УДК 517.9

МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ІМПУЛЬСНИМИ СИСТЕМАМИ

Т. В. Ковальчук

Київ. нац. торгов.-екон. ун-т
вул. Кіото, 19, Київ, 02156, Україна
e-mail: 0501@ukr.net

В. В. Могильова

Нац. техн. ун-т України "КПІ ім. І. Сікорського"
пр. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: mogylova.viktoria@gmail.com

Т. В. Шовкопляс

Київ. нац. ун-т ім. Т. Г. Шевченка
вул. Володимирська, 64/13, Київ, 01033, Україна
e-mail: from_tatyana@ukr.net

We use the averaging method for the investigation of problems of optimal control over impulsive systems. The procedure of averaging allows us to replace the original problem by the problem of optimal control over a system of ordinary differential equations. We prove that the optimal control over the averaged problem is almost optimal for the exact problem. Problems with finite and infinite horizons are investigated.

Розглядаються задачі оптимального керування імпульсними системами. При дослідженні цих задач застосовано метод усереднення, що дає можливість початкову задачу замінити задачею оптимального керування системою звичайних диференціальних рівнянь. Доведено, що оптимальне керування усередненої задачі є майже оптимальним для точної. Розглянуто задачі зі скінченним та нескінченним горизонтами.

Вступ. У даній роботі для системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією у нефіксовані моменти часу

$$\begin{gathered} \dot{x} = \varepsilon X(t,x,u), \quad t \neq t_i(x), \\ \triangle x|_{t=t_i(x)} = \varepsilon I_i(x, v_i), \\ x(0) = x_0, \quad t_i(x) < t_{i+1}(x), \end{gathered} \tag{1}$$

розглянуто дві задачі оптимального керування:

1) на скінченному проміжку з критерієм якості

$$J_\varepsilon^1(u,v) = \varepsilon \int\limits_0^{\frac{T}{\varepsilon}} \Phi(t, x(t), u(t))dt + \varepsilon \sum_{0<t_i(x)<\frac{T}{\varepsilon}} \Psi_i(x(t_i), v_i) \to \inf, \tag{2}$$

2) на нескінченному проміжку з критерієм якості

$$J^2_\varepsilon(u,v)=\varepsilon\int\limits_0^\infty e^{-\gamma t}L(t,x(t))\,dt\to\inf. \tag{3}$$

Тут $T>0,\ \varepsilon>0,\ \gamma>0$ фіксовані; $t\geq 0,\ x\in D$ — область у просторі $R^d,\ u\in U\subset R^m$, $v_i\in V\subset R^r$, де U та V — підмножини в просторах R^m та R^r відповідно. Через $|\cdot|$ будемо позначати евклідову норму вектора, а через $\|\cdot\|$ — норму матриці, узгоджену з нормою вектора.

Керування $u=u(t)=(u_1(t),u_2(t),\ldots,u_m(t))$ та $v(t)=v_i(t)=(v_{i1}(t),v_{i2}(t),\ldots,v_{ir}(t))$ будемо вважати припустимими для задач (1) – (3), якщо:

а1) функція $u(t)$ є вимірною та локально інтегровною при $t\geq 0$;

а2) $u(t)\in U,\ t\geq 0$;

а3) для кожного $u(t)$ існує така стала $u_0\in U$, що $u(t)\to u_0$ при $t\to\infty$ рівномірно для всіх керувань, тобто для довільного $\delta>0$ існує стала $T_0>0$, незалежна від $u(t),\ u_0$ і така, що для всіх $t\geq T_0$ виконується нерівність $|u(t)-u_0|<\delta$;

а4) для кожної послідовності векторів v_i існує $v_0\in V$ таке, що $v_i\to v_0,\ i\to\infty$, рівномірно для всіх керувань, тобто для довільного $\delta>0$ існує стала N_0, незалежна від v_i, v_0 і така, що для всіх $i\geq N_0$ виконується нерівність $|v_i-v_0|<\delta$;

а5) для функціонала (3) виконується умова $|J_\varepsilon(u,v)|<\infty$.

Зазначимо, що умови а3) та а4), очевидно, виконані, якщо існують незалежні від $u(t)$ та v_i відповідно функція $\varphi(t)\to 0,\ t\to\infty$, та послідовність $\{a_i\}$: $a_i\to 0,\ i\to\infty$, такі, що $|u(t)-u_0|\leq\varphi(t)$, а $|v_i-v_0|<a_i$. Умова на керування а3) вперше з'явилася в роботі М. М. Моісеєва [1] при застосуванні методу усереднення до практичних задач. У цій монографії такі керування названі асимптотично сталими.

Множину припустимих керувань задач (1), (2) та (1) – (3) позначимо F_1 та F_2 відповідно. При цьому $J^1_\varepsilon=\inf_{(u,v)\in F_1}J^1_\varepsilon(u,v)$ та $J^2_\varepsilon=\inf_{(u,v)\in F_2}J^2_\varepsilon(u,v)$.

Позначимо через $x_\varepsilon(t,u,v)$ розв'язок задачі Коші, що відповідає припустимому керуванню (u,v). Трійка $(x^*_\varepsilon(t,u,v),u^*_\varepsilon,v^*_\varepsilon)$ є оптимальною для задач (1) – (3), якщо $\left(u^*_\varepsilon,v^*_\varepsilon\right)$ — припустима пара і $J^1_\varepsilon\left(u^*_\varepsilon,v^*_\varepsilon\right)=J^1_\varepsilon$ для функціонала (2) або $J^2_\varepsilon\left(u^*_\varepsilon,v^*_\varepsilon\right)=J^2_\varepsilon$ для функціонала (3).

Нехай виконано умови усереднення:

а6) рівномірно по $t\geq 0,\ x\in D,\ u\in U,\ v\in V$ існують границі

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int\limits_t^{s+t}X(\tau,x,u)d\tau=X_0(x,u), \tag{4}$$

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\sum_{t<t_i(x)<s+t}I_i(x,v)=I_0(x,v), \tag{5}$$

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int\limits_t^{s+t}\Phi(\tau,x,u)d\tau=\Phi_0(x,u),$$

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\sum_{t<t_i(x)<s+t}\Psi_i(x,v)=\Psi_0(x,v).$$

Відносно моментів імпульсної дії будемо вважати, що існує стала $C > 0$ така, що для $t \geq 0,\ x \in D$

$$\sum_{t<t_i(x)<s+t} I_i \leq Cs. \tag{6}$$

Задачам оптимального керування (1) – (3) поставимо у відповідність усереднені задачі

$$\dot{y} = \varepsilon\big[X_0(y,u_0) + I_0(y,v_0)\big], \quad y(0) = x_0, \tag{7}$$

$$\bar{J}^1_\varepsilon(u_0,v_0) = \varepsilon \int\limits_0^{T/\varepsilon} \big[\Phi_0(y(t),u_0) + \Psi_0(y(t),v_0)\big]dt \to \inf, \tag{8}$$

$$\bar{J}^2_\varepsilon(u_0,v_0) = \varepsilon \int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma t} L(t,y(t))dt \to \inf, \tag{9}$$

де $u_0 \in U,\ v_0 \in V$ є вже сталими векторами. Ці задачі значно простіші, ніж вихідні, оскільки є задачами оптимального керування для систем звичайних диференціальних рівнянь. Аналогічно початковим задачам позначимо $\overline{J}^1_\varepsilon = \inf_{(u_0,v_0)\in F_1} \overline{J}^1_\varepsilon(u_0,v_0)$ та $\overline{J}^2_\varepsilon = \inf_{(u,v)\in F_2} \overline{J}^2_\varepsilon(u_0,v_0)$.

Основним результатом роботи є отримання результату, який стверджує, що оптимальне керування $(u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon))$ усереднених задач є η: оптимальним для початкових задач, а саме, для довільного $\eta > 0$ існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що при всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ виконуються нерівності

$$\left|J^1_\varepsilon\left(u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon)\right) - J^1_\varepsilon\right| < \eta, \qquad \left|J^2_\varepsilon\left(u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon)\right) - J^2_\varepsilon\right| < \eta.$$

Відомо, що метод усереднення є одним із найбільш поширених методів аналізу нелінійних динамічних систем. Для звичайних диференціальних рівнянь його обґрунтував М. М. Боголюбов [2]. Для систем з імпульсною дією у загальній формі його обґрунтування вперше одержано в [3]. Зазначимо також роботи [4, 5], де результати роботи [3] набули подальшого розвитку.

Метод усереднення виявився також ефективним і для розв'язування задач оптимального керування. Даним питанням присвячено низку робіт (див., наприклад, роботу [6], в якій наведено обширну бібліографію). В [7] розвинуто інший підхід щодо застосування методу усереднення до задач оптимального керування, а саме: вважаючи функцію керування u параметром, здійснювалося усереднення за часом, що явно входить у праві частини системи.

У даній роботі такий підхід застосовано до задач оптимального керування імпульсними системами з нефіксованими моментами імпульсної дії. Такі задачі із застосуванням принципу максимуму раніше вивчалися в [8].

Структура даної статті така: у вступі наведено формулювання проблеми та зроблено огляд літератури, в п. 1 дано строгу постановку задачі та наведено основні результати, п. 2 присвячено доведенню лем про усереднення. Доведення основних результатів наведено в п. 3.

1. Постановка задачі та формулювання основних результатів. У подальшому для задач (1) – (3) та відповідних їм усереднених задач (7) – (9) будемо вважати виконаними такі умови:

2.1. Функції $X,\ I_i,\ \Phi,\ \Psi_i,\ L$ рівномірно неперервні за сукупністю змінних при $t \geq 0$, $x \in D,\ u \in U,\ v \in V$, рівномірно по $i = 1, 2, \ldots$.

2.2. Існує додатна стала M така, що

$$\left|\frac{\partial t_i(x)}{\partial x}\right| + |X(t,x,u)| + |\Phi(t,x,u)| + |\Psi_i(x,v)| + |I_i(x,v)| \leq M$$

при $t \geq 0,\ x \in D,\ u \in U,\ v \in V,\ i = 1, 2, \ldots$.

2.3. Існує додатна стала K така, що

$$|X(t,x,u) - X(t,x_1,u)| + |I_i(x,v) - I_i(x_1,v)| +$$
$$+ |\Phi(t,x,u) - \Phi(t,x_1,u)| + |\Psi_i(x,v) - \Psi_i(x_1,v)| + \left|\frac{\partial t_i(x)}{\partial x} - \frac{\partial t_i(x_1)}{\partial x}\right| \leq K|x - x_1|,$$

$$\left|\frac{\partial t_i(x)}{\partial x}\right| \leq K \quad \text{при} \quad t \geq 0, \quad x, x_1 \in D, \quad i = 1, 2, \ldots,\ u \in U,\ v \in V.$$

2.4. Виконується умова a5).

2.5. Усереднена задача Коші (7) має розв'язок $y(\varepsilon t) = y(\varepsilon t, x_0, u_0, v_0),\ y(0, x_0, u_0, v_0) = x_0$, який при $\varepsilon = 1$ належить D для $t \in [0, T]$ разом зі своїм деяким ρ-околом (незалежним від $u_0,\ v_0$) і виконується нерівність $\dfrac{\partial t_i(y(\varepsilon t))}{\partial x} I_i(y(\varepsilon t), v) \leq \beta < 0$ при $t_i' < t < t_i''$, $v \in V$, або $\dfrac{\partial t_i(x)}{\partial x} \equiv 0$.

Тут

$$t_i' = \inf_{x \in D} t_i(x), \qquad t_i'' = \sup_{x \in D} t_i(x), \quad i = \overline{1, l}, \quad t_l < \frac{T}{\varepsilon} < t_{l+1}.$$

Наступна теорема стосується зв'язку між задачами оптимального керування на скінченних часових інтервалах.

Теорема 1. *Нехай виконані умови 2.1 – 2.5 та існує оптимальне керування* $(u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon))$ *усередненої задачі (7), (8) при* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. *Тоді для довільного* $\eta > 0$ *існує таке* $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\eta, \varepsilon_0) > 0$, *що при всіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$*:*

1) $J_\varepsilon^1 > -\infty$*;*

2) виконується нерівність

$$\left|J_\varepsilon^1\left(u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon)\right) - J_\varepsilon^1\right| \leq \eta.$$

Зауваження 1. Якщо в умовах теореми 1 множини припустимих керувань U і V є компактними, то оптимальне керування $(u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon))$ усередненої задачі існує.

Дійсно, як буде показано далі, розв'язок усередненої задачі (7) продовжується на інтервал $\left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$. З умов теореми 1 випливає, що $y(t, u_0, v_0)$ є неперервною функцією параметрів u_0 та v_0. Отже, тоді з теореми Лебега про мажоровану збіжність випливає і неперервність $\overline{J}_\varepsilon^1(u_0, v_0)$ за u_0 та v_0. Твердження зауваження 1 є тепер наслідком теореми Веєрштрасса.

Зауваження 2. Якщо функції $X_0(y, u_0) + I_0(y, v_0),\ \Phi_0(y, u_0) + \Psi_0(y, v_0)$ є неперервно диференційовними, то задача (7), (8) є гладкою скінченновимірною екстремальною задачею.

Наступна теорема стосується задач оптимального керування на півосі. Для цього систему (7) перепишемо у „повільному часі” $\tau = \varepsilon t$:

$$\frac{dy}{d\tau} = \left[X_0(y, u_0) + I_0(y, v_0)\right], \quad y(0) = x_0. \tag{10}$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 2.1 – 2.5, а розв'язок $y(\tau) = y(\tau, x_0, u_0, v_0)$ задачі Коші (10) рівномірно асимптотично стійкий по $\tau_0,\ u_0$ та v_0 і лежить в області D при $\tau \geq 0$ разом зі своїм деяким ρ-околом (незалежним від $u_0,\ v_0$), причому справедливі нерівності $\dfrac{\partial t_i(x)}{\partial x} I_i(x) \leq \beta < 0$ $\left(\text{або } \dfrac{\partial t_i(x)}{\partial x} \equiv 0\right)$ для всіх $i = 1, 2, \ldots$ та x з деякого ρ_0-околу розв'язку $y(\tau)$.*

Тоді, якщо існує оптимальне керування $(u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon))$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ усередненої задачі (7), (9), то для довільного $\eta > 0$ існує $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon_0, \eta) > 0$ таке що:

1) для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ має місце $\left|J_\varepsilon^2\right| < \infty$;

2) виконується нерівність

$$\left|J_\varepsilon^2\left(u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon)\right) - J_\varepsilon^2\right| \leq \eta.$$

Зауваження 3. Якщо в умовах теореми 2 множини припустимих керувань є компактними, то оптимальне керування усередненої задачі (7), (8) існує.

Останнє випливає з неперервної залежності розв'язку $y(t, u_0, v_0)$ задачі (7) на кожному скінченному інтервалі від параметрів, теорем Лебега та Вейєрштрасса.

2. Леми про усереднення. Ключову роль у доведенні теорем 1, 2 відіграють дві леми про усереднення, що є узагальненням теорем А. М. Самойленка [3] про усереднення імпульсних систем на випадок залежності правих частин від функціональних параметрів. Перша з них стосується усереднення на скінченному інтервалі.

Лема 1. *Нехай виконуються умови 2.1 – 2.5. Тоді для довільного $\eta > 0$ існує $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta) > 0$ таке, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ задача (1) має розв'язок $x(t) = x(t, x_0, u, v)$, визначений для $t \in \left[0, \dfrac{T}{\varepsilon}\right]$ і такий, що має місце нерівність*

$$|x(t, x_0, u, v) - y(\varepsilon t, x_0, u_0, v_0)| \leq \eta$$

рівномірно за всіма керуваннями $(u, v) \in F_1$, а u_0 та v_0 вибрані з умов а3) та а4) відповідно.

Доведення. Ідейно доведення спирається на відповідний результат А. М. Самойленка з [3] (теорема 1) для імпульсних систем без керування. Тому не будемо його детально проводити, а лише вкажемо на ті відмінності, що вносить у доведення наявність керувань $u(t)$ та v_i.

Перш за все зауважимо, що зі співвідношень (4) та (5) випливає існування функції $\varphi(t)$, монотонно прямуючої до нуля при $t \to \infty$, такої, що рівномірно по $t \geq 0,\ x \in D,\ u \in U,$ $v \in V$ справедливі нерівності

$$\left|\int_t^{t+A} (X(t, x, u) - X_0(x, u))dt\right| \leq \frac{\varphi(A)}{2} A, \tag{11}$$

$$\left|\sum_{t < t_i(x) < t+A} I_i(x, v) - I_0(x, v)A\right| \leq \frac{\varphi(A)}{2} A. \tag{12}$$

Зі співвідношень (4) та (5) також випливає неперервність, обмеженість та ліпшіцевість функцій $X_0(x,u)$ та $I_0(x,v)$.

Виберемо достатньо велике $A>0$, мале $\eta>0$ та довільні припустимі керування $(u,v)\in F_1$ і зафіксуємо їх. З умови 2.1 витікає існування $\delta>0$ такого, що при $|u-u_1|<\delta$, $|v-v_1|<\delta$ виконуються оцінки

$$|X(t,x,u)-X(t,x,u_1)|\le\frac{K\eta}{8e^{KT}},\tag{13}$$

$$|I_i(x,v)-I_i(x,v_1)|\le\frac{K\eta}{8Ce^{KT}}\tag{14}$$

для $t\ge0,\ x\in D,\ u,u_1\in U,\ v,v_1\in V.$

Нехай у напівінтервалі $[0,A)$ лежить рівно d_1 точок $t_1(x_0)=t_1^0,\ldots,t_{d_1}(x_0)=t_{d_1}^0$, причому $0<t_1,\ t_i^0<t_{i+1}^0,\ t_{d_1}^0<A,\ i=\overline{1,d_1}$. Виберемо з умов а3) та а4) T_0 і N_0 такі, щоб при $t\ge T_0$ та $i\ge N_0$ виконувалися нерівності

$$|u(t)-u_0|<\delta,\quad |u_i-v_0|<\delta.\tag{15}$$

Не втрачаючи загальності, можна вважати $A\ge T_0$ і $d_1\ge N_0$.

Далі, провівши викладки, аналогічні [3], завдяки рівномірності по $v\in V$ нерівності з 2.5 одержимо, що $x(t)=x(t,x_0,u,v)$ існує для $t\in[0,A]$ і визначається з точністю до величин порядку ε^2 за формулою

$$\begin{aligned}x(A)&=x_0+\varepsilon[X_0(x_0,u_0)+I_0(x_0,v_0)]A+\varepsilon\int\limits_0^A(X(t,x_0,u_0)-X_0(x_0,u_0))dt+\\&+\varepsilon\Bigg[\sum_{0<t_i^0<A}I_i(x_0,v_0)-I_0(x_0,v_0)A\Bigg]+\varepsilon\int\limits_0^A\big(X(t,x_0,u(t))-X(t,x_0,u_0)\big)dt+\\&+\varepsilon\sum_{0<t_i^0<A}\big[I_i(x_0,v_i)-I_i(x_0,v_0)\big]+\varepsilon^2+\ldots.\end{aligned}\tag{16}$$

Але

$$\begin{aligned}&\varepsilon\int\limits_0^A|X(t,x_0,u(t))-X(t,x_0,u_0)|dt\le\\&\le\varepsilon T_0 2M+\varepsilon\int\limits_{T_0}^A|X(t,x_0,u(t))-X(t,x_0,u_0)|dt\le2\varepsilon T_0M+\frac{\varepsilon\eta AK}{8e^{KT}},\end{aligned}\tag{17}$$

відповідно до оцінки (13).

Аналогічно, маємо

$$\varepsilon \sum_{0<t_i^0<A} |I_i(x_0, v_i) - I_i(x_0, v_0)| \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{0<t\leq N_0} |I_i(x_0, v_i) - I_i(x_0, v_0)| + \varepsilon \sum_{N_0<i\leq d_1} |I_i(x_0, v_i) - I_i(x_0, v_0)| \leq$$

$$\leq 2M\varepsilon N_0 + \varepsilon \frac{\eta d_1 K}{2Ce^{KT}} \leq \varepsilon 2MN_0 + \varepsilon A \frac{\eta}{8} \frac{K}{e^{KT}}, \tag{18}$$

згідно з оцінками (6) та (14).

Враховуючи (11), (12), (17) та (18), з (16) отримуємо

$$|x(A) - y(\varepsilon A)| \leq \varepsilon \int_0^A |X_0(y(\varepsilon s), u_0) + I_0(y(\varepsilon s), v_0) - X_0(x_0, u_0) - I_0(x_0, v_0)|\, ds+$$

$$+ \varepsilon\varphi(A)A + \varepsilon 2T_0 M + \frac{\varepsilon A}{e^{KT}} \frac{\eta K}{8} + \varepsilon 2MN_0 + \varepsilon A \frac{K\eta}{8e^{KT}} + \varepsilon^2 + \ldots \leq$$

$$\leq \varepsilon\left[\varphi(A)A + 2T_0 M + 2MN_0 + A\eta\right] + \varepsilon^2\big(M(A, d_1) + KMA^2\big). \tag{19}$$

Позначимо $B := 2T_0 M + 2MN_0$.

Нехай у напівінтервалі $[A, 2A)$ лежить d_2 точок $t_{d_1+i},\ i = \overline{1, d_2}$:

$$A < t_{d_1+1}(y(\varepsilon A)) < \ldots < t_{d_1+d_2}(y(\varepsilon T)) < 2A.$$

Тоді з оцінки (19) і рівномірної неперервності функцій $t_i(x)$ випливає, що на напівінтервалі $[A, 2A)$ при малих ε лежить також d_2 точок

$$T < t_{d_1+1}(x(A)) = t_1^{(1)} < \ldots < t_{d_1+d_2}(x(A)) = t_{d_2}^{(1)} < 2A.$$

Далі, аналогічно до попередніх викладок, маємо

$$x(2A) = x(A) + \varepsilon[X_0(x(A), u_0) + I_0(x(A), u_0)]A+$$

$$+ \varepsilon \int_A^{2A} [X(t, x(A), u_0) - X_0(x(A), u_0)]dt+$$

$$+ \varepsilon \left[\sum_{A<t_i^{(1)}<2A} I_i(x(A), v_0) - I_0(x(A), v_0)A \right] +$$

$$+ \varepsilon \int_A^{2A} [X(t, x(T), u(t)) - X(t, x(T), u_0)]dt+$$

$$+ \varepsilon \sum_{A<t_i^{(1)}<2A} [I_i(x(T), v_i) - I_i(x(T), v_0)] + \varepsilon^2 M(T, d_2).$$

Звідси з урахуванням (11) – (15) випливає оцінка

$$|x(2A)-y(2A)| \leq (1+\varepsilon KT)|x(A)-y(\varepsilon A)| + \varepsilon\varphi(A) + \varepsilon^2 KA^2 M + \frac{\varepsilon AK\eta}{4e^{KT}} + \varepsilon^2 M(A,d_2).$$

Беручи до уваги (19), остаточно маємо оцінку

$$|x(2A)-y(2A\varepsilon)| \leq \varepsilon(1+(1+\varepsilon KA))(\varphi(A)A + T\eta + B + \varepsilon\overline{M}),$$

де $\overline{M} = KMT^2 + \max_{i=1,2} M(T,d_i)$.

Продовжуючи такі ж міркування на відрізках $[(n-1)T, nT)$, аналогічно [3] отримуємо нерівність

$$\big|x(nA)-y(\varepsilon nA)\big| \leq \varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}(1+\varepsilon KA)^i\left(\varphi(A)A + \frac{KA\eta}{4e^{KT}} + B + \varepsilon M_0(A)\right),$$

де $nA \leq \dfrac{T}{\varepsilon}$. Тоді

$$|x(nA)-y(\varepsilon nA)| \leq \frac{e^{KT}}{K}\left(\varphi(A) + \frac{K\eta}{4e^{KT}} + \frac{B}{A} + \varepsilon\,\frac{M_0(A)}{A}\right).$$

Зафіксуємо тепер A і ε з умов

$$\frac{e^{KT}}{K}\left(\varphi(A) + \frac{B}{A}\right) \leq \frac{\eta}{8}, \qquad \frac{\varepsilon_0 e^{KT} M_0(A)}{AK} \leq \frac{\eta}{8}.$$

Тоді при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ отримуємо оцінку $|x(nA)-y(\varepsilon nA)| \leq \dfrac{\eta}{2}$.

Подальше доведення аналогічне теоремі 1 з [3].

Лему доведену.

Наступна лема обґрунтовує схему усереднення на півосі.

Лема 2. *Нехай виконано умови 2.1 – 2.4, а розв'язок $y(\tau) = y(\tau, x_0, u_0, v_0)$ усередненої задачі Коші (10) рівномірно по $\tau_0,\ u_0,\ v_0$ асимптотично стійкий і лежить у області D при $\tau \geq 0$ разом зі своїм деяким ρ-околом (незалежним від u_0 та v_0), причому мають місце нерівності*

$$\frac{\partial t_i(x)}{\partial x}\, I_i(x) \leq \beta < 0$$

або

$$\frac{\partial t_i(x)}{\partial x} \equiv 0$$

для всіх $i = 1, 2, \ldots$ та x з деякого ρ_0-околу розв'язку $y(\tau)$.

Тоді для довільного $\eta > 0$ існує $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta) > 0$ таке, що при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для розв'язків $x(t) = x(t, x_0, u, v)$ та $y(\varepsilon t) = y(\varepsilon t, x_0, u_0, v_0)$ задач (1) та (7) справджується оцінка

$$|x(t) - y(\varepsilon t)| \leq \eta, \quad t \geq 0,$$

рівномірно за всіма керуваннями $(u,v) \in F_2$, а $u_0,\ v_0$ вибрано з умов a3) та a4).

Доведення аналогічне до відповідного результату А. М. Самойленка з [3] (теорема 2) з використанням леми 1.

3. Доведення теорем. ***3.1. Доведення теореми 1.*** Перше твердження доведемо від супротивного. Дійсно, нехай $J_\varepsilon^1 = -\infty$. Тоді існує послідовність $\varepsilon_n > 0$ така, що $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, і

$$J_{\varepsilon_n}^1 = -\infty. \tag{20}$$

А отже, для кожного ε_n існує послідовність керувань $(u_m^n, v_m^n) \in F_1$ така, що

$$J_{\varepsilon_n}^1 \left(u_m^n, v_m^n\right) \to -\infty, \quad m \to \infty. \tag{21}$$

Нехай $x_m^n\left(t, u_m^n, v_m^n\right)$ та $y_m^n\left(\varepsilon t, u_{0m}^n, v_{0m}^n\right)$ — розв'язки задач (1) та (7), що відповідають керуванням $\left(u_m^n(t), v_{m_i}^n\right)$ та $\left(u_{0m}^n, v_{0m}^n\right)$, де u_{0m}^n та v_{0m}^n вибрано з умов a3) та a4).

Оскільки для задачі (7), (8) оптимальне керування існує, то

$$\overline{J}_\varepsilon^1\left(u_{0_m}^n, v_{0_m}^n\right) \ge \overline{J}_{\varepsilon_n}^1 > -\infty.$$

Зафіксуємо $\eta_0 > 0$ і оцінимо різницю $J_{\varepsilon_n}^1\left(u_m^n, v_m^n\right) - \overline{J}_{\varepsilon_n}^1\left(u_{0_m}^n, v_{0_m}^n\right)$. Для цього введемо додаткові координати

$$z(t) = \varepsilon \int\limits_0^t \Phi(s, x(s), u(s))ds + \varepsilon \sum_{0<t_i(x)<t} \Psi_i(x(t_i), v_i)$$

та

$$y_0(t) = \varepsilon \int\limits_0^t \left[\Phi_0(y(s), u_0)ds + \Psi_0(y(s), v_0)\right]ds.$$

В результаті задачі (1), (2) та (7), (8) набирають вигляду

$$\begin{gathered}\dot{x} = \varepsilon X(t, x, u), \quad t \ne t_i(x),\\ \dot{z} = \varepsilon \Phi(t, x, u), \quad t \ne t_i(x),\end{gathered} \tag{22}$$

$$\triangle x|_{t=t_i(x)} = \varepsilon I_i(x, v_i), \quad \triangle z|_{t=t_i(x)} = \varepsilon \Psi_i(x, v_i),$$

$$x(0) = x_0, \quad z(0) = 0,$$

$$\bar{J}_\varepsilon^1(u, v) = z\left(\frac{T}{\varepsilon}\right) \to \inf$$

та

$$\begin{gathered}\dot{y} = \varepsilon[X_0(y, u_0) + I_0(y, v_0)],\\ \dot{y_0} = \varepsilon[\Phi_0(y, u_0) + \Psi_0(y, v_0)],\\ y(0) = x_0, \quad y_0(0) = 0,\\ \bar{J}_\varepsilon^1(u_0, v_0) = y_0\left(\frac{T}{\varepsilon}\right) \to \inf.\end{gathered} \tag{23}$$

До систем (22) та (23) тоді застосовна лема 1, з якої випливає існування натурального n_0 такого, що при $\varepsilon_n \le \varepsilon_{n_0}$ справедливі оцінки

$$\left|J^1_{\varepsilon_n}\left(u^n_m, v^n_m\right) - \bar{J}^1_{\varepsilon}\left(u^n_{0m}, v^n_{0m}\right)\right| = \left|z\left(\frac{T}{\varepsilon_n}\right) - y_0\left(\frac{T}{\varepsilon_n}\right)\right| < \eta_0.$$

Звідси отримуємо

$$J^1_{\varepsilon_n}\left(u^n_m, v^n_m\right) = \bar{J}^1_{\varepsilon_n}(u^n_{0m}, v^n_{0m}) + J^1_{\varepsilon_n}(u^n_m) - \bar{J}^1_{\varepsilon_n}(u^n_{0m}, v^n_{0m}) \ge \bar{J}^1_{\varepsilon_n} - \eta_0,$$

що суперечить (21), а отже, й (20).

Для доведення другої частини теореми зауважимо, що

$$J^1_{\varepsilon} \le J^1_{\varepsilon}\left(u^*_0(\varepsilon), v^*_0(\varepsilon)\right) = \bar{J}^1_{\varepsilon} + J^1_{\varepsilon}\left(u^*_0(\varepsilon), v^*_0(\varepsilon)\right) - \bar{J}^1_{\varepsilon}\left(u^*_0(\varepsilon), v^*_0(\varepsilon)\right).$$

Але для довільного $\eta_1 > 0$ при достатньо малих $\varepsilon > 0$ за лемою 1 маємо

$$\left|J^1_{\varepsilon}\left(u^*_0(\varepsilon), v^*_0(\varepsilon)\right) - \bar{J}^1_{\varepsilon}\left(u^*_0(\varepsilon), v^*_0(\varepsilon)\right)\right| = \left|z\left(\frac{T}{\varepsilon}, u^*_0(\varepsilon), v^*_0(\varepsilon)\right) - y_0\left(\frac{T}{\varepsilon}, u^*_0(\varepsilon), v^*_0\right)\right| \le \eta_1.$$

Тоді

$$J^1_{\varepsilon} \le \bar{J}^1_{\varepsilon} + \eta_1. \tag{24}$$

З означення нижньої грані також випливає, що для вибраного $\eta_1 > 0$ існує припустима пара $(u_{\eta_1}, v_{\eta_1}) \in F_1$ така, що виконується нерівність

$$J^1_{\varepsilon}(u_{\eta_1}, v_{\eta_1}) < J^1_{\varepsilon} + \eta_1.$$

Оскільки пара (u_{η_1}, v_{η_1}) припустима, то для неї існує стала припустима пара $(u_{\eta_1,0}, v_{\eta_1,0})$ з умов a3) та a4). Тоді

$$\overline{J}^1_{\varepsilon} = \overline{J}^1_{\varepsilon}\left(u^*_0(\varepsilon), v^*_0(\varepsilon)\right) \le \overline{J}^1_{\varepsilon}(u_{\eta_1,0}, v_{\eta_1,0}) + J^1_{\varepsilon} - J^1_{\varepsilon}(u_{\eta_1}, v_{\eta_1}) + \eta_1.$$

Але завдяки лемі 1 маємо

$$\left|\overline{J}^1_{\varepsilon}(u_{\eta_1,0}, v_{\eta_1,0}) - J^1_{\varepsilon}(u_{\eta_1}, v_{\eta_1})\right| < \eta_1$$

для достатньо малих ε. Отже,

$$\overline{J}^1_{\varepsilon} \le J^1_{\varepsilon} + 2\eta_1,$$

звідки з урахуванням (24) одержуємо

$$\left|\overline{J}^1_{\varepsilon} - J^1_{\varepsilon}\right| \le 2\eta_1. \tag{25}$$

Тепер маємо оцінку

$$\left|J^1_{\varepsilon}\left(u^*_0(\varepsilon), v^*_0(\varepsilon)\right) - J^1_{\varepsilon}\right| \le \left|J^1_{\varepsilon}\left(u^*_0(\varepsilon), v^*_0(\varepsilon)\right) - \bar{J}^1_{\varepsilon}\right| + |\bar{J}^1_{\varepsilon} - J^1_{\varepsilon}|. \tag{26}$$

Перший доданок в (26) згідно з лемою 1 не перевищує η_1 при достатньо малих ε. Завдяки довільності η_1 з (25) та (26) отримуємо друге твердження теореми.

Теорему доведену.

3.2. Доведення теореми 2. Покажемо, що оптимальна пара $(u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon))$ усередненої задачі (7), (9) є припустимою для точної задачі (1), (3). Тим самим ми доведемо, що множина F_2 не порожня.

Дійсно, за лемою 2 для довільного $\eta > 0$ розв'язок $x(t) = x\left(t, x_0, u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon)\right)$ при достатньо малих $\varepsilon > 0$ задовольняє нерівність (3)

$$|x(t) - y(\varepsilon t, x_0, u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon))| \leq \eta \quad \text{при} \quad t \geq 0.$$

Останнє згідно з умовами теореми гарантує, що $x(t) \in D$ при всіх $t \geq 0,$ а отже, функція $L(t, x(t))$ визначена при всіх $t \geq 0.$ Тоді завдяки рівномірній неперервності $L(t, x(t))$ з нерівності (3) випливає обмеженість величини

$$|L(t, x(t)) - L\left(t, y(\varepsilon t, x_0, u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon))\right)|\,,$$

а отже, й виконання умови a5), оскільки пара $(u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon))$ припустима для усередненої задачі.

Перше твердження теореми знову встановимо від супротивного. Дійсно, нехай існує послідовність $\varepsilon_n \to 0,\ n \to \infty$, така, що

$$J^2_{\varepsilon_n} = -\infty. \tag{27}$$

З означення інфінуму для кожного ε_n існує послідовність припустимих керувань $\{u^n_m, v^n_m\} \in$ $\in F_2$ така, що

$$J^2_{\varepsilon_n}\left(u^n_m, v^n_m\right) \to -\infty \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{28}$$

Нехай u^n_{0m} та v^n_{0m} — сталі керування, які відповідають керуванням u^n_m та v^n_m з умов a3) та a4). Нехай також $x^n_m(t)$ — розв'язок задачі Коші (1), що відповідає парі $\left(u^n_m, v^n_m\right)$, а $y^n_m(t)$ — розв'язок задачі Коші (7) при керуваннях $\left(u^n_{0m}, v^n_{0m}\right)$. Оскільки при малих $\varepsilon > 0$ усереднена задача керування (7), (9) за умовами теореми має розв'язок, то для достатньо великих n

$$\overline{J}^2_{\varepsilon_n}\big(u^n_{0_m}, v^n_{0_m}\big) \geq \overline{J}^2_{\varepsilon_n} > -\infty. \tag{29}$$

Але

$$\left|J^2_{\varepsilon_n}(u^n_m, v^n_m) - \overline{J}^2_{\varepsilon_n}\big(u^n_{0_m}, v^n_{0_m}\big)\right| \leq \int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} \left|L\left(t, x^n_m(t)\right) - L\left(t, y^n_m(t)\right)\right| dt.$$

Завдяки рівномірній неперервності $L(t, x)$ і лемі 2 величина $\left|L\left(t, x^n_m(t)\right) - L\left(t, y^n_m(t)\right)\right|$ обмежена при малих $\varepsilon,$ а отже,

$$\left|J^2_{\varepsilon_n}(u^n_m, v^n_m) - \overline{J}^2_{\varepsilon_n}\big(u^n_{0_m}, v^n_{0_m}\big)\right| \leq C_1,$$

де C_1 не залежить від $m.$ Звідси з урахуванням (29) випливає нерівність

$$J^2_{\varepsilon_n}(u^n_m, v^n_m) \geq \overline{J}^2_{\varepsilon_n} - C_1 > -\infty,$$

що призводить до суперечності з (28), а отже, й з (27). Першу частину теореми доведено.

Доведемо другу частину. Нехай $(u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon))$ — оптимальне керування для усередненої задачі (7), (9). Вище ми показали, що $x(t) = x(t, x_0, u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon))$ існує при всіх $t \geq 0$ при достатньо малих $\varepsilon > 0$. Нехай $y^*(\varepsilon t) = y^*\left(\varepsilon t, x_0, u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon)\right)$ — оптимальна траєкторія усередненої задачі, що відповідає оптимальній парі $\left(u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon)\right)$. Тоді

$$J_\varepsilon^2 \leq J_\varepsilon^2\left(u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon)\right) = \overline{J}_\varepsilon^2 + J_\varepsilon^2\left(u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon)\right) - \overline{J}_\varepsilon^2\left(u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon)\right).$$

Але

$$\left|J_\varepsilon^2\left(u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon)\right) - \overline{J}_\varepsilon^2\left(u_0^*(\varepsilon), v_0^*(\varepsilon)\right)\right| \leq \int\limits_0^\infty e^{-\gamma t}\left|L(t, x(t)) - L(t, y(\varepsilon t))\right| dt.$$

З рівномірної неперервності $L(t, x)$ і леми 2 випливає, що різниця в інтегралі прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$. Тому завдяки теоремі Лебега про мажоровану збіжність для довільного $\eta > 0$ при малих $\varepsilon > 0$ справедлива нерівність

$$J_\varepsilon^2 \leq \overline{J}_\varepsilon^2 + \eta.$$

Далі доведення проводиться аналогічно до теореми 1.

Теорему 2 доведено.

Література

1. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
2. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. – Киев: Изд-во АН УССР. – 1945. – 150 с.
3. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками // Мат. физика. – 1971. – **9**. – С. 101 – 117.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Вторая теорема Боголюбова Н. Н. для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 1974. – **10**, № 11. – С. 2001 – 2010.
5. *Трофимчук С. И.* К задаче усреднения импульсных систем // Асимптотические методы и их приложения в математической физике. Сб. тр. Ин-та математики НАН УССР. – 1991. – **10**, № 11. – С. 87 – 95.
6. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. – К.; Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
7. *Носенко Т. В., Станжицький О. М.* Метод усереднення в деяких задачах оптимального керування // Нелін. коливання. – 2008. – **11**, № 4. – С. 512 – 519; ***English translation:*** J. Math. Sci. – 2008. – **11**, № 4. – P. 539 – 547.
8. *Samoilenko A. M., Perestyuk M. O.* Impulsive differential equations. – Singapore; New Jersey; London; Hong-Kong: World Sci. Inc., 1995. – 462 p.

Одержано 11.12.2018