УДК 517.956.4

ЗАДАЧА ТИПА ФЛОРИНА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Ж. О. Тахиров

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз
ул. М. Улугбека, 81, Ташкент, 100125, Узбекистан
e-mail: prof.takhirov@yahoo.com

We consider the problem without initial condition with free boundary for a parabolic equation with power nonlinearity. Uniqueness and existence theorems are proved. The problem is reduced to the Stefan-type problem with initial condition. Equivalence of problems and bilateral a priori estimates for the required functions are established. The behavior of the free boundary is investigated.

Розглянуто задачу без початкової умови з вільною межею для параболічного рівняння зі степеневою нелінійністю. Доведено теореми єдиності та існування. При цьому задачу зведено до задачі типу Стефана з початковою умовою. Встановлено еквівалентність задач і двосторонні апріорні оцінки для шуканих функцій. Вивчено поведінку вільної межі.

Введение. Задача об ударе вязко-пластического стержня о жесткую преграду, рассмотренная в работе [1], послужила моделью для выделения интересного класса задач со свободной границей для параболических уравнений. Новый класс задач был указан и исследован в работе [2]. Далее были опубликованы несколько работ в этом направлении (см., например, [3 – 5]). Для этих задач характерны наличие особенностей у неизвестных функций: при $t = 0$ область вырождается в точку, в начале координат производные искомой функции имеют точку разрыва, условие для нахождения свободной границы задано в неявной для нее форме, и свободная граница не монотонна.

Математическое сходство многих физических процессов дает возможность объединить полученные результаты в одно целое.

В работе [6] M. Storm установил, что в обычных металлах некоторые коэффициенты ($a(u)$ — удельная теплоемкость, $b(u)$ — коэффициент теплопроводности) нелинейной теплопроводности имеют свойство

$$\frac{\dfrac{d}{du}\sqrt{\dfrac{a(u)}{b(u)}}}{a(u)} = \lambda = \mathrm{const} > 0.$$

Задача типа Стефана для таких уравнений исследована во многих работах (см., например, [7 – 9]), где построены автомодельные решения (свободная граница построена в виде $x = \alpha\sqrt{t}$) и проведены некоторые численные эксперименты.

Существует, в основном, три типа задач со свободными границами: Флорина, Маскета – Веригина и Стефана. Наиболее полно изучена задача Стефана. Теория задач со свободной границей типа Стефана разработана в трудах А. Фридмана, И. Данилюка, Б. Базалия, А. Мейрманова, А. Рубинштейна [10 – 14] и других.

Небольшую историю имеет задача Флорина (условие для свободной границы задается в неявной для этой границы форме), возникшая в гидростроительстве при устройстве противофильтрационных завес, когда в породу основания и береговых примыканий плотин нагнетаются глинистые растворы [15].

В настоящей работе мы исследуем задачу со свободной границей без начальных условий в следующей постановке. Будем придерживаться обозначений, принятых в [10, 17].

1. Постановка задачи. Требуется найти пару функций $(s(t), u(t,x,))$ такую, что функция $s(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $0 < t \leq T,\ s(0) = 0,\ s(t) > 0$, а функция $u(t,x)$ в $D_T = \{(t,x)\colon 0 < t \leq T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = \left(u^{-2}u_x\right)_x, \quad (t,x) \in D_T, \tag{1}$$

непрерывна в D_T вместе с производной $u_x(t,x)$ и удовлетворяет условиям

$$u_x(t,0) = \alpha u^2(t,0), \quad 0 < t \leq T, \tag{2}$$

$$u_x(t,s(t)) = 0, \quad 0 < t \leq T, \tag{3}$$

$$u(t,s(t)) = g(s(t)), \quad 0 < t \leq T. \tag{4}$$

Здесь $\alpha < 0$ — постоянная, $g(x) > 0$ определена и непрерывна в промежутке $0 \leq x \leq x_0$, $0 < s(t) < x_0$.

Исследования проводятся по следующей схеме. Сначала с помощью некоторых преобразований (годографов) задача сводится к задаче со свободной границей для новой функции $v(t,y)$ в некоторой нестандартной области для уравнения теплопроводности, а затем, распрямляя левую известную границу, получаем задачу без начальных условий с однородным граничным условием третьего рода для параболического уравнения с одним младшим членом.

Устанавливаются некоторые первоначальные априорные оценки для $v(t,y)$ и доказывается теорема единственности решения.

Далее рассматривается задача с начальным условием. Эта задача сводится к задаче типа Стефана. Доказывается их эквивалентность. Для решения задачи типа Стефана установлены априорные оценки шаудеровского типа и на их основе доказана теорема существования. При этом для неизвестной границы установлены двусторонние оценки с помощью известных кривых, которые определяют поведение неизвестной границы при $t \to 0$. В конце статьи доказано, что при неограниченном возрастании времени свободная граница стремится к некоторой постоянной.

Известно, что теплопроводность в высокополимерных системах и материалах (металлах) типа Сторма описывается уравнением (1)).

В работе [16] для уравнения (1) рассмотрена краевая задача в полупрямой, и она сведена к интегральному уравнению Вольтерра, решенному методом последовательных приближений.

2. Сведение задачи к задаче для уравнения теплопроводности. Введем новую искомую функцию $v(t,z),\ z = z(t,x)$ следующим образом [9, 16]:

$$u(t,x) = \frac{1}{v(t,z)}, \qquad z_x(t,x) = \frac{1}{v(t,z)} = u(t,x), \qquad z_t(t,x) = \frac{u_x(t,x)}{u^2(t,x)}, \quad z_{xt} = z_{tx}.$$

При этом граница $x = 0$ переходит на

$$z = z(t,0) = \int\limits_0^t \frac{u_x(\eta,0)}{u^2(\eta,0)} d\eta = \int\limits_0^t \alpha d\eta = \alpha t,$$

а свободная граница $x = s(t)$ — на

$$z(t, s(t)) = \int\limits_0^{s(t)} g(\eta)d\eta = \gamma(t).$$

Область D_T переходит в область $\Omega_0 = \{(t,z)\colon 0 < t \le T, \alpha t < z < \gamma(t)\}$.

Для новой функции $v(t,z)$ получаем задачу

$$v_t = v_{zz}, \quad (t,z) \in \Omega_0,$$

$$v_z(t, \alpha t) = -\alpha v(t, \alpha t), \quad 0 < t \le T,$$

$$v_z(t, \gamma(t)) = 0, \quad 0 < t \le T,$$

$$v(t, \gamma(t)) = \frac{1}{g(s(t))} = \int\limits_0^t q(\gamma(\eta))d\eta + a.$$

где a — положительная постоянная, $q(z)$ — известная функция.

Теперь распрямляем левую границу заменой $y = z - \alpha t,\ t = t$ и в новых независимых переменных (t,y) имеем

$$v_t = v_{yy} + \alpha v_y(t,y) \quad \text{в} \quad \Omega = \{(t,y)\colon 0 < t \le T, 0 < y < h(t)\}, \tag{5}$$

$$v_y(t,0) = -\alpha v(t,0), \quad 0 < t \le T, \tag{6}$$

$$v_y(t, h(t)) = 0, \quad 0 < t \le T, \tag{7}$$

$$v(t, h(t)) = a + \int\limits_0^t q(h(\eta))d\eta, \quad 0 < t \le T, \tag{8}$$

где $h(t) = \gamma(t) - \alpha t$. При этом $\dot h(t) = \dot\gamma(t) - \alpha = \dot s(t) g(s(t)) - \alpha$.

Устанавливаем некоторые первоначальные априорные оценки, которые применяются при доказательстве теоремы единственности.

Лемма 1. *Пусть $\alpha < 0,\ q(x) > 0,\ q_x(x) < 0$. Тогда для непрерывной в $\bar\Omega_T$ функции $v(t,y)$ справедливы оценки*

$$0 \le v(t,y) \le M_1 \quad \textit{в} \quad \bar\Omega_T, 0 \le v_y(t,y), \quad (t,y) \in \Omega_T.$$

Доказательство. Рассмотрим задачу (5)–(8). По принципу максимума [10] на левой границе нет экстремумов. Так как $q(x) > 0$, то $v(t, h(t)) > 0$. С учетом свойств функции $q(x)$ имеем $0 \le v(t,y) \le q(0)T = M_1$ в $\bar\Omega$.

Чтобы оценить $v_y(t,y) = V(t,y)$ из задачи (5)–(8), находим

$$V_t = V_{yy} + \alpha V_y(t,y), \quad (t,y) \in \Omega,$$

$$V(t,0) = -\alpha v(t,0), \quad 0 < t \le T,$$

$$V(t, h(t)) = 0, \quad 0 < t \le T.$$

Применяя обычный принцип максимума при $t \ge \delta > 0$ и устремляя δ к нулю, находим $v_y(t,y) \ge 0$ в $\bar\Omega \setminus (0,0)$. При этом используем способ, примененный в [2].

3. Единственность решения.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда решение задачи (5)–(8) ((1)–(4)) единственно.*

Доказательство. Предположим, что существуют два решения задачи (5)–(8): $h_1(t)$, $v_1(t,y)$ на отрезке $[0,T_1]$ и $h_2(t)$, $v_2(t,y)$ на $[0,T_2]$.

Пусть $T=\min[T_1,T_2]$, $h(t)=\min\{h_1(t),h_2(t)\}$, $h(0)=0$,

$$Q=\big\{(t,y)\colon 0<t\le T, 0<y<h(t)\big\}.$$

В области $\bar{Q}$ рассмотрим функцию

$$V(t,y)=v_1(t,y)-v_2(t,y)$$

и получим задачу

$$V_t=V_{yy}+\alpha V_y,\quad (t,y)\in Q,$$

$$V_y=-\alpha V(t,0),\qquad V_y(t,h(t))=v_{1y}(t,h(t))-v_{2y}(t,h(t)).$$

В силу теоремы о знаке производной на граничной точке экстремума [10] при $x=0$ экстремума не существует. Пусть точка положительного максимума P лежит на правой границе $x=h(t)$, т. е. $P=(t_0,h(t_0))$.

Для определенности предположим, что $h_1(t_0)<h_2(t_0)$. Имеем

$$V_y(t_0,h_1(t_0))=v_{1y}(t_0,h_1(t_0))-v_2(t_0,h_1(t))=-v_{2y}(t_0,h_1(t_0))<0,$$

что противоречит известной теореме о знаке производной.

Отсутствие отрицательного минимума в этом случае устанавливается следующим образом. Пусть $V(t_0,h_1(t_0))$ — отрицательный минимум функции $V(t,y)$ в $\bar{Q}$.

Далее получаем

$$V(t_0,h_1(t_0))=v_1(t_0,h_1(t_0))-v_2(t_0,h_1(t_0))>v_1(t_0,h_2(t_0))-v_2(t_0,h_2(t_0))=$$

$$=\int\limits_0^{t_0}q(h_1(\eta))d\eta-\int\limits_0^{t_0}q(h_2(\eta))d\eta=$$

$$=\int\limits_0^{t_T}q(h_1(\eta))d\eta-\int\limits_0^{t_T}q(h_2(\eta))d\eta+\int\limits_{t_*}^{t_0}q(h_1(\eta))d\eta-\int\limits_{t_*}^{t_0}q(h_2(\eta))d\eta=$$

$$=V(t_T,h_(t_T))+\int\limits_{t_*}^{t_0}(q(h_1(\eta))-q(h_2(\eta)))d\eta\ge V\left(t_*,h(t_T)\right),\tag{9}$$

где $t_*=\{\max t<t_0\colon h_1(t)=h_2(t)\}$ (в частности $t_*=0$), т. е. $h_1(t_*)=h_2(t_*)$.

Из (9) заключаем, что существует другое минимальное значение $V(t,y)$, которое меньше, чем $V(t_0,h_1(t_0))$.

Случай $h_2(t)<h_1(t)$ доказывается аналогично.

Отсутствие экстремума в случае $h_1(t) = h_2(t)$ устанавливается следующим образом. Пусть P — точка максимума (минимума) функции $V(t,y)$ в $\bar{Q}$. Тогда по известному свойству решения параболического уравнения $V_x(P) > 0$ $(0 < 0)$. Имеем

$$V_y(P) = v_{1y}(P) - v_{2y}(P) = 0.$$

Получили противоречие.

Таким образом, $v_1(t,y) \equiv v_2(t,y)$ в $\bar{Q}$. Докажем, что тогда и $h_1(t) \equiv h_2(t)$ на $[0,T]$. Действительно, если бы нашлась точка $\theta \in [0,T]$ такая, что, например, $h_1(\theta) < h_2(\theta)$, то в силу (7) $v_{1y}(\theta, h_1(\theta)) = 0$, а по доказанному выше $v_y(t,y) > 0$ в $\bar{Q}$. Следовательно, $0 = v_{1y}(\theta, h_1(\theta)) = v_{2y}(\theta, h_1(\theta)) > 0$. Пришли к противоречию.

Теорема 1 доказана.

4. Существование решения.

Теорема 2. *Пусть функция $q(y)$ и ее производные q_y, q_{yy} непрерывны на отрезке $0 \leq$ $\leq y \leq y_0$ и $q(y) > 0$, $q_y(y) < 0$,*

$$\int\limits_0^{y_0(t)} q(\xi)\, d\xi = M_1(t) > 0,$$

где $y = y_0(t)$ — образ x_0.

Тогда решение задачи (5)–(8) существует.

Доказательство. Рассмотрим задачу со свободной границей с начальным условием в области $\Omega_{T_l} = \left\{0 < t \leq T_l, 0 < y < h_l(t)\right\}$:

$$v_t^l(t,y) = v_{yy}^l(t,y) + \alpha v_y^l(t,y), \quad (t,y) \in \Omega_{T_l}, \tag{10}$$

$$v^l(0,y) = \varphi_l(y), \quad 0 \leq y \leq l = h_l(0), \tag{11}$$

$$v_y^l(t,0) = -\alpha v^l(t,0) + \varepsilon(l), \quad 0 \leq t \leq T_l, \tag{12}$$

$$v_y^l(t, h_l(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T_l, \tag{13}$$

$$v^l(t, h_l(t)) = a + \int\limits_0^t q(h_l(\eta))d\eta, \quad 0 \leq t \leq T_l, \tag{14}$$

где $\varphi_l(y)$ — бесконечно дифференцируемая функция, причем $\varphi_l'(x) \leq 0$, $\varphi_l'(l) = 0$, $\varphi_l(l) =$ $= a$, $\varphi_l'(0) = -\alpha\varphi_l(0) + \varepsilon(l)$, $\varphi_l''(y) \geq 0$; $\varepsilon(l)$ — монотонно возрастающая функция по l и $\varepsilon(l) \to 0$ при $l \to 0$.

Для исследования задачи (10)–(14) перейдем к другой паре неизвестных функций $\left(h_l(t), {v_t}^l(t,y)\right)$. Обозначим

$$U^l(t,y) = v_t^l(t,y).$$

Тогда из (10)–(14) для $\left(h_l(t), U^l(t,y)\right)$ получим задачу типа Стефана, для которой известно существование решения [11, 12]

$$U_t^l(t,y) = U_{yy}^l(t,y) + \alpha U_y(t,y), \quad (t,y) \in \Omega, \tag{15}$$

$$U^l(0,y) = \varphi_l''(y) + \alpha\varphi_l'(y) = \Phi(y), \quad 0 \leq y \leq l, \tag{16}$$

$$U_y^l(t,0) = -\alpha U^l(t,0), \quad 0 \le t \le T_l, \tag{17}$$

$$U^l(t,h_l(t)) = q(h_l(t)), \quad 0 \le t \le T_l, \tag{18}$$

$$U_y^l(t,h_l(t)) = -q(h_l(t))\dot{h}_l(t), \quad 0 < t \le T. \tag{19}$$

По принципу максимума при условии $\Phi(y) > 0$ из задачи (15) – (19) непосредственно следует, что $0 < U^l(t,y) < q(0)$.

Далее докажем ряд лемм, используемых при доказательстве теоремы 2.

Лемма 2. *Пусть пара функций $\big(h_l(t), U^l(t,y)\big)$ является решением задачи (15) – (19). Тогда пара $\big(h_l(t), v^l(t,y)\big)$, где*

$$v^l(t,y) = \varphi(0) + \varepsilon y - \alpha \int_0^y \varphi_l(\xi)\,d\xi + \int_0^t U^l(\eta,0)d\eta -$$

$$-\alpha \int_0^y d\xi \int_0^t U^l(\eta,\xi)d\eta + \int_0^y d\xi \int_0^\xi U^l(t,x)\,dx \tag{20}$$

является решением задачи (10) – (14).

Доказательство. Непосредственным дифференцированием из (20) находим

$$v_y^l(t,y) = -\alpha\varphi(y) + \varepsilon - \alpha \int_0^t U^l(\eta,y)d\eta + \int_0^y U^l(t,\xi)d\xi,$$

$$v_{yy}^l(t,y) = \alpha\varphi'(y) - \alpha \int_0^t U_y(\eta,y)d\eta + U^l(t,y),$$

$$v_t^l(t,y) = U^l(t,0) - \alpha \int_0^y U(t,\xi)\,d\xi + \int_0^y d\xi \int_0^\xi U_t(t,x)\,dx =$$

$$= U^l(t,0) - \alpha \int_0^y U^l(t,\xi)\,d\xi + \int_0^y d\xi \int_0^\xi \left(U_{xx}^l + \alpha U_x^l\right)dx = U(t,y),$$

$$v_{yy} + \alpha v_y = -\alpha\left(\varphi_l'(y) + \alpha\varphi_l(y)\right) - \varepsilon\alpha + U^l(t,y) + \alpha \int_0^y U^l(t,x)dx - \alpha \int_0^t \left(U_y^l(\eta,y) + \alpha U^l(\eta,y)\right)d\eta.$$

Далее применяем следующие соотношения

$$\int_0^t (U_y^l(\eta,y) + \alpha U^l(\eta,y))d\eta = \int_0^t (v_{y\eta}^l(\eta,y) + \alpha v_\eta^l(\eta,y))d\eta =$$

$$= v_y^l(t,y) + \alpha v^l(t,y) - \varphi_l'(y) - \alpha\varphi_l(y),$$

$$v_y^l(t,y) = -\alpha v^l(t,y) + \int\limits_0^y U^l(t,\xi)\,d\xi + \varepsilon.$$

Имеем

$$v_{yy} + \alpha v_y = U^l(t,y),$$

т. е. уравнение выполняется.

Теперь проверяется выполнение начального и граничных условий. Выполнение условия (12):

$$v_y^l(t,0) + \alpha v^l(t,0) = -\alpha\varphi_l(0) - \alpha\int\limits_0^t U^l(\eta,0)d\eta + \alpha\varphi_l(0) + \varepsilon + \alpha\int\limits_0^t U^l(\eta,0)d\eta = \varepsilon.$$

Выполнение начального условия:

$$v^l(0,y) = \varphi_l(0) - \alpha\int\limits_0^y \varphi_l(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^y d\xi\int\limits_0^\xi U^l(0,x)dx + \varepsilon y =$$

$$= \varphi_l(0) + \varepsilon y - \alpha\int\limits_0^y \varphi_l(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^y \left(\varphi_l'(\xi) + \alpha\varphi_l(\xi)\right)\,d\xi -$$

$$-\int\limits_0^y \left(\varphi_l'(0) + \alpha\varphi_l(0)\right)\,d\xi = \varphi_l(y).$$

Условие (14):

$$v^l(t,h(t)) = a + \int\limits_0^t \frac{d}{d\tau}\,v^l(\tau,h_l(\tau))d\tau = a + \int\limits_0^t \Big(v_\tau^l + v_y^l h_l(\tau)\Big)\,d\tau =$$

$$= a + \int\limits_0^t U^l(\tau,h(\tau))d\tau = a + \int\limits_0^t q(h_l(\tau))\,d\tau.$$

Условие (13):

$$v_y^l(t,y) + \alpha v^l(t,y) = \varepsilon + \int\limits_0^y U^l(t,\xi)\,d\xi.$$

Отсюда имеем

$$\frac{d}{dt}\,\Big(v_y^l(t,h(t)) + \alpha v^l(t,h(t))\Big) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^{h_l(t)} U^l(t,\xi)\,d\xi =$$

$$= \dot h_l(t)U^l(t,h(t)) + \int\limits_0^t U_t^l(t,\xi)\,d\xi =$$

$$= \dot{h}_l(t)q(h_l(t)) + \int\limits_0^{h_l(t)} \Big(U^l_{\xi\xi}(t,\xi) + U^l_{\xi}(t,\xi)\Big)d\xi =$$

$$= \dot{h}_l(t)q(h_l(t)) + U^l_y(t,h_l(t)) +$$

$$+ \alpha U^l(t,h_l(t)) - U^l_y(t,0) - \alpha U^l(t,0) = \alpha q(h_l(t)).$$

Интегрируя, находим

$$v_y(t,h(t)) + \alpha v(t,h(t)) = \varphi_l'(l) + \alpha\varphi_l(l) + \int\limits_0^t q(h_l(\eta))d\eta.$$

Так как

$$\alpha v^l(t,h_l(t)) = \alpha a + \alpha\int\limits_0^t q(h_l(\eta))d\eta, \qquad \varphi(l) = a, \quad \varphi'(l) = 0,$$

то $v^l_y(t,h_l(t)) = 0$.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $q''(y) + \alpha q'(y) \le 0$ *и существует постоянная* $k > 0$ *такая, что*

$$k > \max\left\{ \big\|q''(y) - q(y)\big\|, \left\| \frac{1}{y_0}\left(\psi(l) + \int\limits_0^{y_0} q(\xi)\,d\xi\right)\right\|, \|q(y)\| \right\}.$$

Если $h_l^-(t)$ *является решением уравнения*

$$\psi(l) + kh_l^-(t) = \int\limits_0^{h_l^-(t)} q(\xi)\,d\xi, \tag{21}$$

то

$$h_l^-(t) \le h_l(t), \quad 0 \le t \le T_l.$$

Здесь $\psi(l) = \alpha\varphi(l) - \varepsilon(l) < 0,\ 0 < h_l(t) < y_0(t) = z(t,x_0) - \alpha t.$

Доказательство. В задаче (15) – (19), произведя замену $m(t,y) = U^l(t,y) - q(y) - k$, находим

$$m_{yy} - m_t + \alpha m_y = -q''(y) - \alpha'(y) \ge 0,$$

$$m_y(t,0) + \alpha m(t,0) = -q'(0) - \alpha q(0) + \alpha k,$$

$$m(t,h_l(t)) = -k < 0,$$

$$m_y(t,h_l(t)) + q'(h(t)) = -q\dot{h}_l(t),$$

$$m(0,y) = \varphi''(y) - q(y) - k \ge 0.$$

Отсюда по принципу максимума имеем

$$m(t,y) = U^l(t,y) - q(y) - k = v_t - q(y) - k = v_{yy}^l + \alpha v_y^l(t,y) - q(y) - k \le 0.$$

Интегрируя это неравенство по y в пределах от 0 до $h_l(t)$, получаем

$$v_y(t, h_l(t)) - v_y(t,0) + \alpha v(t, h_l(t)) - \alpha v(t,0) + k h_l(t) \le \int\limits_0^{h_l(t)} q(\xi)\,d\xi.$$

С учетом граничных условий задачи (10) – (14)

$$\psi(l) + k h_l(t) + \alpha \int\limits_0^t q(h_l(\eta))d\eta \le \int\limits_0^{h_l(t)} q(\xi)\,d\xi.$$

Очевидно, что для $h_l^-(t) \le h_l(t)$ получается уравнение

$$\psi(l) + k h_l^-(t) = \int\limits_0^{h_l^-(t)} q(\xi)\,d\xi.$$

Таким образом, $h_l^-(t) \le h_l(t)$, где $h_l^-(t)$ — решение уравнения (21).

Замечание 1. Разрешимость уравнения (21) относительно $h_l^-(t)$ устанавливается следующим образом. Рассмотрим в промежутке $0 \le y \le y_0$ функцию

$$B(t,y) = \psi(l) + ky - \int\limits_0^{y_0(t)} q(\xi)\,d\xi.$$

Проверим свойство непрерывных функций

$$B(t,0) = \psi(l) < 0, \quad B(t,y_0) = \psi(l) + k y_0 - \int\limits_0^{y_0(t)} q(\xi)\,d\xi > 0, \quad B'_y(t,y) = k - q(y) > 0.$$

Следовательно, существует корень функции по y.

Лемма 4. *Пусть* $TH \ge \max_y |q(y) - \varphi'(y)|$ *и функция* $h_l^+(t)$ *является решением уравнения*

$$H(t+T)h_l^+(t) = \int\limits_0^{h_l^+(t)} q(\xi)\,d\xi - \alpha q(0)t - \psi(l). \tag{22}$$

Тогда

$$h_l(t) \le h_l^+(t), \quad 0 \le t \le T_l.$$

Доказательство. В задаче (15) – (19) введем функцию $m(t,y) = U^l(t,y) - q(y) + H(t+T)$ и получим задачу

$$m_{yy} - m_t + \alpha m_y = -H - q'' - \alpha q' \leq 0,$$
$$m(0,y) = \varphi''(y) - q(y) + HT \geq 0,$$

$$m_y(t,0) = -\alpha m(t,0) - \alpha(q - H(t+T)) - q \leq 0,$$
$$m(t,h_l(t)) = H(t+T) > 0, \quad 0 \leq t \leq T_l.$$

Отсюда по принципу максимума

$$m(t,y) = v^l_{yy} + \alpha v^l_y \geq q(y) + H(t+T). \tag{23}$$

Интегрируя (23) по y в пределах от 0 до $h_l(t)$, имеем

$$v^l_y(t,h_l(t)) - v^l_y(t,0) + \alpha v^l(t,h_l(t)) - \alpha v^l(t,0) \geq \int\limits_0^{h_l(t)} q(\xi)\,d\xi - H(t+T)h_l(t)$$

или

$$\psi(l) + \alpha \int\limits_0^t q(h(\eta))d\eta + H(t+T)h_l(t) \geq \int\limits_0^{h_l(t)} q(\xi)\,d\xi.$$

Заключаем, что для $h^+_l(t) \geq h_l(t)$ получается уравнение

$$(t+T)Hh^+_l(t) + \alpha q(0)t = \int\limits_0^{h^+_l(t)} q(\xi)\,d\xi - \psi(l).$$

Таким образом, $h^+_l(t) \geq h_l(t)$, где $h^+_l(t)$ — решение уравнения (22).

Замечание 2. Для того чтобы доказать разрешимость (22) относительно $h^+_l(t)$, рассмотрим функцию

$$R(t,y) = H(t+T)y - \int\limits_0^y q(\xi)\,d\xi + \alpha q(0)t + \psi(l), \quad 0 \leq y \leq y_0.$$

Проверим справедливость равенств

$$H(t,0) = \alpha q(0) + \psi(l) < 0,$$

$$R(t,y_0) = H(t+T)y_0 + \alpha q(0)t + \psi(l) - \int\limits_0^{y_0} q(\xi)\,d\xi > 0 \quad \text{за счет выбора} \quad H,$$

$$R_y(t,y) = H(t+T) - q(y) > 0.$$

Таким образом, $h_l(t) \leq h^+_l(t)$, где $h^+_l(t)$ — решение уравнения (22).

Замечание 3. Отметим, что в пределе $l \to +0$ функция $h_l^+(t)$ монотонно сходится к функции $h^+(t)$, которая является решением уравнения

$$(t+T)Hh^+(t) + \alpha q(0)t = \int\limits_0^{h^+(t)} q(\xi)\, d\xi,$$

причем $h^+(t)$ будет оценивать сверху $h(t)$ из задачи (5)–(8) и $\dot{h}^+(t) > 0$.

5. Поведение свободной границы $h_l(t)$.

Лемма 5. *Для* $0 \le t \le T_l$ *равномерно по* $l \le l_0 \le y_0$ *выполняется оценка*

$$0 < \dot{h}_l(t) \le N, \quad N = \mathrm{const} > 0, \quad 0 \le t \le T_l.$$

Доказательство. Рассмотрим задачу (15)–(19). Имеем $U_y(0, h_l(0)) = U_y^l(0, l) = \Phi'(l) = -q(l)\dot{h}(0)$. Поскольку $\Phi'(l) < 0,\ q(l) > 0$, то $h_l'(0) > 0$. Доказано, что $U(t, y) > 0$ в $\bar{\Omega}$.

Пусть t_0 — наименьшее значение t, для которого $h_l'(t_0) = 0$. Так как на левой границе нет экстремума и $\Phi'(y) < 0,\ q_y(y) < 0$, то в точке $(t_0, h_l(t_0))$ функция $U(t, x)$ достигает минимум. По теореме о знаке производной в граничной точке экстремума [10] должно быть $U_y(t_0, h_l(t_0)) < 0$. Но по предположению $h_l'(t_0) = 0$ и условию (19) имеем $U_y(t_0, h_l(t_0)) = 0$, что противоречит указанному неравенству.

Таким образом, $h_l'(t_0) > 0$ на $[0, T_l]$.

Для того чтобы установить оценку сверху для функции $h_l'(t_0)$, согласно (19) достаточно оценить $-U_y^l(t, h_l(t))$ сверху.

Рассмотрим в D_{T_l} при $t \le \theta \le T_l$ функцию

$$w(t, y) = U(t, y) - q(y) - M\ln(1 - y + h_l(\theta)), \tag{24}$$

где положительная постоянная M будет выбрана ниже в задаче (25).

Для $w(t, y)$ получим задачу

$$\begin{gathered}
w_{yy} - w_t + \alpha w_y = -q'(y) - \alpha q'(y) + \frac{M}{(1 - y + h_l(\theta))^2} + \frac{\alpha M}{(1 - y + h_l(\theta))} \ge 0, \\
w(0, y) = \Phi(y) - q(y) - M\ln(1 - y + h_l(\theta)) \le 0, \\
w(t, h_l(t)) = -M\ln(1 + h_l(\theta) - h_l(t)) \le 0, \\
w_y(t, 0) = \alpha w(t, 0) - q''(0) - \alpha q(0) + \frac{M}{1 + h_l(\theta)} - \alpha M \ln(1 + h_l(\theta)) \ge 0.
\end{gathered} \tag{25}$$

Отсюда $w(t, y) \le 0$. Следовательно,

$$w(\theta, h_l(\theta)) = 0 \qquad \text{и} \qquad w_y(\theta, h_l(\theta)) \ge 0.$$

Тогда

$$w_y(\theta, h_l(\theta)) = U_y(\theta, h_l(\theta)) - q'(h_l(\theta)) + M \ge 0$$

или

$$-U_y(\theta, h_l(\theta)) \le -q'(h_l(\theta)) + M = N_1.$$

Из (19) находим

$$0 < \dot{h}_l(t) = -\frac{U_y(t, h_l(t))}{q(h_l(t))} \le \frac{N_1}{q(x_0)}.$$

Лемма 5 доказана.

Тем самым установлено, что задачи (1) – (4) и (15) – (19) разрешимы на любом отрезке времени $[0, T]$.

Применяя оценки в пространстве $C^{1+\alpha}$ из [10, 17], получаем равномерные по $l \leq l_0$ оценки норм Гельдера для функций $U^l(t,y)$, $U^l_y(t,y)$. Из условия (19) вытекает, что производные $\dot{h}_l(t)$ равномерно по $l \leq l_0$ удовлетворяют условию Гельдера на отрезке $[0,T]$ и, следовательно, на основе известных оценок шаудеровского типа [17] для решений параболических уравнений можно утверждать, что равномерно по l нормы Гельдера $U^l_t(t,y)$, $U^l_{yy}(t,y)$ ограничены на любом множестве

$$\big\{(t,y)\colon 0 < \delta \leq t \leq T, 0 < s \leq x \leq h_l(t)\big\}.$$

Учитывая установленную в лемме 2 связь между функциями $v^l(t,y)$ и $U^l(t,y)$, а также доказанные в леммах 3 – 6 оценки и используя теорему Арцела, получаем существование такой последовательности $l = l_\nu \to +0$ при $v \to +\infty$, что:

1) функции $h_{l_\nu}(t) \to h(t)$ равномерно на $[0,T]$, причем $h(t) > 0$, $\dot{h}(t) > 0$ на $[0,T]$ $\big($вблизи точки $t = 0$ существенно используются оценки $\dot{h}(t) \leq h_{l_\nu}(t) \leq h^+_{l_\nu}(t) \to h^+(t)$ $\big(h^-(0) = h^+(0) = 0\big)\big)$;

2) функция $U^{l\nu}(t,y)$ в области D_T сходится к непрерывному в $\bar{D}_T$ решению $U(t,y)$ уравнения (15), имеющему на любом множестве $\{(t,y)\colon 0 < \delta \leq t \leq T, 0 < x < h(t)\}$ непрерывные производные $U_y(t,y)$, $U_t(t,y)$, $U_{yy}(t,y)$, причем

$$U(t,h(t)) = q(h(t)), \qquad U_x(t,h(t)) = -q(h(t))\dot{h}(t);$$

3) в каждой точке D_T функция $v^{l\nu}(t,y)$ сходится к решению задачи (5) – (8).

6. Асимптотическое поведение свободной границы при неограниченном возрастании времени. Предположим, что выполнены все условия леммы 5 при любом $t > 0$. В силу результатов, полученных в леммах 2 – 5, функция $h_l(t)$ строго монотонна и ограничена при $t \geq 0$. Следовательно, существует

$$\lim_{t\to+\infty} h_l(t) = h_l(\infty) \leq y_0.$$

Лемма 6. *Справедливо равенство* $\lim_{t\to+\infty} h_l(t) = h_t(\infty) = y_0$.

Доказательство. Предположим противное: $h_l(\infty) = y_0 - \delta < y_0$. Согласно свойствам $q(x)$ из (14) имеем

$$\frac{v_l(t,h_l(t))}{t} = \frac{a}{t} + \frac{1}{t}\int\limits_0^t q(h_l(\eta))d\eta \geq \frac{1}{t}\int\limits_0^t q(y_0-\delta) + \frac{a}{t} = q(y_0-\delta) = \mathrm{const} > 0. \qquad (26)$$

Теперь интегрируя уравнение (15), находим

$$0 = \int\limits_0^t d\eta \int\limits_0^{h_l(\eta)} \Big(\Big(U^l_\xi + \alpha U^l\Big)_\xi - U^l_\eta\Big)d\xi = \int\limits_\Gamma \Big(U^l_\xi + \alpha U^l\Big)d\eta + U^l d\xi.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^t \Phi(\xi)\,d\xi - \int\limits_0^{h_l(t)} U^l(t,\xi)\,d\xi + \alpha\int\limits_0^t q(h_l(\eta))\,d\eta = \int\limits_0^l \Phi(\xi)\,d\xi - \int\limits_0^t U^l(t,\xi)\,d\xi + \alpha v^l(t,h_l(t)) = 0.$$

Далее,

$$-\alpha v^l(t, h_l(t)) = \int\limits_0^l \Phi(\xi)\, d\xi - \int\limits_0^{h_e(t)} U^l(t,\xi)\, d\xi.$$

Так как $U^l(t,\xi) > 0$, то

$$-\alpha v^l(t, h_l(t)) < \int\limits_0^l \Phi(\xi)\, d\xi = \mathrm{const}$$

или

$$\frac{v^l(t, h_l(t))}{t} < \frac{\text{const}}{t}. \tag{27}$$

При $t \to +\infty$ из (26) и (27) получаем противоречие.

Лемма 6 доказана.

Литература

1. *Баренблатт Г. И., Ишлинский А. Ю.* Об ударе вязко-пластического стержня о жесткую преграду // Прикл. математика и механика. – 1962. – **26**, № 3. – С. 497 – 502.
2. *Кружков С. Н.* О некоторых задачах с неизвестной границей для уравнения теплопроводности // Прикл. математика и механика. – 1967. – **31**, № 6. – С. 1009 – 1020.
3. *Кружков С. Н., Якубов С.* О разрешимости одного класса задач с неизвестной границей для уравнения теплопроводности и поведении решений при неограниченном возрастании времени // Динамика сплош. среды. – 1978. – Вып. 36. – С. 46 – 70.
4. *Fasano A., Primicerio M.* Viscoplastic impact of a rod on a wall // Boll. Unione Mat. Ital. Ser. 4. – 1975. – **7**, № 3. – P. 531 – 555.
5. *Takhirov J., Turaev R.* The free boundary problem without initial condition // J. Math. Sci. – 2012. – **187**, № 1. – P. 86 – 100.
6. *Storm M. L.* Heat conduction in simple metals // J. Appl. Phys. – 1951. – **22**, № 7. – P. 940 – 951.
7. *Hill J. M., Hart V. G.* The Stefan problem in nonlinear heat conduction // J. Appl. Math. Phys. – 1986. – **37**. – P. 206 – 229.
8. *Briozzo A. C., Natale M.* One-dimensional nonlinear Stefan problem in Storm's materials // Mathematics. – 2014. – **2**. – P. 1 – 11.
9. *De Lillo S., Salvatori M. C.* A two-phase free boundary problem for the nonlinear heat equation // J. Nonlin. Math. Phys. – 2004. – **11**, № 1. – P. 134 – 140.
10. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 428 с.
11. *Мейрманов А.* Задача Стефана. – Новосибирск: Наука, 1986. – 240 с.
12. *Рубинштейн Л. И.* Проблема Стефана. – Рига: Звайзгне, 1967. – 457 с.
13. *Данилюк И. И.* О задаче Стефана // Успехи мат. наук. – 1985. – 40, вып. 5(245). – С. 133 – 185.
14. *Bazaliy B. V., Friedman A.* A free boundary problem for an elliptic-parabolic system: Application to a model of tumor growth // Comm. Partial Differential Equations. – 2003. – **28**. – P. 517 – 560.
15. *Флорин В. А.* Уплотнение земляной среды и фильтрация при переменной пористости с учетом влияния связанной воды // Изв. АН СССР. – 1951. – № 11. – С. 1625 – 1649.
16. *де Лилло С., Луно Г., Соммакал М.* Решения нелинейной задачи теплопроводности на полупрямой // Теорет. мат. физика. – 2007. – **152**, № 1. – С. 58 – 65.
17. *Кружков С. Н.* Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1967. – **16**. – С. 329 – 346.

Получено 16.09.2017,

после доработки — 31.07.2018