УДК 517.912

КЛАСИФІКАЦІЯ СИМЕТРІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ $(1+2)$-ВИМІРНОГО РІВНЯННЯ РЕАКЦІЇ – КОНВЕКЦІЇ – ДИФУЗІЇ

М. І. Сєров, М. М. Сєрова, Ю. В. Приставка

Полтав. нац. техн. ун-т ім. Ю. Кондратюка
Першотравневий пр., 24, Полтава, 36011, Україна
e-mail: mserov4@gmail.com
yuliaprystavka@gmail.com

We classify the symmetry properties of the $(1+2)$-dimensional reaction – convection – diffusion equation depending on the values of the nonlinearities in this equation. We use the Lie symmetry for the construction of invariant ansatzs, reduction, and finding exact solutions of this equation.

Прокласифіковано симетрійні властивості $(1+2)$-вимірного рівняння реакції – конвекції – дифузії залежно від значень нелінійностей, які входять у це рівняння. Ліївську симетрію використано для побудови інваріантних анзаців, редукції та знаходження точних розв'язків даного рівняння.

Вступ. Дослідження рівнянь дифузії та різних їхніх модифікацій із додатковими членами, що відповідають реакції або конвекції, є актуальною задачею математичної фізики, оскільки ці рівняння часто використовують як математичні моделі різноманітних процесів у природі та суспільстві. Моделі дифузії часто формулюються в термінах нелінійних диференціальних рівнянь, які, як правило, не є інтегровними та не можуть бути лінеаризованими, тому симетрійні методи, завдяки своїй універсальності, є важливими для їхнього дослідження.

Однією з основних задач класичного групового аналізу диференціальних рівнянь є задача знаходження найширшої (максимальної) групи симетрії, яку допускає диференціальне рівняння, і не менш важливою є задача групової класифікації диференціальних рівнянь, започаткована С. Лі. У своїх роботах він здійснив групову класифікацію лінійних $(1+1)$-вимірних рівнянь другого порядку параболічного типу [1]. Сучасну постановку задачі групової класифікації здійснив Л. В. Овсянніков, який у роботі [2] вперше провів повну групову класифікацію нелінійного $(1+1)$-вимірного рівняння дифузії

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x). \tag{1}$$

У подальших дослідженнях симетрійних властивостей об'єктом розгляду стали узагальнення рівняння (1). Так, зокрема, класифікацію рівняння

$$u_t + u_{xx} = \partial_x(k(u)u_x)$$

проводив у своїх дослідженнях В. Л. Катков [3].

У роботі [4] В. А. Тичинін дослідив симетрію та знайшов точні розв'язки рівняння

$$u_t = h(u)u_{xx}.$$

Повну групову класифікацію рівняння теплопровідності з джерелом (стоком), яке використовується для моделювання біологічних і фізико-хімічних процесів

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x) + g(u),$$

© М. І. Сєров, М. М. Сєрова, Ю. В. Приставка, 2019

та його узагальнень на двовимірний і тривимірний випадки провели В. А. Дородніцин, І. В. Князєва, С. Р. Свирщевський у роботах [5, 6]. Зауважимо, що це було зроблено значно пізніше роботи Л. В. Овсяннікова, оскільки пов'язано зі складністю реалізації алгоритму Лі для розв'язання таких задач у випадку, коли рівняння містить дві та більше довільні функції. Продовжили роботу в цьому напрямку А. Орон, Ф. Розено [7], С. М. Юнг, К. Вербург, П. Бавеє [8] та М. П. Едвардс [9], які досліджували симетрійні властивості рівнянь дифузії – конвекції

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x) + f(u)u_x.$$

Вагомий внесок у цьому напрямку зробили І. Ш. Ахатов, Р. К. Газізов і Н. Х. Ібрагімов. У роботі [10] вони прокласифікували симетрійні властивості рівняння

$$u_t = G(u_x)u_{xx}.$$

Р. О. Попович і Н. М. Іванова в роботі [11] провели повну групову класифікацію та дослідили перетворення еквівалентності рівнянь вигляду

$$f(x)u_t = (g(x)a(u)u_x)_x + b(u)u_x.$$

А. М. Самойленко та В. І. Лагно [12, 13], В. І. Лагно, С. В. Спічак і В. І. Стогній [14], Р. З. Жданов [15, 16], а також П. Басараб-Горват [15] у зазначених роботах провели повну групову класифікацію найбільш загальних квазілінійних рівнянь еволюційного типу

$$u_t = F(t,x,u,u_x)u_{xx} + G(t,x,u,u_x).$$

С. В. Спічак і В. І. Стогній [17, 18] одержали максимальні групи перетворень і побудували деякі класи точних розв'язків для одновимірного рівняння Фокера – Планка з довільними достатньо гладкими функціями $A(t,x),\ B(t,x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A(t,x)u] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(t,x)u]. \tag{2}$$

У роботах [19 – 22] з точністю до перетворень еквівалентності проведено вичерпний аналіз симетрій Лі нелінійного рівняння реакції – конвекції – дифузії

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x) + f(u)u_x + g(u)$$

у випадку однієї просторової змінної. Деякі класи точних розв'язків цього рівняння побудовано в роботах А. Ф. Баранника, Т. А. Баранника, І. І. Юрика [23, 24].

Таким чином, протягом останніх років багато уваги приділялося дослідженню класичних симетрій рівняння реакції – конвекції – дифузії, оскільки рівняння цього класу займають вагоме місце серед рівнянь математичної фізики.

Розглянемо $(1+2)$-вимірне рівняння реакції – конвекції – дифузії

$$u_0 = \partial_a(f^0(u)u_a) + f^a(u)u_a + h(u), \tag{3}$$

де $u = u(x_0, x_1, x_2),\ x_0$ — часова змінна, $x_1,\ x_2$ — просторові змінні, $f^0(u),\ f^a(u),\ h(u)$ — довільні гладкі функції, коефіцієнти дифузії, конвекції та реакції відповідно, індекс біля функції внизу означає диференціювання за відповідною змінною; під індексами, які повторюються, потрібно розуміти підсумовування, $a \in \{1, 2\}$.

Рівняння (3) використовується для опису різних фізичних процесів, зокрема процесів теплопровідності, дифузії та конвекції (див., наприклад, [25–28]). Воно застосовується для моделювання руху частинок, енергії або інших фізичних величин у певній фізичній системі. Так, модифікації рівняння (3) використовуються для моделювання переносу енергії в плазмі [29, 30], розподілу розчинів у ґрунті, руху рідин у пористому середовищі, процесів хемотаксису та інших фізичних і біохімічних процесів. При конкретних значеннях нелінійностей $f^0(u),\ f^a(u),\ h(u)$ рівняння (3) використовується для опису переносу кисню в кровоносній системі, моделювання росту тромбу в пристінковому потоці. Одним із застосувань даного рівняння також є дослідження процесів розповсюдження речовини, яка забруднює водойми [25]. Гідродинамічна нестійкість, що виникає поблизу поверхні розподілу двох рідин, які не змішуються, і описується рівнянням (3), зустрічається в таких галузях, як нафтопереробка, процеси горіння, сепарація руд і т. п. Рівняння (3) має широке застосування також у біології [31, 32], хімії [33, 34] та інших галузях науки [35–42].

Поставимо задачу прокласифікувати симетрійні властивості рівняння (3) залежно від значень нелінійностей, які входять в це рівняння, та застосувати знайдені симетрії для побудови точних розв'язків даного рівняння.

2. 1. Система визначальних рівнянь. Основна алгебра інваріантності.

Означення. *Основною алгеброю інваріантності рівняння (3) назвемо алгебру, відносно якої дане рівняння інваріантне при довільних виглядах нелінійностей* $f^0,\ f^a,\ h$.

Справедливе таке твердження.

Теорема 1. *Основною алгеброю інваріантності рівняння (3) є алгебра*

$$A^{bas} = \left\langle \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0},\ \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},\ \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle. \tag{4}$$

Доведення. Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності рівняння (3) будемо знаходити у вигляді

$$X = \xi^\mu(x,u)\partial_\mu + \eta(x,u)\partial_u, \tag{5}$$

де $x = (x_0, x_1, x_2),\ \mu = \overline{0,2},\ \xi^\mu,\ \eta$ — шукані функції.

Застосувавши до рівняння (3) алгоритм С. Лі (див., наприклад, [43, 44]) одержимо систему визначальних рівнянь відносно нелінійностей $f^0,\ f^a,\ h$ та координат $\xi^\mu,\ \eta$ оператора (5):

$$\xi^\mu_u = \xi^0_a = \eta_{uu} = 0, \tag{6}$$

$$\xi^1_1 = \xi^2_2, \qquad \xi^2_1 + \xi^1_2 = 0, \tag{7}$$

$$\eta \dot{f}^0 = (2\xi^1_1 - \xi^0_0) f^0, \tag{8}$$

$$\eta \dot{f}^a = [(\xi^1_1 - \xi^0_0)\delta_{ab} + \xi^2_1 \varepsilon_{ab}] f^b - 2a_a f^0 - 2(a_a u + b_a)\dot{f}^0 - \xi^a_0, \tag{9}$$

$$\eta \dot{h} = (a - \xi^0_0)h - (\triangle a u + \triangle b) f^0 - (a_a u + b_a) f^a + a_0 u + b_0, \tag{10}$$

де $(\delta_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — символ Кронекера, $(\epsilon_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ — антисиметричний тензор; якщо функція залежить лише від однієї змінної, то крапка над нею означає диференціювання за даною змінною.

Для того щоб знайти основну алгебру інваріантності рівняння (3), припускаємо, що $f^0,\ f^a,\ h$ — довільні гладкі функції. Це дає можливість “розчепити” систему (8)–(10) за цими функціями та їхніми похідними. У результаті розчеплення одержимо систему визначальних рівнянь відносно функцій ξ^μ і η:

$$\xi^\mu_\nu = \xi^\mu_u = 0, \quad \eta = 0. \tag{11}$$

Загальним розв’язком системи (11) є функції

$$\xi^\mu = c_\mu, \quad \eta = 0, \tag{12}$$

де c_μ — довільні сталі. Оператор (5) з функціями (12) породжує алгебру (4).

Теорему 1 доведено.

3. Перетворення еквівалентності рівняння (3). Оскільки рівняння (3) містить довільні функції $f^0,\ f^a,\ h,$ воно описує деякий клас рівнянь. При дослідженні симетрійних властивостей певного класу рівнянь важливе значення має розгляд перетворень еквівалентності даного класу. За допомогою перетворень еквівалентності клас диференціальних рівнянь можна поділити на нееквівалентні підкласи, виділивши при цьому в кожному з підкласів канонічні рівняння. Достатньо дослідити тільки канонічні представники з кожного підкласу, щоб зробити висновок про симетрійні властивості всіх рівнянь даного класу.

Знайдемо перетворення еквівалентності рівняння (3), які будемо використовувати при проведенні повної групової класифікації цього рівняння.

Теорема 2. *Максимальною групою неперервних перетворень еквівалентності рівняння (3) є група перетворень, суперпозиція яких має вигляд*

$$\begin{aligned}
&x_0' = e^{\theta_0} x_0 + m_0,\\
&x_a' = e^{\theta_1}(\delta_{ab}\cos\theta_2 + \epsilon_{ab}\sin\theta_2)x_b + q_a x_0 + m_a,\\
&u' = e^{\theta} u + m,\\
&f^{0'} = e^{2\theta_1-\theta_0} f^0,\\
&f^{a'} = e^{-\theta_0}\big[e^{\theta_1}(\delta_{ab}\cos\theta_2 + \epsilon_{ab}\sin\theta_2) f^b - q_a\big],\\
&h' = e^{\theta-\theta_0} h,
\end{aligned} \tag{13}$$

де $q_a,\ \theta_0,\ \theta_a,\ \theta,\ m_0,\ m_a,\ m$ *— довільні групові параметри.*

Теорема 2 доводиться за допомогою методу, запропонованого в роботах [14, 45].

Окрім неперервних, клас рівнянь (3) має ще й додаткові перетворення еквівалентності. Поставимо задачу знайти всі можливі невироджені локальні перетворення вигляду

$$y_0 = a(x,u), \qquad y_a = b^a(x,u), \qquad w = c(x,u), \tag{14}$$

які зводять довільне рівняння класу (3) до рівняння того ж класу:

$$\triangle w = F^0(w) w_0 + F^a(w) w_a + H(w), \tag{15}$$

де $x = (x_0,\ x_1,\ x_2),\ u = u(x),\ w = w(y_0,\ y_1,\ y_2),\ F^0 = F^0(w),\ F^a = F^a(w),\ H = H(w)$ — довільні гладкі функції.

Теорема 3. *Будь-яке рівняння (3) зводиться до рівняння (15) за допомогою невиродженої локальної підстановки (14) тоді і тільки тоді, коли підстановка має вигляд*

$$y_0 = a(x_0), \qquad y_a = b^a(x), \qquad v = \alpha(x)u + \beta(x), \tag{16}$$

причому функції $a,\ b^a,\ \alpha,\ \beta,\ f^0,\ f^a,\ h,\ F^0,\ F^a,\ H$ *задовольняють умови*

$$\dot{a}\alpha(b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2) \neq 0, \tag{17}$$

$$b_a^1 b_a^2 = 0, \tag{18}$$

$$b_a^1 b_a^1 = b_a^2 b_a^2, \tag{19}$$

$$b_a^1 b_a^1 f^0(u) = \dot{a} F^0(v), \tag{20}$$

$$-\frac{2}{\alpha} b_b^a(\alpha_b u + \beta_b)\dot{f}^0(u) - \frac{2}{\alpha}\alpha_b b_b^a f^0(u) - b_0^a + b_b^a f^b(u) + = \dot{a} F^b(v), \tag{21}$$

$$\alpha_0 u + \beta_0 - \left[\frac{2}{\alpha}\alpha_a(\alpha_a u + \beta_a) - (\triangle\alpha u + \triangle\beta)\right] f^0(u) +$$

$$+ \frac{1}{\alpha}(\alpha_a u + \beta_a)(\alpha_a u + \beta_a) f^0(u) - (\alpha_a u + \beta_a) f^a(u) + \alpha h(u) = \dot{a} H(v). \tag{22}$$

Доведення теореми 3 проводиться безпосередньою підстановкою (14) у рівняння (3) та порівнянням отриманого рівняння з рівнянням (15).

4. Необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності рівняння (3). Зауважимо, що у випадку $f^a = 0$ (відсутність конвективних доданків) результати класифікації рівняння (3) наведено в роботах [2, 5]. Тому надалі ми будемо вважати, що $|f^1| + |f^2| \neq 0$.

Встановимо необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності $(1+2)$-вимірного рівняння реакції – конвекції – дифузії (3). Тобто, вкажемо вигляд нелінійностей $f^0,\ f^a,\ h$, при яких рівняння (3) може бути інваріантне відносно алгебри, ширшої, ніж алгебра (4).

Теорема 4. *Для того щоб рівняння (3) допускало розширення основної алгебри інваріантності (4), необхідно, щоб нелінійності* $f^0,\ f^a,\ h$, *з точністю до перетворень еквівалентності (13) та (16) – (22), мали вигляд, наведений у табл. 1.*

У табл. 1 $K_{ab}(u) = \delta_{ab}\cos pu + \varepsilon_{ab}\sin pu,\ \lambda_a,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ \lambda_5,\ k,\ m,\ p$ — довільні сталі, $\vec{\lambda}^2 \neq 0,\ s \in \{0, 1\}$.

Доведення. Визначальну систему (8) – (10) будемо розв'язувати за допомогою методу введення структурних сталих [46, 47]. У даному випадку структурні зв'язки мають вигляд

$$\begin{gathered} a = k_1\varphi, \quad b = k_2\varphi, \quad 2\xi_1^1 - \xi_0^0 = k\varphi, \quad \xi_1^1 - \xi_0^0 = m\varphi, \quad \xi_1^2 = p\varphi, \\ a_a = \alpha_a\varphi, \quad b_a = \beta_a\varphi, \quad \xi_0^a = \gamma_a\varphi, \quad a - \xi_0^0 = (2m + k_1 - k)\varphi, \\ \triangle a = r_1\varphi, \quad \triangle b = q_1\varphi, \quad a_0 = r_2\varphi, \quad b_0 = q_2\varphi, \end{gathered} \tag{23}$$

де $k,\ m,\ p,\ k_a,\ q_a,\ r_a,\ \alpha_a,\ \beta_a,\ \gamma_a$ — довільні сталі, які назвемо структурними константами, $\varphi = \varphi(x)$ — довільна гладка функція.

Табл. 1. Вигляд нелінійностей, при яких можливе розширення основної алгебри інваріантності рівняння (3)

№ п/п	f^0	f^a	h	Умови
1	e^{su}	$\lambda_b e^{mu} K_{ab}(u)$	$\lambda_3 e^{(2m-s)u}$	$(m,p) \neq (0,0)$, $m \neq s$
2	e^u	$\lambda_a u$	$\lambda_3 e^{-u}$	
3	e^u	$\lambda_b e^u K_{ab}(u)$	$\lambda_3 e^u$	
4	u^k	$\lambda_b u^m K_{ab}(\ln u)$	$\lambda_3 u^{2m-k+1}$	$m \neq k$, $(m,p) \neq (0,0)$
5	u^k	$\lambda_a \ln u$	$\lambda_3 u^{-k+1}$	$k \neq 0$
6	u^k	$\lambda_b u^k K_{ab}(\ln u)$	$\lambda_3 u^{k+1}$	$k \neq 0$
7	1	$\lambda_a u$	$\lambda_3 u + \lambda_4$	
8	1	$\lambda_a \ln u$	$u(\lambda_3 \ln^2 u + \lambda_4 \ln u + \lambda_5)$	

Підставивши умови (23) в систему (8)–(10), завдяки довільності функції $\varphi(x)$ одержимо

$$
\begin{aligned}
&(k_1 u + k_2)\dot{f}^0 = k f^0,\\
&(k_1 u + k_2)\dot{f}^a = (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab}) f^b - 2\alpha_a f^0 - 2(\alpha_a u + \beta_a)\dot{f}^0 - \gamma_a,\\
&(k_1 u + k_2)\dot{h} = (2m - k + k_1)h - (r_1 u + q_1) f^0 - (\alpha_a u + \beta_a) f^a + r_2 u + q_2.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Система (24) називається структурною для функцій $f^0,\ f^a,\ h$.

Для спрощення структурної системи (24) застосуємо перетворення еквівалентності вигляду

$$
x_0' = x_0, \quad x_a' = x_a + \theta_a x_0, \quad u' = u, \quad f^{0'} = f^0, \quad f^{a'} = f^a - \theta_a, \quad h' = h. \tag{25}
$$

Переписуючи систему (24) в штрихованих змінних та підставляючи в неї формули (25), одержуємо

$$
\begin{aligned}
&(k_1 u + k_2)\dot{f}^0 = k f^0,\\
&(k_1 u + k_2)\dot{f}^a = (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab}) f^b - 2\alpha_a f^0 - 2(\alpha_a u + \beta_a)\dot{f}^0 - \Gamma_a,\\
&(k_1 u + k_2)\dot{h} = (2m - k + k_1)h - (r_1 u + q_1) f^0 - (\alpha_a u + \beta_a) f^a + R_2 u + Q_2,
\end{aligned}
$$

де

$$
\Gamma_a = \big[m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab}\big]\theta_b + \gamma_a,
$$

$$
R_2 = \theta_a \alpha_a + r_2, \quad Q_2 = \theta_a \beta_a + q_2.
$$

Якщо

$$
m^2 + p^2 \neq 0, \tag{26}
$$

то параметри θ_a можна підібрати так, щоб $\Gamma_a = 0$. Тому у випадку (26) з точністю до перетворень (25) можна вважати $\gamma_a = 0$.

Розв'язок системи (24) залежить від значень сталих $k_1,\ k_2,\ k$. Мають місце п'ять нееквівалентних випадків:

1) $k_1 = 0,\ k_2 = 0,\ k = 0$;
2) $k_1 = 0,\ k_2 \neq 0,\ k \neq 0$;
3) $k_1 \neq 0,\ k_2 = 0,\ k \neq 0$;
4) $k_1 = 0,\ k_2 \neq 0,\ k = 0$;
5) $k_1 \neq 0,\ k_2 = 0,\ k = 0$.

Доведення проведемо на прикладі випадку 2.

Нехай $k_1 = 0,\ k_2 \neq 0,\ k \neq 0$ (не зменшуючи загальності, можна вважати $k_2 = 1$). З умови (23) одержуємо, що $a = 0,\ b = \varphi$, що, в свою чергу, накладає умови

$$\alpha_a = r_a = 0$$

та

$$b = 2\xi_1^1 - \xi_0^0, \quad mb = \xi_1^1 - \xi_0^0, \quad pb = \xi_1^2, \quad \gamma_a b = \xi_0^a. \tag{27}$$

З рівнянь (27) маємо

$$(2m-1)\xi_1^1 = (m-1)\xi_0^0. \tag{28}$$

Взявши диференціальні наслідки рівняння (28) за змінними x_1 та x_2 та використавши (7), отримаємо

$$m(2m-1)b_a = 0. \tag{29}$$

Продиференціювавши останнє рівняння (27) за змінними x_a та використавши рівність (29), одержимо

$$m(m-1)(2m-1)b_0 = 0. \tag{30}$$

З умов (29) та (30) випливають такі нееквівалентні випадки: а) $m \neq 0,\ \frac{1}{2}, 1$; б) $m = 0$; в) $m = \frac{1}{2}$; г) $m = 1$. Розглянемо кожен із них окремо.

а) $m \neq 0,\ \frac{1}{2}, 1$.

З умов (29) та (30) маємо b — const. Тоді $\beta_a = q_a = 0$. У даному випадку виконується умова (26), з якої випливає, що $\gamma_a = 0$.

Таким чином, система (24) має вигляд

$$\dot{f}^0 = f^0, \quad \dot{f}^a = (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b, \quad \dot{h} = (2m-1)h. \tag{31}$$

Загальним розв'язком системи (31) є функції

$$f^0 = \lambda_0 e^u, \quad f^a = \lambda_b e^{mu}(\delta_{ab}\cos pu + \varepsilon_{ab}\sin pu), \quad h = \lambda_3 e^{(2m-1)u}, \tag{32}$$

де $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ — довільні сталі. З точністю до перетворень еквівалентності (13) можна вважати $\lambda_0 = 1$.

Отже, ми одержали випадок 1 з табл. 1 при $s = 1$.

б) $m = 0$.

З умов (23) маємо $\beta_a = q_a = 0$. Тоді система (24) має вигляд

$$\dot{f^0} = f^0, \quad \dot{f^a} = p\varepsilon_{ab} f^b - \gamma_a, \quad \dot{h} = (2m-1)h. \tag{33}$$

Розв'язок системи (33) залежить від сталої p.

б$_1$) $p \neq 0$ (з умови (26) $\gamma_a = 0$).

Загальним розв'язком системи (33) є функції

$$f^0 = \lambda_0 e^{ku}, \quad f^a = \lambda_b K_{ab}(u), \quad h = \lambda_3 e^{-u},$$

де $\lambda_0, \ \lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3$ — довільні сталі. З точністю до перетворень еквівалентності (13) можна вважати $\lambda_0 = 1$, що доповнює формули (32) при $m = 0$.

б$_2$) $p = 0$.

Загальним розв'язком системи (33) з точністю до перетворень еквівалентності (13) будуть нелінійності

$$f^0 = e^u, \quad f^a = \lambda_a u, \quad h = \lambda_3 e^{-u},$$

де $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3$ — довільні сталі. Тобто справедливий випадок 2 із табл. 1.

в) $m = \dfrac{1}{2}$.

Аналогічно до випадку б$_1$) отримуємо

$$f^0 = e^u, \quad f^a = \lambda_b e^{\frac{1}{2}u}(\delta_{ab}\cos pu + \varepsilon_{ab}\sin pu), \quad h = \lambda_3,$$

що доповнює формули (32) при $m = \dfrac{1}{2}$.

г) $m = 1$ (з умови (26) $\gamma_a = 0$).

Тоді система (24) має вигляд

$$\dot{f^0} = f^0, \quad \dot{f^a} = (\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b, \quad \dot{h} = h + q_2. \tag{34}$$

Загальним розв'язком системи (34) з точністю до перетворень еквівалентності (13) та (16) – (22) будуть функції

$$f^0 = e^{ku}, \quad f^a = \lambda_b e^u K_{ab}(u), \quad h = \lambda_3 e^u,$$

де $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3, \ \lambda_4$ — довільні сталі. Отже, маємо випадок 3 з табл. 1.

Випадок 1 з табл. 1 при $s = 0$ отримується у випадку 4) $k_1 = 0, \ k_2 \neq 0, k = 0$.

Інші випадки з табл. 1 доводяться аналогічно.

Теорему 4 доведено.

5. Достатні умови розширення основної алгебри інваріантності.

Теорема 5. *Для того щоб максимальні алгебри інваріантності рівняння (3) були ширшими порівняно з алгеброю (4), необхідно і достатньо, щоб рівняння (3) мало один із нееквівалентних відносно перетворень (13) та (16) – (22) виглядів, записаних у другій колонці табл. 2. При цьому відповідні максимальні алгебри інваріантності наведено в третій колонці даної таблиці.*

Табл. 2. Групова класифікація локально нееквівалентних рівнянь (3)

№	Рівняння	МАІ	Умови
1	$u_0 = \partial_a(e^{su}u_a)+$ $+\lambda_b e^{mu}K_{ab}(u)u_a + re^{(2m-s)u}$	$\langle\partial_0, \partial_a,$ $(m-s)D + \mathcal{D}_0 - pJ_{12}\rangle$	$m \neq s$ $(m,p) \neq (0,0)$
2	$u_0 = \partial_a(e^u u_a) + \lambda_a u u_a + re^{-u}$	$\langle\partial_0, \partial_a,$ $D - \mathcal{D}_0 - x_0\lambda_a\partial_a\rangle$	
3	$u_0 = \partial_a(e^u u_a) + \lambda_b e^u K_{ab}(u)u_a + re^u$	$\langle\partial_0, \partial_a, \mathcal{D}_0 - pJ_{12}\rangle$	$s = 1$
4	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) + \lambda_b u^m K_{ab}(\ln u)u_a+$ $+ru^{2m-k+1}$	$\langle\partial_0, \partial_a, (m-k)D+$ $+D_0 - pJ_{12}\rangle$	$m \neq k,$ $(m,p) \neq (0,0)$
5	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) + \ln u\lambda_a u_a + ru^{-k+1}$	$\langle\partial_0, \partial_a,$ $kD - D_0 - x_0\lambda_a\partial_a\rangle$	$k \neq 0$
6	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) + \lambda_b u^m K_{ab}(\ln u)u_a$ $+ru^{k+1}$	$\langle\partial_0, \partial_a, D_0 - pJ_{12}\rangle$	$k \neq 0, p \neq 0$
7	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) + u^k\lambda_a u_a + ru^{k+1}$	$\langle\partial_0, \partial_a, D_0\rangle$	$k \neq 0,$ $4(k+1)r \neq \vec{\lambda}^2$
8	$u_0 = \partial_a(u^k u_a) + u^k\lambda_a u_a + \dfrac{\vec{\lambda}^2}{4(k+1)}u^{k+1}$	$\langle\partial_0, \partial_a, D_0, Q_a\rangle$	$k \neq -1; 0$
9	$u_0 = \triangle u + u\lambda_a u_a \pm u$	$\langle\partial_0, \partial_a, \mathcal{G}_a\rangle$	
10	$u_0 = \triangle u + u\lambda_a u_a$	$\langle\partial_0, \partial_a, D - \partial_u, \mathcal{G}\rangle$	
11	$u_0 = \triangle u + u\ln u\lambda_a u u_a + r$	$\langle\partial_0, \partial_a, G\rangle$	
12	$u_0 = \triangle u + \lambda_a \ln u u_a \pm u\ln u$	$\langle\partial_0, \partial_a, H\rangle$	
13	$u_0 = \triangle u + 2\ln u\lambda_a u_a+$ $+\vec{\lambda}^2 u(\pm\ln^2 u + q)$	$\langle\partial_0, \partial_a, Y\rangle$	

У табл. 2 введено такі позначення:

$$J_{12} = x_2\partial_1 - x_1\partial_2, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a,$$

$$\mathcal{D}_0 = sx_0\partial_0 - \partial_u, \quad D_0 = kx_0\partial_0 - u\partial_u,$$

$$H = e^{\pm x_0}(\lambda_a\partial_a \mp u\partial_u), \quad \mathcal{G}_a = e^{\pm x_0}\left(\partial_a \mp \frac{\lambda_a}{\vec{\lambda}^2}\partial_u\right),$$

$$\mathcal{G} = x_0\lambda_a\partial_a - \partial_u, \quad G = x_0\lambda_a\partial_a - u\partial_u,$$

$$Y = e^{(1-q)\vec{\lambda}^2 x_0 - \vec{\lambda}\vec{x}}u\partial_u,$$

$$Q_1 = e^w\left[(\lambda_a\cos\omega + \lambda_a^{\perp}\sin\omega)\partial_a - \frac{\vec{\lambda}^2}{2(k+1)}\cos\omega u\partial_u\right],$$

$$Q_2 = e^w\left[(-\lambda_a^{\perp}\cos\omega + \lambda_a\sin\omega)\partial_a - \frac{\vec{\lambda}^2}{2(k+1)}\sin\omega u\partial_u\right],$$

де

$$w = -\frac{k}{4(k+1)}\vec{\lambda}\vec{x}, \quad \omega = -\frac{k}{4(k+1)}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x},$$

$\vec{\lambda}^{\perp} = (-\lambda_2, \lambda_1)$ — вектор, перпендикулярний до вектора $\vec{\lambda},\ k,\ m,\ p,\ q,\ \lambda_1,\ \lambda_2$ — довільні сталі, $r \in \{-1, 0, 1\},\ s \in \{0, 1\},\ \vec{\lambda}^2 \neq 0.$

Доведення. Для встановлення достатніх умов розширення основної алгебри інваріантності рівняння (3) потрібно використати результати теореми 4, тобто дослідити симетрійні властивості рівняння (3) для кожного набору нелінійностей з табл. 1.

Доведення проведемо на прикладі випадку 6 з табл. 1. Для даного випадку

$$f^0 = u^k, \quad f^a = \lambda_a u^k K_{ab}(\ln u), \quad h = \lambda_3 u^{k+1}, \quad k \neq 0. \tag{35}$$

Підставивши функції (35) у систему визначальних рівнянь (8) – (10), одержимо

$$b = 0, \quad ka = 2\xi_1^1 - \xi_0^0, \quad \xi_0^a = 0, \quad a_0 = 0, \tag{36}$$

$$\lambda_b a(kK_{ab} + \dot{K}_{ab}) - \left[(\xi_1^1 - \xi_0^0)\delta_{ab} + \xi_1^2\varepsilon_{ab}\right]\lambda_c K_{bc} = 2(k+1)a_a, \tag{37}$$

$$\lambda_3(ka + \xi_0^0) = -\lambda_b K_{ab} a_a. \tag{38}$$

Розв'язок системи (36) – (38) залежить від значень сталої p.

Якщо $p \neq 0$, то з рівнянь (36) – (38) одержимо

$$b = 0, \quad a_a = 0, \quad \xi_0^a = 0, \quad \xi_1^1 = 0, \quad \xi_1^2 = pa, \quad ka + \xi_0^0 = 0. \tag{39}$$

У цьому випадку загальним розв'язком системи рівнянь (39), (6), (7) є функції

$$\xi^0 = kc_0x_0 + d_0, \quad \xi^a = pc_0\varepsilon_{ab}x_b + d_a, \quad \eta = -c_0u. \tag{40}$$

Формули (40) задають максимальну алгебру інваріантності рівняння (3): $\langle\partial_0, \partial_a, D_0 - - pJ_{12}\rangle$. Тобто справедливий випадок 6 з табл. 2.

Якщо $p = 0$, то з рівнянь (36) – (38) отримаємо

$$b = \xi_0^a = 0, \tag{41}$$

$$ka = 2\xi_1^1 - \xi_0^0, \tag{42}$$

$$2(k+1)a_a = -\lambda_a\xi_1^1 + \lambda_a^{\perp}\xi_1^2, \tag{43}$$

$$(\vec{\lambda}^2 - 4(k+1)\lambda_3)\xi_1^1 = 0, \tag{44}$$

$$\xi_{00}^0 = 0. \tag{45}$$

Розв'язок системи (41) – (45) залежить від сталої λ_3. Можливі такі нееквівалентні випадки:

1) $4(k+1)\lambda_3 \neq \vec{\lambda}^2$;
2) $4(k+1)\lambda_3 = \vec{\lambda}^2$.
Розглянемо кожен випадок окремо.
1) $4(k+1)\lambda_3 \neq \vec{\lambda}^2$.
Загальним розв'язком системи рівнянь (41) – (45), (6), (7) будуть функції

$$\xi^0 = kc_0x_0 + d_0, \quad \xi^a = d_a, \quad \eta = c_0u. \tag{46}$$

Формули (46) породжують алгебру $\langle \partial_0, \partial_a, D_0 = kx_a\partial_a - u\partial_u \rangle$, що співпадає з випадком 7 із табл. 2.

2) $4(k+1)\lambda_3 = \vec{\lambda}^2$ (з точністю до перетворень еквівалентності можна вважати $\lambda_3 = r$).
З (42) – (44) маємо

$$\frac{4(k+1)}{k}\lambda_a\xi^1_{1a} + \vec{\lambda}^2\xi^1_1 = 0. \tag{47}$$

Загальним розв'язком рівняння (47) буде функція

$$\xi^1_1 = e^w\psi(\omega), \tag{48}$$

де $\psi = \psi(\omega)$ — довільна гладка функція, $\omega = -\dfrac{k}{4(k+1)}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x},\ w = -\dfrac{k}{4(k+1)}\vec{\lambda}\vec{x}$. Врахувавши (7), із (48) одержуємо

$$\xi^2_1 = e^w\dot{\psi}. \tag{49}$$

Із сумісності системи (48), (49) випливає

$$\ddot{\psi} + \psi = 0. \tag{50}$$

Загальним розв'язком рівняння (50) буде

$$\psi = c_1\cos\omega + c_2\sin\omega,$$

де c_1, c_2 — довільні сталі. Тоді

$$\begin{aligned} \xi^1_1 &= e^w(c_1\cos\omega + c_2\sin\omega), \\ \xi^1_2 &= e^w(c_1\sin\omega - c_2\cos\omega). \end{aligned} \tag{51}$$

Використавши формули (7), отримаємо також

$$\begin{aligned} \xi^2_1 &= e^w(-c_1\sin\omega + c_2\cos\omega), \\ \xi^2_2 &= e^w(c_1\cos\omega + c_2\sin\omega). \end{aligned} \tag{52}$$

Загальним розв'язком системи рівнянь (51), (52) є функції

$$\xi^1 = -\frac{4(k+1)}{k\vec{\lambda}^2}e^w(\vec{\lambda}\vec{c}\cos\omega + \overrightarrow{\lambda^{\perp}}\vec{c}\sin\omega) + d_1, \tag{53}$$

$$\xi^2 = -\frac{4(k+1)}{k\vec{\lambda}^2}e^w(\overrightarrow{\lambda^{\perp}}\vec{c}\cos\omega - \vec{\lambda}\vec{c}\sin\omega) + d_2, \tag{54}$$

де $d_1,\ d_2$ — сталі інтегрування.

Загальним розв'язком рівняння (45) буде функція

$$\xi^0 = kc_0x_0 + d_0. \tag{55}$$

Із (42) з урахуванням (55) отримаємо

$$\eta = \left[\frac{2}{k}e^{w}(c_1cos\omega + c_2sin\omega) - c_0)\right]u. \tag{56}$$

Формули (50), (53), (55), (56) задають таку максимальну алгебру рівняння (3):

$$\langle \partial_0,\ \partial_a,\ Q_1,\ Q_2,\ D_0 = kx_0\partial_0 - u\partial_u \rangle\,,$$

тобто маємо випадок 8 із табл. 2.

Для інших наборів нелінійностей, наведених у теоремі 4, доведення проводиться аналогічно.

Теорему 5 доведено.

6. Точні розв'язки. Поставимо задачу побудувати точні розв'язки $(1+2)$-вимірного рівняння реакції – конвекції – дифузії (3).

Розглянемо для прикладу рівняння з п. 8 табл. 2:

$$u_0 = \partial_a(u^ku_a) + u^k\lambda_au_a + \frac{\vec{\lambda}^2}{4(k+1)}u^{k+1}, \quad k \neq -1; 0. \tag{57}$$

Серед рівнянь із ненульовим конвективним доданком це рівняння має найширший клас симетрії. Його максимальна алгебра інваріантності задається операторами

$$\langle \partial_0,\ \partial_1,\ \partial_2,\ D_0,\ Q_1,\ Q_2\rangle\,. \tag{58}$$

Використаємо симетрійні властивості рівняння (57) для побудови інваріантних анзаців, редукції та знаходження його точних розв'язків.

Використавши заміну

$$\frac{k^2\overrightarrow{\lambda^2}}{16(k+1)^2}x_0 \longrightarrow x_0, \quad \frac{k}{4(k+1)}\vec{\lambda}\vec{x} \longrightarrow x_1, \quad -\frac{k}{4(k+1)}\overrightarrow{\lambda^{\perp}}\vec{x} \longrightarrow x_2, \quad u \longrightarrow u, \tag{59}$$

перейдемо до рівняння

$$u_0 = \partial_a(u^ku_a) + 4\frac{k+1}{k}u^ku_1 + 4\frac{k+1}{k^2}u^{k+1}. \tag{60}$$

Перші чотири оператори алгебри (58) у нових змінних матимуть той же вигляд, зміняться лише Q_1 та Q_2. Вони набудуть вигляду

$$Q_1 = e^{-x_1}\left(\cos x_2\partial_1 - \sin x_2\partial_2 - \frac{2}{k}\cos x_2u\partial_u\right),$$

$$Q_2 = e^{-x_1}\left(\sin x_2\partial_1 + \cos x_2\partial_2 - \frac{2}{k}\sin x_2u\partial_u\right).$$

Проведемо редукцію рівняння (60) до рівняння з меншою кількістю змінних, використовуючи найзагальніший вигляд оператора інваріантності

$$X = d_0\partial_0 + d_a\partial_a + c_0 D_0 + c_1 Q_1 + c_2 Q_2. \tag{61}$$

Один з анзаців (див., наприклад, [48]), отриманий за допомогою оператора (61) при умові $c_0 = d_0 = d_1 = 0$, має вигляд

$$u = e^{-\frac{2}{k}x_1}\varphi(x_0, \omega), \quad \omega = \dot{z}(x_2)e^{x_1} + me^{2x_1}, \tag{62}$$

де $z = z(x_2) = c_1 \cos x_2 + c_2 \sin x_2$. Даний анзац редукує рівняння (60) до диференціального рівняння

$$\varphi_0 = (4m\omega + \vec{c}^{\,2})\partial_\omega(\varphi^k\varphi_\omega) + 4m\varphi^k\varphi_\omega.$$

Припустивши, що $m = 0$, прийдемо до рівняння

$$\varphi_0 = \vec{c}^{\,2}\partial_\omega(\varphi^k\varphi_\omega). \tag{63}$$

Використавши заміну

$$x_0 \to \frac{1}{\vec{c}^{\,2}}x_0, \quad \omega \to \omega, \quad \varphi \to \varphi \tag{64}$$

одержимо рівняння

$$\varphi_0 = \partial_\omega(\varphi^k\varphi_\omega). \tag{65}$$

Теорема 6 [2]**.** *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (65) є алгебра*
1)

$$\langle \partial_0,\ \partial_\omega,\ D = 2x_0\partial_0 + \omega\partial_\omega,\ D_0 = kx_0\partial_0 - \varphi\partial_\varphi \rangle,$$

якщо $k \neq -\dfrac{4}{3}$*;*
2)

$$\langle \partial_0,\ \partial_\omega,\ D_0 = 4x_0\partial_0 + 3\varphi\partial_\varphi,\ D_1 = 2\omega\partial_\omega - 3\varphi\partial_\varphi,\ K = \omega^2\partial_\omega - 3\omega\varphi\partial_\varphi \rangle, \tag{66}$$

якщо $k = -\dfrac{4}{3}$.

Використаємо ліївську симетрію рівняння (65) для побудови інваріантних анзаців, редукції та знаходження його точних розв'язків (див. [47]).

Наведемо вигляд нееквівалентних анзаців, що одержуються у випадку $k \neq -\dfrac{4}{3}$:

$$\varphi = \psi(y), \quad y = \omega + px_0; \tag{67}$$

$$\varphi = x_0^{-\frac{1}{k}}\psi(y), \quad y = \omega + p\ln x_0; \tag{68}$$

$$\varphi = e^{-\frac{2p}{k}x_0}\psi(y), \quad y = e^{px_0}\omega; \tag{69}$$

$$\varphi = x_0^{-\frac{1+2p}{k}}\psi(y), \quad y = x_0^p\omega, \tag{70}$$

де p — довільна стала $(p \neq 0)$, яка виражається через сталі $c_0,\ c_1,\ d_0,\ d_1$.

Для знаходження невідомих функцій ψ необхідно одержані вище інваріантні анзаци підставити у рівняння (63). В результаті отримаємо відповідно такі редуковані рівняння:

$$\partial_y(\psi^k\psi_y) - p\psi_y = 0, \tag{71}$$

$$\partial_y(\psi^k\psi_y) - p\psi_y - \frac{1}{k}\psi = 0,$$

$$\partial_y(\psi^k\psi_y) - py\psi_y + \frac{2m}{k}\psi = 0,$$

$$\partial_y(\psi^k\psi_y) - py\psi_y + \frac{2m+1}{k}\psi = 0.$$

Частинними розв'язками редукованого рівняння (71) є функції

$$\psi = (pky+c)^{\frac{1}{k}}, \quad k \neq 0; \tag{72}$$

$$\psi = -\tanh^2\left(\frac{p}{2}y + c\right), \quad k = -\frac{1}{2}; \tag{73}$$

$$\psi = \tan^2\left(\frac{p}{2}y + c\right), \quad k = -\frac{1}{2}; \tag{74}$$

$$\tanh^{-1}\left(\psi^{\frac{1}{4}}\right) + \tan^{-1}\left(\psi^{\frac{1}{4}}\right) = -\frac{p}{2}y + c, \quad k = -\frac{3}{4}, \tag{75}$$

де c — довільна стала, функції $\tanh^{-1}\left(\psi^{\frac{1}{4}}\right)$ і $\tan^{-1}\left(\psi^{\frac{1}{4}}\right)$ — обернені до $\tanh\left(\psi^{\frac{1}{4}}\right)$ і $\tan\left(\psi^{\frac{1}{4}}\right)$ відповідно.

Використовуючи анзац (67) та розв'язки (72) – (75), знаходимо розв'язки рівняння (57):

$$u = e^{-\frac{\vec{\lambda}\vec{x}}{2(k+1)}}\left[pk\dot{z}\left(\frac{k}{4(k+1)}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)e^{\frac{k}{4(k+1)}\vec{\lambda}\vec{x}} + \frac{p^2\vec{c}^{\,2}\vec{\lambda}^2k^3}{16(k+1)^2}x_0 + c\right]^{\frac{1}{k}}, \quad k \neq 0,$$

$$u = -e^{-\vec{\lambda}\vec{x}}\tanh^2\left[\frac{p}{2}\dot{z}\left(-\frac{1}{4}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)e^{-\frac{1}{4}\vec{\lambda}\vec{x}} + \frac{p^2\vec{c}^{\,2}\vec{\lambda}^2}{8}x_0 + c\right], \quad k = -\frac{1}{2},$$

$$u = e^{-\vec{\lambda}\vec{x}}\tan^2\left[\frac{p}{2}\dot{z}\left(-\frac{1}{4}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)e^{-\frac{1}{4}\vec{\lambda}\vec{x}} + \frac{p^2\vec{c}^{\,2}\vec{\lambda}^2}{8}x_0 + c\right], \quad k = -\frac{1}{2},$$

$$\tanh^{-1}\left(e^{\frac{1}{2}\vec{\lambda}\vec{x}}u^{\frac{1}{4}}\right) + \tan^{-1}\left(e^{\frac{1}{2}\vec{\lambda}\vec{x}}u^{\frac{1}{4}}\right) = -\frac{p}{2}\dot{z}\left(-\frac{3}{4}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)e^{-\frac{3}{4}\vec{\lambda}\vec{x}} - \frac{p^2\vec{c}^{\,2}\vec{\lambda}^2}{2}x_0 + c, \quad k = -\frac{3}{4}.$$

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (65) при $k = -\frac{4}{3}$ є алгебра (66). Не вдаючись у деталі, наведемо вигляд нееквівалентних анзаців, відмінних від (67) – (70), які одержуються в результаті

$$\varphi = |\omega^2 + r|^{-\frac{3}{2}}\psi(y), \quad r \in \{-1, 0, 1\},$$
$$y = \begin{cases} \tanh^{-1}\omega + px_0, & r = -1, \\ \dfrac{1}{\omega} + px_0, & r = 0, \\ \tan^{-1}\omega + px_0, & r = 1; \end{cases} \tag{76}$$

$$\varphi = x_0^{\frac{3}{4}}|\omega^2 + r|^{-\frac{3}{2}}\psi(y), \quad r \in \{-1, 0, 1\},$$
$$y = \begin{cases} \tanh^{-1}\omega + p\ln x_0, & r = -1, \\ \dfrac{1}{\omega} + p\ln x_0, & r = 0, \\ \tan^{-1}\omega + p\ln x_0, & r = 1, \end{cases} \tag{77}$$

де p — довільна стала ($p \neq 0$), яка виражається через сталі $c_0,\ c_1,\ c_2,\ d_0,\ d_1$.

Для знаходження невідомих функцій ψ одержані вище анзаци необхідно підставити у рівняння (65). У результаті отримаємо відповідно такі редуковані рівняння:

$$\partial_y(\psi^{-\frac{4}{3}}\psi_y) = p\psi_y + 3r\psi^{-\frac{1}{3}}, \tag{78}$$

$$\partial_y\big(\psi^{-\frac{4}{3}}\psi_y\big) = p\psi_y + \left(\frac{3}{4}\psi^{\frac{4}{3}} + 3r\right)\psi^{-\frac{1}{3}}. \tag{79}$$

Загальний розв'язок рівняння (78) при $r = 0$ має вигляд

$$-3c_1^{-1}\psi^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\ln\frac{\psi^{-\frac{2}{3}} - c_1\psi^{-\frac{1}{3}} + c_1^2}{(\psi^{-\frac{1}{3}} + c_1)^2} - \sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2}{c_1\sqrt{3}}\left(\psi^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}c_1\right) = c_1^{-4}p(y + c_2), \quad c_1 \neq 0,$$

та

$$\psi = \left(-\frac{4}{3}py + c\right)^{-\frac{3}{4}}, \quad c_1 = 0.$$

Один із розв'язків рівняння (79) при $r = -1$ має вигляд $\psi = 4^{\frac{3}{4}}$.

Використовуючи формули (59), (62), (64), (76), (77), знаходимо розв'язки рівняння (57):

$$\begin{gathered} -3c_1^{-1}\Phi + \frac{1}{2}\ln\frac{\Phi^2 - c_1\Phi + c_1^2}{(\Phi + c_1)^2} - \sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2}{c_1\sqrt{3}}\left(\Phi - \frac{1}{2}c_1\right) = \\ = c_1^{-4}p\left(\dot{z}^{-1}(\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x})e^{-\vec{\lambda}\vec{x}} + \frac{9}{16}p\vec{c}^{\,2}\vec{\lambda}^2x_0 + c_2\right), \\ \Phi = \dot{z}^{-1}\big(\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\big)e^{-\frac{1}{2}\vec{\lambda}\vec{x}}u^{-\frac{1}{3}}, \quad c_1 \neq 0, \\ u = e^{-\frac{3}{2}\vec{\lambda}\vec{x}}\dot{z}^{-3}(\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x})\left[-\frac{4}{3}pe^{-\vec{\lambda}\vec{x}}\dot{z}^{-1}(\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}) - \frac{3}{4}p^2\vec{c}^{\,2}\vec{\lambda}^2x_0 + c\right]^{-\frac{3}{4}}, \\ u = \left(\frac{9}{4}\vec{\lambda}^2\vec{c}^{\,2}x_0\right)^{\frac{3}{4}}\left(\dot{z}^2(\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x})e^{\vec{\lambda}\vec{x}} - e^{-\vec{\lambda}\vec{x}}\right)^{-\frac{3}{2}}. \end{gathered} \tag{80}$$

Проведемо лінеаризацію рівняння (65) за умови $k = -2$. Застосуємо до даного рівняння сукупність двох перетворень (див., наприклад, [47, 49]):

$$x_0 = x_0, \quad \omega = \omega, \quad \varphi = v_\omega,$$

де $v = v(x_0,\ \omega)$ — нова невідома функція,

$$x_0 = t, \quad \omega = w, \quad v = x,$$

де $t,\ x$ — нові незалежні змінні, $w = w(t,x)$ — нова залежна змінна.

У результаті одержимо рівняння

$$w_t = w_{xx}.$$

Це — лінійне рівняння теплопровідності. Відомо безліч його точних розв'язків. Для прикладу розглянемо декілька з них:

$$w = t + \frac{1}{2}x^2, \tag{81}$$

$$w = tx + \frac{1}{6}x^3, \tag{82}$$

$$w = c_3 e^{m_1^2 t + m_1 x} + c_4 e^{m_2^2 t + m_2 x}, \tag{83}$$

$$w = e^{(p^2 - m^2)t + px}\big[c_3 \cos(2mpt + mx) + c_4 \sin(2mpt + mx)\big], \tag{84}$$

де $m_1,\ m_2,\ m,\ p,\ c_3,\ c_4$ — довільні сталі.

Використовуючи розв'язки (81)–(84), знаходимо розв'язки рівняння (57), записані в явному та параметричному вигляді:

$$u = \left[2\dot{z}\left(-\frac{1}{2}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)e^{\frac{1}{2}\vec{\lambda}\vec{x}} - \frac{1}{2}\vec{c}^{\,2}\vec{\lambda}^2 x_0 e^{\vec{\lambda}\vec{x}}\right]^{-\frac{1}{2}};$$

$$u = \frac{\frac{1}{2}\vec{c}^{\,2}\vec{\lambda}^2 x_0 \tau + \frac{1}{3}\tau^3}{\dot{z}\left(-\frac{1}{2}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)\left(\tau^2 + \frac{1}{2}\vec{c}^{\,2}\vec{\lambda}^2 x_0\right)},$$

$$\dot{z}\left(-\frac{1}{2}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)e^{-\frac{1}{2}\vec{\lambda}\vec{x}} = \frac{1}{4}\vec{c}^{\,2}\vec{\lambda}^2 x_0 \tau + \frac{1}{6}\tau^3;$$

$$u = \dot{z}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right) = \frac{\Psi(x_0,\tau)}{\Psi_\tau(x_0,\tau)},$$

$$\dot{z}\left(-\frac{1}{2}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)e^{-\frac{1}{2}\vec{\lambda}\vec{x}} = \Psi(x_0,\tau);$$

$$u = \left[\dot{z}\left(-\frac{1}{2}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)\left(p + \frac{\Upsilon(x_0,\tau)}{\Upsilon_\tau(x_0,\tau)}\right)\right]^{-1},$$

$$\dot{z}\left(-\frac{1}{2}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)e^{-\frac{1}{2}\vec{\lambda}\vec{x}} = e^{\frac{1}{4}(p^2-m^2)\vec{c}^{\,2}\vec{\lambda}^2 x_0 + p\tau}\,\Upsilon(x_0,\tau),$$

де

$$\Psi(x_0,\tau) = c_3 e^{\frac{1}{4}m_1^2\vec{c}^{\,2}\vec{\lambda}^2 x_0 + m_1\tau} + c_4 e^{\frac{1}{4}m_2^2\vec{c}^{\,2}\vec{\lambda}^2 x_0 + m_2\tau},$$

$$\Upsilon(x_0,\tau)=c_3\cos\left(\frac{1}{2}mp\vec{c}^{\,2}\vec{\lambda}^2x_0+m\tau\right)+c_4\sin\left(\frac{1}{2}mp\vec{c}^{\,2}\vec{\lambda}^2x_0+m\tau\right),$$

τ — довільний параметр.

Один із анзаців, за умови $c_0=d_0=d_2=0$ отриманий за допомогою оператора (61), має вигляд

$$u=\dot{z}^{\frac{2}{k}}(x_2)\varphi(x_0,\omega),\quad \omega=\frac{e^{x_1}+mz(x_2)}{\dot{z}(x_2)},\qquad \ddot{z}+z=0. \tag{85}$$

Він редукує рівняння (60) до диференціального рівняння

$$(m^2+\omega^2)\partial_\omega(\varphi^k\varphi_\omega)+2\frac{k+2}{k^2}\left[-k\omega\varphi^k\varphi_\omega+\varphi^{k+1}\right]=\frac{1}{\vec{c}^{\,2}}\varphi_0.$$

Припускаючи, що $k=-2$, приходимо до рівняння

$$(\omega^2+m^2)(\varphi^{-2}\varphi_\omega)_\omega=\frac{1}{\vec{c}^{\,2}}\varphi_0. \tag{86}$$

Розв'язком редукованого рівняння (86) (див. [50]) є

$$I\left(\varphi^{-1}\left(\frac{2c_3\vec{c}^{\,2}x_0+c_4}{\omega^2+m^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{m}\tan^{-1}\frac{\omega}{m}+c_5, \tag{87}$$

де

$$I(v)=\int\limits_0^v\frac{d\tau}{\sqrt{c_5-m^2\gamma^2-2c_3\ln\gamma}},$$

$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5$ — довільні сталі.

Використовуючи анзац (85) та розв'язок (87), знаходимо розв'язок рівняння (57):

$$I\left(u^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}c_3\vec{c}^{\,2}\vec{\lambda}^2x_0+c_4}{e^{-\vec{\lambda}\vec{x}}+2mz\left(-\frac{1}{2}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)e^{-\frac{1}{2}\vec{\lambda}\vec{x}}+m^2\vec{c}^{\,2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{m}\tan^{-1}\frac{e^{-\frac{1}{2}\vec{\lambda}\vec{x}}+mz\left(-\frac{1}{2}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)}{m\dot{z}\left(-\frac{1}{2}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)}+c_5.$$

Отримані розв'язки рівняння (3) можна вивчити з точки зору можливості їхнього фізичного застосування. Розглянемо їх на прикладі розв'язку (80). Неважко бачити, що при $x_0\to\infty$ $u\to 0,$ $x_1\to\infty$ $u\to 0,$ а при $x_2\to\infty$ u обмежене за виключенням точок $x_2=\pi n,$ $n\in Z.$

Це дає підстави стверджувати, що даний розв'язок може мати фізичне застосування. На рис. 1 – 3 наведено графіки даного розв'язку при значеннях змінної x_0: $x_0=0{,}1,$ $x_0=0{,}3,$ $x_0=0{,}5$ та обмеженнях $x_1\in[1,2],$ $x_2\in[1,2].$

Отримані розв'язки є багатопараметричними сім'ями розв'язків. Це дає змогу за допомогою вибору параметрів задовольняти конкретні початкові та крайові умови.

Таким чином, ми прокласифікували симетрійні властивості рівняння (3) залежно від значень нелінійностей, які входять у це рівняння, а також використали його симетрійні властивості для побудови інваріантних анзаців, редукції та знаходження його точних розв'язків.

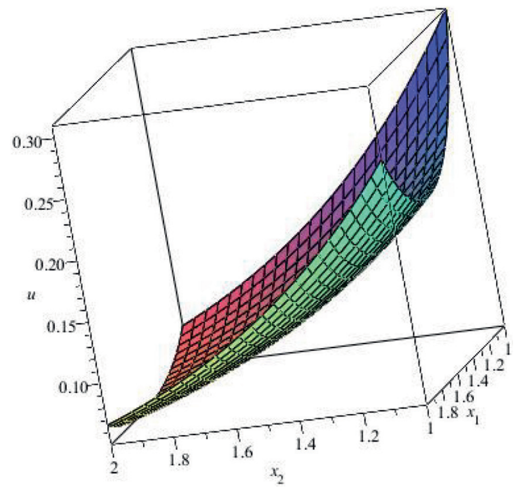

Рис. 1. Графік функції $u(x_0 = 0{,}1)$.

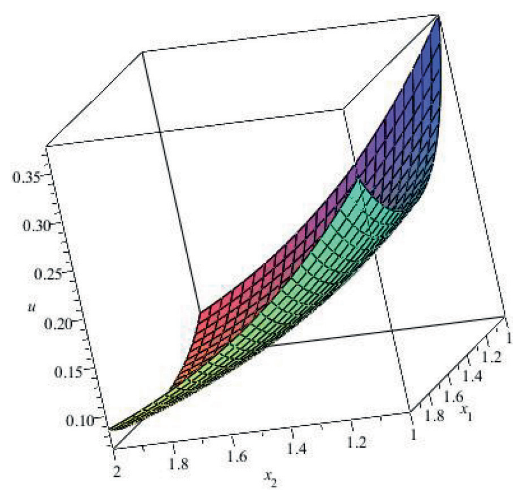

Рис. 2. Графік функції $u(x_0 = 0{,}3)$.

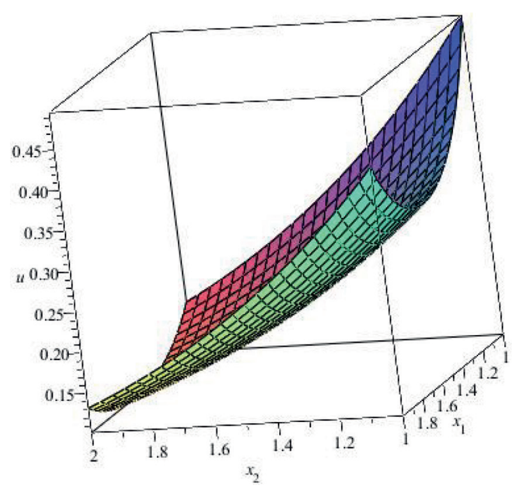

Рис. 3. Графік функції $u(x_0 = 0{,}5)$.

Література

1. *Lie S.* Über die integration durch bestimmte integrale von einer Klasse linear partieller differential gleichung // Arch. Math. – 1881. – **6**, № 3. – P. 328 – 368.
2. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. – 1959. – **125**. – С. 492 – 495.
3. *Катков В. Л.* Групповая классификация и решения уравнения Хопфа // Журн. прикл. механики и теор. физики. – 1965. – **6**. – С. 105 – 106.
4. *Тычинин В. А.* Симметрия и точные решения уравнения $u_t = h(u) u_{xx}$ // Сб. науч. тр. Ин-та математики АН УССР: Симметрий. анализ и решения уравнений мат. физики. – Киев, 1988. – № 8. – С. 72 – 77.
5. *Дородницын В. А., Князева И. В., Свирщевский С. Р.* Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в дву- и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения. – 1983. – **19**. – С. 1215 – 1223.
6. *Дородницын В. А.* Об инвариантных решениях уравнений нелинейной теплопроводности с источником // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1982. – **22**, № 6. – С. 1393 – 1400.
7. *Oron A., Rosenau P.* Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. – 1986. – **118**, № 4. – P. 172 – 176.
8. *Yung C. M., Verburg K., Baveye P.* Group classification and symmetry reductions of the nonlinear diffusion – convection equation $u_t = (D(u) u_x)_x - K'(u) u_x$ // Int. J. Nonlinear Mech. – 1994. – **29**, № 3. – P. 273 – 278.
9. *Edwards M. P.* Classical symmetry reductions of nonlinear diffusion-convection equations // Phys. Lett. A. – 1994. – **190**. – P. 149 – 154.
10. *Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.* Групповая классификация уравнений нелинейной фильтрации // Докл. АН СССР. – 1987. – **293**. – С. 1033 – 1035.
11. *Popovych R. O., Ivanova N. M.* New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations // J. Phys. A.: Math. Gen. – 2004. – **37**. – P. 7547 – 7565.
12. *Абраменко А. А., Лагно В. И., Самойленко А. М.* Групповая классификация нелинейных эволюционных уравнений. II. Инвариантность относительно разрешимых групп локальных преобразований // Дифференц. уравнения. – 2002. – **38**, № 4. – С. 482 – 489.
13. *Лагно В. И., Самойленко А. М.* Групповая классификация нелинейных уравнений эволюционных уравнений. I. Инвариантность относительно полупростых групп локальных преобразований // Дифференц. уравнения. – 2002. – **38**, № 3. – С. 365 – 372.
14. *Лагно В. І., Спічак С. В., Стогній В. І.* Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу // Праці Ін-ту математики НАН України: Математика та її застосування. – К., 2002. – **45**. – 359 с.
15. *Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R.* The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // Acta Appl. Math. – 2001. – **69**, № 1. – P. 43 – 94.
16. *Zhdanov R. Z., Lahno V. I.* Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – **32**. – P. 7405 – 7418.
17. *Spichak S. V., Stognii V. I.* Symmetry classification and exact solutions of the one-dimensional Fokker – Planck equation with arbitrary coefficients of drift and diffusion // J. Phys. A. – 1999. – **32**, № 47. – P. 8341 – 8353.
18. *Спічак С. В., Стогній В. І.* Симетрійна класифікація одновимірного рівняння Фоккера – Планка з довільними коефіцієнтами знесення та дифузії // Нелін. коливання.– 1999. – **2**, № 3. – С. 401 – 413.
19. *Сєров М. І., Черніга Р. М.* Симетрії Лі та точні розв'язки нелінійних рівнянь теплопровідності з конвективним членом // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 9. – С. 1262 – 1270.
20. *Cherniha R., Serov M.* Symmetries ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection terms // European J. Appl. Math. – 1998. – **9**. – P. 527 – 542.
21. *Cherniha R., Serov M., Rassokha I.* Lie symmetries and form-preserving transformations of reaction-diffusion-convection equations // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – **342**. – P. 1363 – 1379.
22. *Cherniha R., Serov M., Pliukhin O.* Nonlinear reaction – diffusion – convection equations: Lie and conditional symmetry, exact solutions and their applications // CRC Monographs and Research Notes in Mathematics. – Boca Raton; Florida: CRC Press, 2018. – 238 p.
23. *Баранник А. Ф., Юрик І. І.* Про точні розв'язки нелінійних рівнянь дифузії // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 8. – С. 1011 – 1019.
24. *Юрик І. І., Баранник Т. А.* Хвильові розв'язки нелінійного рівняння дифузії // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 2. – С. 331 – 336.

25. *Иваницкий Г. Р., Медвинский А. Б, Цыганов М. А.* От беспорядка к упорядоченности — на примере движения микроорганизмов // Успехи физ. наук. – 1991. – **161**, № 4. – С. 13 – 71.
26. *Коздоба Л. А.* Методы решения нелинейных задач теплопроводности. – М.: Наука, 1975. – 228 с.
27. *Ames W. F.* Nonlinear partial differential equations in engineering. Vol. I. – New York; London: Acad. Press, 1965. – 511 p.
28. *Ames W. F.* Nonlinear partial differential equations in engineering. Vol. II. Mathematics in science and engineering. – New York; London: Acad. Press, 1972. – 322 p.
29. *Вільгельмссон Г.* Коливання та встановлення рівноваги за умов взаємозв'язку температури та густини у термоядерних плазмах // Укр. мат. журн. – 1993. – **38**, № 1. – С. 44 – 53.
30. *Wilhelmsson H.* Plasma temperature and density dynamics including particle and heat pinch effects // Phys. Scripta. – 1992. – **46**. – P. 177 – 181.
31. *Fife P.* Mathematical aspects of reacting and diffusing systems // Lect. Notes Biomath. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1975. – **28**. – 185 p.
32. *Murray J. D.* Nonlinear partial differential equations models in biology. – Oxford: Clarendon Press, 1977. – 370 p.
33. *Aris R.* The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts: the theory of the steady state. – Oxford: Clarendon Press, 1975. – 460 p.
34. *Aris R.* The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts: Vol. 2: Questions of uniqueness stability, and transient behavior // Oxford Stud. Phys. – Oxford: Clarendon Press, 1975. – 232 p.
35. *Britton N. F.* Essential mathematical biology. – London: Springer, 2003. – 335 p.
36. *Edelstein-Keshet L.* Mathematical models in biology // Classics Appl. Math. – Philadelphia: Soc. Ind. Appl. Math., 2005. – **46**. – 586 p.
37. *Kuang Y., Nagy J. D., Eikenberry S. E.* Introduction to mathematical oncology // Chapman Hall/CRC Mathematical and Computational Biology Series. – Boca Raton, Florida: CRC Press, 2016. – 480 p.
38. *Murray J. D.* Mathematical biology: I. An introduction, third edition // Interdisciplinary Applied Mathematics. – New York: Springer, 2002. – Vol. 17. – 551 p.
39. *Murray J. D.* Mathematical biology: II, third edition // Interdisciplinary Applied Mathematics. Spatial models and biomedical applications. – New York: Springer, 2003. – Vol. 18. – 881 p.
40. *Okubo A., Levin S. A.* Diffusion and ecological problems: modern perspectives // Interdisciplinary Applied Mathematics. – New York: Springer, 2001. – Vol. 14. – 468 p.
41. *Shonkwiler R., Herod J.* Mathematical biology: an introduction with Maple and MATLAB. Undergraduate text in mathematics. – New York: Springer, 2009. – 551 p.
42. *Waniewski J.* Theoretical foundations for modeling of membrane transport in medicine and biomedical engineering. – Warsaw: Inst. Comput. Sci. PAS, 2015.
43. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
44. *Олвер П.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 581 с.
45. *Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.* Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. – 1989. – **34**. – С. 3 – 83; ***English translation:*** J. Sov. Math. – 1991. – **55**. – P. 1401 – 1450.
46. *Сєров М. І., Рассоха І. В.* Симетрійні властивості рівнянь реакції – конвекції – дифузії. – Полтава: Полтав. нац. техн. ун-т ім. Ю. Кондратюка, 2013. – 168 с.
47. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики. – К.: Наук. думка, 1989. – 339 с.
48. *Фущич В. И., Серов Н. И., Амеров Т. К.* О нелокальных анзацах для одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности. – К.: Наук. думка, 1989. – 339 с.
49. *King J. R.* Some non-local transformations between nonlinear diffusion equation // J. Math. Phis. – 1990. – **23**. – P. 5441 – 5464.
50. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 704 с.

Одержано 18.04.18,
після доопрацювання — 26.02.19