2} c_1 + \ell_1 Y_0(\cdot, c_0),$$

$$Y_0(t,c_0) := F_0(t,c_0) + \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+(\alpha_0 - \ell(F_0(\cdot, c_0))),$$

$$M_0(t,c_0) := \int\limits_a^b \Big[K(t,s)Y_0(s,c_0) + K_1(t,s)\dot{Y}_0(s,c_0)\Big]\, ds.$$

Умова розв'язності крайової задачі (22), (23) має вигляд

$$P_{D^*_{d_1}} \tilde{b}_1 = 0, \quad P_{Q^*_{d_2}} (\alpha_1 - \ell F_1(\cdot)) = 0, \tag{24}$$

де

$$F_1(t) = \tilde{f}_1(t) + \Psi_0(t) D^+ \tilde{b}_1, \quad \tilde{b}_1 = \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{f}_1(s) + B(s) f_1(s)\Big]\, ds, \quad \tilde{f}_1(t) = \int\limits_a^t f_1(s)\, ds.$$

Підставивши вираз

$$x_1(t, c_1) = X_{r_2}(t) c_1 + F_0(t) + \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+ (\alpha_0 - \ell F_0(\cdot))$$

у (24), отримаємо алгебраїчну систему

$$B_0 c_1 = g_1, \tag{25}$$

яка є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{B^*_0} g_1 = 0. \tag{26}$$

Тут

$$g_1 := \begin{bmatrix} P_{D^*_{d_1}} \displaystyle\int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{M}_0(s, c_0) + B(s) M_0(s, c_0)\Big]\, ds \\[2ex] P_{Q^*_{d_2}} \Bigg(\ell_1 (F_0(\cdot) + \Psi_0(\cdot) P_{D_{r_1}} Q^+ (\alpha_0 - \ell F_0(\cdot))) - \\ - \ell \left(\tilde{M}_0(\cdot, c_0) + \Psi_0(\cdot) D^+ \displaystyle\int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{M}_0(s, c_0) + B(s) M_0(s, c_0)\Big]\, ds \right) \Bigg) \end{bmatrix},$$

$$M_0(t, c_0) := \int\limits_a^b \Big[K(t, s) \left(F_0(s, c_0) + \Psi_0(s) P_{D_{r_1}} Q^+ \left(\alpha_0 - \ell F_0(\cdot, c_0)\right)\right) +$$

$$+ K_1(t, s) \Big(\dot{F}_0(s, c_0) + \dot{\Psi}_0(s) P_{D_{r_1}} Q^+ (\alpha_0 - \ell \dot{F}_0(\cdot, c_0))\Big)\Big]\, ds,$$

$$\tilde{M}_0(t, c_0) = \int\limits_a^t M_0(s, c_0)\, ds.$$

Тоді один із розв'язків системи (25) має вигляд

$$c_1 = B_0^+ g_1, \quad c_1 \in R^{r_2}.$$

Легко показати за допомогою індукції, що (15) є умовою розв'язності і крайової задачі, яку ми отримаємо на k-му кроці ітераційного процесу

$$\dot{x}_k(t, c_k) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)x_k(s, c_k) + B(s)\dot{x}_k(s, c_k)]\, ds = f_{k-1}(t), \tag{27}$$

$$\ell x_k(\cdot, c_k) = \alpha_{k-1}. \tag{28}$$

Тут

$$f_{k-1}(t) := \int_a^b [K(t,s)x_{k-1}(s, c_{k-1}) + K_1(t,s)\dot{x}_{k-1}(s, c_{k-1})]\, ds =$$

$$= \int_a^b \Big[K(t,s)X_{r_2}(s) + K_1(t,s)\dot{X}_{r_2}(s)\Big]\, ds c_{k-1} +$$

$$+ \int_a^b \Big[K(t,s)Y_{k-2}(s, c_{k-2}) + K_1(t,s)\dot{Y}_{k-2}(s, c_{k-2})\Big]\, ds,$$

$$\alpha_{k-1} := \ell_1 x_{k-1}(\cdot, c_{k-1}) = \ell_1 X_{r_2}(\cdot)c_{k-1} + \ell_1 Y_{k-2}(\cdot, c_{k-2}),$$

де

$$Y_{k-2}(t, c_{k-2}) := \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+ \left(\alpha_{k-1} - \ell F_{k-2}(\cdot, c_{k-2})\right) + F_{k-2}(t, c_{k-2}),$$

$$F_{k-2}(t, c_{k-2}) := \tilde{f}_{k-2}(t) + \Psi_0(t) D^+ \tilde{b}_{k-2},$$

$$\tilde{b}_{k-2} = \int_a^b \Big[A(s)\tilde{f}_{k-2}(s) + B(s) f_{k-2}(s)\Big]\, ds, \quad \tilde{f}_{k-2}(t) = \int_a^t f_{k-2}(s)\, ds.$$

Крайова задача (27), (28) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$P_{Q^*_{d_1}} \tilde{b}_{k-1} = 0, \quad P_{D^*_{d_2}} \left(\alpha_{k-1} - \ell F_{k-1}(\cdot)\right) = 0, \tag{29}$$

і має r_2-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$x_k(t, c_k) = X_{r_2}(t) c_k + Y_{k-1}(t, c_{k-1}), \tag{30}$$

де

$$Y_{k-1}(t,c_{k-1}) := \Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\left(\alpha_{k-1} - \ell F_{k-1}(\cdot,c_{k-1})\right) + F_{k-1}(t,c_{k-1}), \tag{31}$$

$$F_{k-1}(t,c_{k-1}) := \tilde{f}_{k-1}(t) + \Psi_0(t)D^+\tilde{b}_{k-1}, \tag{32}$$

$$\tilde{b}_{k-1} = \int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{f}_{k-1}(s) + B(s)f_{k-1}(s)\Big]\,ds, \quad \tilde{f}_{k-1}(t) = \int\limits_a^t f_{k-1}(s)\,ds, \tag{33}$$

а c_k — r_2-вимірний вектор сталих, який буде визначено на наступному кроці. В результаті отримаємо алгебраїчну систему

$$B_0 c_k = g_k, \tag{34}$$

яка є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{B_0^*} g_k = 0. \tag{35}$$

Тут

$$g_k := \begin{bmatrix} P_{D^*_{d_1}} \displaystyle\int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{M}_{k-1}(s,c_{k-1}) + B(s)M_{k-1}(s,c_{k-1})\Big]\,ds \\ \\ P_{Q^*_{d_2}}\Bigg(\ell_1\big(F_{k-1}(\cdot) + \Psi_0(\cdot)P_{D_{r_1}}Q^+(\alpha_{k-1} - \ell F_{k-1}(\cdot))\big) - \\ -\,\ell\left(\tilde{M}_{k-1}(\cdot,c_{k-1}) + \Psi_0(\cdot)D^+\displaystyle\int\limits_a^b \Big[A(s)\tilde{M}_{k-1}(s,c_{k-1}) + B(s)M_{k-1}(s,c_{k-1})\Big]\,ds\right)\Bigg) \end{bmatrix}, \tag{36}$$

$$M_{k-1}(t,c_{k-1}) := \int\limits_a^b \Big[K(t,s)\left(F_{k-1}(s,c_{k-1}) + \Psi_0(s)P_{D_{r_1}}Q^+(\alpha_{k-1} - \ell F_{k-1}(\cdot,c_{k-1}))\right) +$$

$$+\,K_1(t,s)\left(\dot{F}_{k-1}(s,c_{k-1}) + \dot{\Psi}_0(s)P_{D_{r_1}}Q^+(\alpha_{k-1} - \ell\dot{F}_{k-1}(\cdot,c_{k-1}))\right)\Big]\,ds, \tag{37}$$

$$\tilde{M}_{k-1}(t,c_{k-1}) = \int\limits_a^t M_{k-1}(s,c_{k-1})\,ds.$$

Тоді один із розв'язків системи (34) має вигляд

$$c_k = B_0^+ g_k, \quad c_k \in R^{r_2}, \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{38}$$

Таким чином, крайова задача (27), (28) є розв'язною, якщо виконується умова (15), і має розв'язок (30).

Справедливим є наступне твердження.

Теорема. *Припустимо, що крайова задача (1), (2) задовольняє вказані вище умови так, що породжуюча крайова задача (3), (4) є нерозв'язною при будь-яких* $f(t) \in L_2[a,b]$, $\alpha \in R^p$.

Якщо виконується умова

$$P_{B_0^*} \left[\begin{array}{c} P_{D_{d_1}^*} \\ P_{Q_{d_2}^*} \end{array} \right] = 0,$$

то крайова задача (1), (2) буде мати хоча б один розв'язок у вигляді ряду

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t,c_k), \tag{39}$$

який збігається при фіксованому $\varepsilon \in (0;\varepsilon_*]$, *а коефіцієнти даного ряду визначаються з формул (30) – (38).*

Таким чином, у даній роботі досліджено питання розв'язності слабкозбуреної крайової задачі для системи фредгольмових інтегро-диференціальних рівнянь (1), (2). Показано, що такі задачі є нетеровими у відповідних просторах.

Використовуючи метод Вішика – Люстерника [6], показано, що розв'язки

$$x = x(t,\varepsilon)\colon x(\cdot,\varepsilon) \in D_2[a,b], \quad \dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b], \quad x(t,\cdot) \in C(0,\varepsilon_*],$$

таких задач мають вигляд частин ряду Лорана за степенями малого параметра ε :

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t,c_k), \quad c_k \in R^{\rho}.$$

Доведено збіжність таких рядів при фіксованому $\varepsilon \in (0,\varepsilon_*]$. Збіжність відповідних рядів із похідних доводиться, як у роботах [4, 5].

Знайдено достатні умови існування розв'язків слабкозбуреної лінійної крайової задачі для системи інтегро-диференціальних рівнянь (1), (2), з'ясовано умови існування та єдиності розв'язків таких задач.

Зауваження 1. Умова (15) є достатньою умовою існування розв'язку задачі (1), (2). Якщо умова (15) не виконується, то розв'язок задачі (1), (2) у вигляді ряду (6) не існує, але може існувати у вигляді частини ряду Лорана типу (6) з $k \geq -2$.

Зауваження 2. У даній роботі розглядаються простори $D_2[a,b]$ та $L_2[a,b]$. Згідно з [7], замість них ми можемо розглядати соболєвський простір $W_2^1[a,b]$. Всі результати, отримані у цих просторах, із відповідними уточненнями можуть бути узагальнені на простори, коли $x(\cdot,\varepsilon) \in D_p[a,b]$, $\dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_p[a,b]$, $1 < p < \infty$ [8, с. 49].

Автори висловлюють подяку професору О. А. Бойчуку за увагу до роботи.

Література

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — 2nd ed. // Inverse and Ill-Posed Problems. Series 59. — 2016. — xvi + 298 p.

2. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.
3. *Самойленко А. М., Бойчук О. А., Кривошея С. А.* Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 11. — С. 1576 – 1579.
4. *Головацька І. А.* Слабкозбурені системи інтегро-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 2. — С. 151 – 164.
5. *Golovatska I.* Weakly perturbed boundary-value problems of integro-differential equations // Tatra Mt. Math. Publ. — 2013. — **54**. — P. 61 – 71.
6. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1960. — **15**, вып. 3. — С. 3 – 80.
7. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1988. — 304 с.
8. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. — М.: Высш. шк., 1977. — 430 с.

Одержано 14.09.17