УДК 517.988.6

ЗОБРАЖЕННЯ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ РІВНЯНЬ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, Україна
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

We obtain the representation of bounded solutions of linear discrete equations.

Одержано зображення обмежених розв'язків лінійних дискретних рівнянь.

1. Постановка основної задачі. Нехай G — довільна злічення множина і $E_g,\ g\in G,$ — скінченновимірні банахові простори над полем $\mathbb{K}$ дійсних або комплексних чисел з нормами $\|\cdot\|_{E_g},\ g\in G,$ і нульовими елементами $0_g,\ g\in G,$ відповідно. Позначимо через $\mathfrak{M}$ множину відображень $\mathbf{x}\colon G\to\bigcup\limits_{g\in G}E_g,$ для кожного з яких $\mathbf{x}(g)\in E_g,\ g\in G,$ і $\sup_{g\in G}\|\mathbf{x}(g)\|_{E_g}<+\infty.$ Для будь-яких двох елементів $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathfrak{M}$ і числа $k\in\mathbb{K}$ визначимо суму $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ елементів $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ та добуток $k\mathbf{x}$ елемента $\mathbf{x}$ на число k за допомогою рівностей

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})(g)=\mathbf{x}(g)+\mathbf{y}(g)\qquad \text{і}\qquad (k\mathbf{x})(g)=k\mathbf{x}(g),\quad g\in G.$$

Очевидно, що $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in\mathfrak{M}$ і $k\mathbf{x}\in\mathfrak{M}$ для всіх $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathfrak{M}$ і $k\in\mathbb{K}$; множина $\mathfrak{M}$ із розглянутими операціями додавання та множення на число є лінійним простором [1]. Цей простір також є нормованим із нормою $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}}$, що визначається рівністю $\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}}=\sup_{g\in G}\|\mathbf{x}(g)\|_{E_g}$. Завдяки повноті просторів $E_g,\ g\in G,$ простір $\mathfrak{M}$ також є повним, і отже, банаховим простором.

У випадку, коли банахові простори $E_g,\ g\in G,$ збігаються з деяким простором E, для простору $\mathfrak{M}$ будемо використовувати позначення $l_\infty(G,E)$.

Нехай X і Y — довільні банахові простори з нормами $\|\cdot\|_X$ і $\|\cdot\|_Y$ відповідно і $L(X,Y)$ — банахів простір лінійних неперервних операторів A, що діють із простору X у простір Y, з нормою $\|A\|_{L(X,Y)}=\sup_{\|x\|_X=1}\|Ax\|_Y$.

Розглянемо рівняння

$$\sum_{\alpha\in G}A(g,\alpha)\mathbf{x}(\alpha)=\mathbf{y}(g),\quad g\in G,\tag{1}$$

де $A(g,\alpha)\in L(E_\alpha,E_g),\ g,\alpha\in G,$

$$\sup_{g\in G}\sum_{\alpha\in G}\|A(g,\alpha)\|_{L(E_\alpha,E_g)}<+\infty\tag{2}$$

і $\mathbf{y}\in\mathfrak{M}$. Це рівняння можна подати у вигляді

$$\mathcal{A}\mathbf{x}=\mathbf{y},$$

де $\mathcal{A}\colon\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ — лінійний і неперервний (завдяки (2)) оператор, що визначається за допомогою співвідношення

$$(\mathcal{A}\mathbf{z})(g) = \sum_{\alpha \in G} A(g,\alpha)\mathbf{z}(\alpha), \quad g \in G, \tag{3}$$

$\mathbf{z}$ — довільний елемент простору $\mathfrak{M}$.

Будемо вважати, що виконується така умова.

Умова А. Для кожного $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ рівняння (1) має єдиний розв'язок $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$.

У даній статті з'ясуємо, як зображуються розв'язки рівняння (1).

Очевидно, що окремими випадками рівняння (1) є зліченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь та лінійні різницеві рівняння у скінченновимірних просторах (див., наприклад, [2, 3]).

Зазначимо, що задача про зображення обмежених розв'язків рівняння (1) у випадку, коли $E_g = E$ для всіх $g \in G$, де E — скінченновимірний простір, і G — зліченна адитивна група, розв'язана в [4]. Для різницевого рівняння $x_n + A_{n-1}x_{n-1} = y_n,\ n \in \mathbb{Z}$, де $A_{n-1} \in L(E_{n-1}, E_n),\ \mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел і $E_n,\ n \in \mathbb{Z}$, — нескінченновимірні простори, аналогічну задачу розв'язано в [5].

2. Формулювання основного результату. Позначимо через $I_\beta,\ \beta \in G$, одиничний оператор, що діє в просторі E_β, а через $O_{g,\alpha},\ g,\alpha \in G$, — нульовий оператор, що діє з простору E_α у простір E_g.

Подамо множину G у вигляді

$$G = \{g_n : n \in \mathbb{H}\}, \tag{4}$$

де $\mathbb{H}$ — множина $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел) або $\mathbb{Z}$. Це можна зробити, оскільки множина G зліченна і тому її елементи можна бієктивно зіставити з усіма натуральними або з усіма цілими числами. Таких способів зображення множини G є нескінченно багато.

Справджується таке твердження.

Теорема 1. *Нехай виконується умова А. Тоді:*

1) існують оператори $\Omega(g,\alpha) \in L(E_\alpha, E_g),\ g,\alpha \in G$ (вони визначаються єдиним чином), для яких

$$\sup_{g \in G} \sum_{\alpha \in G} \|\Omega(g,\alpha)\|_{L(E_\alpha, E_g)} < +\infty,$$

$$\sum_{\alpha \in G} A(g,\alpha)\Omega(\alpha,\beta) = \sum_{\alpha \in G} \Omega(g,\alpha)A(\alpha,\beta)$$

$$= \begin{cases} I_\beta, & \text{якщо} \quad g = \beta, \\ O_{g,\beta}, & \text{якщо} \quad g \neq \beta, \end{cases}$$

і для кожного $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ розв'язок $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ рівняння (1) подається у вигляді

$$\mathbf{x}(g) = \sum_{\alpha \in G} \Omega(g,\alpha)\mathbf{y}(\alpha), \quad g \in G;$$

2) якщо для деяких чисел $q \in (0,1),\ N \geq 1$ і зображення (4) множини G

$$\|A(g_n, g_m)\|_{L(E_{g_m}, E_{g_n})} \leq N q^{|n-m|}, \quad n,m \in \mathbb{H},$$

то для деяких чисел $q_1 \in (0,1)$ і $N_1 \geq 1$

$$\|\Omega(g_n, g_m)\|_{L(E_{g_m}, E_{g_n})} \leq N_1 q_1^{|n-m|}, \quad n,m \in \mathbb{H}.$$

Доведення цієї теореми буде використовувати ряд результатів про c-неперервні оператори.

3. Допоміжні результати. Спочатку розглянемо задачу про зображення лінійних c-неперервних операторів, що діють у просторі $\mathfrak{M}$. Ця непроста задача у випадку $E_g = E$, $g \in G$, де E — скінченновимірний банахів простір і G — зліченна адитивна група, розв'язана в [4]. У випадку $E_g \not\equiv E$ розв'язання задачі про зображення c-неперервних операторів ускладнюється. Тому для спрощення дослідження цих операторів спочатку наведемо деякі допоміжні результати.

3.1. Локально збіжні послідовності і c-неперервні оператори. Для множини $M \subset G$ визначимо оператор $\mathcal{P}_M \colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ рівністю

$$(\mathcal{P}_M \mathbf{x})(g) = \begin{cases} \mathbf{x}(g), & \text{якщо} \quad g \in M, \\ 0_g, & \text{якщо} \quad g \in G \setminus M, \end{cases}$$

де $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$.

Позначимо через $\mathfrak{G}$ сім'ю множин $M_\nu,\ \nu \in \mathbb{N}$, кожна з яких містить скінченне число елементів множини $G,\ M_\nu \subset M_{\nu+1},\ \nu \in \mathbb{N}$, і $\bigcup\limits_{\nu \in \mathbb{N}} M_\nu = G$.

Будемо говорити, що послідовність $\mathbf{x}_k \in \mathfrak{M},\ k \in \mathbb{N}$, *локально збігається* до елемента $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ при $k \to \infty$, і позначатимемо $\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc.},\, \mathfrak{M}} \mathbf{x}$ при $k \to \infty$, якщо ця послідовність обмежена і $\lim\limits_{k\to\infty} \|\mathcal{P}_M(\mathbf{x}_k - \mathbf{x})\|_{\mathfrak{M}} = 0$ для всіх $M \in \mathfrak{G}$.

Множина локально збіжних послідовностей елементів простору $\mathfrak{M}$ є достатньо обширною множиною, що підтверджується таким твердженням.

Лема 1. *Для кожної обмеженої послідовності* $(\mathbf{x}_k)_{k\ge1}$ *елементів простору* $\mathfrak{M}$ *існують такі підпослідовність* $(\mathbf{x}_{k_l})_{l\ge1}$ *і елемент* $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$, *що* $\mathbf{x}_{k_l} \xrightarrow{\text{loc.},\, \mathfrak{M}} \mathbf{x}$ *при* $l \to \infty$ *і* $\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} \le$ $\le \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\mathbf{x}_k\|_{\mathfrak{M}}$.

Доведення. Завдяки зліченності множини G її можна подати у вигляді (4). Будемо вважати, що $\mathbb{H} = \mathbb{N}$. Розглянемо множини $\{\mathbf{x}_k(g_n) \colon k \in \mathbb{N}\},\ n \in \mathbb{N}$. На підставі скінченних розмірностей просторів $E_g,\ g \in G$, і обмеженості послідовності $(\mathbf{x}_k)_{k\ge1}$ ці множини передкомпактні. Тому існують послідовності

$$\begin{gathered}
\mathbf{x}_{k_{1,1}}(g_1), \mathbf{x}_{k_{1,2}}(g_1), \ldots, \mathbf{x}_{k_{1,m}}(g_1), \ldots, \\
\mathbf{x}_{k_{2,1}}(g_2), \mathbf{x}_{k_{2,2}}(g_2), \ldots, \mathbf{x}_{k_{2,m}}(g_2), \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathbf{x}_{k_{n,1}}(g_n), \mathbf{x}_{k_{n,2}}(g_n), \ldots, \mathbf{x}_{k_{n,m}}(g_n), \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{gathered}$$

що задовольняють умови:

1) послідовність $(\mathbf{x}_{k_{1,l}}(g_1))_{l\ge1}$ є підпослідовністю послідовності $(\mathbf{x}_k(g_1))_{k\ge1}$;

2) для кожного $n \in \mathbb{N}$ послідовність $(\mathbf{x}_{k_{n+1,l}}(g_n))_{l\ge1}$ є підпослідовністю послідовності $(\mathbf{x}_{k,l}(g_n))_{l\ge1}$;

3) для кожного $n \in \mathbb{N}$ послідовність $(\mathbf{x}_{k_{n,l}}(g_n))_{l\geq 1}$ збігається в банаховому просторі E_{g_n}.

Отже, для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує елемент $a_n \in E_{g_n}$, що є границею послідовності $(\mathbf{x}_{k_{n,l}}(g_n))_{l\geq 1}$, тобто

$$\lim_{l\to\infty} \mathbf{x}_{k_{n,l}}(g_n) = a_n. \tag{5}$$

Розглянемо елемент $\mathbf{a} \in \mathfrak{M}$, для якого $\mathbf{a}(g_n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, і обмежену послідовність $(\mathbf{x}_{k_{l,l}})_{l\geq 1}$ елементів простору $\mathfrak{M}$. Завдяки (5)

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{P}_M(\mathbf{x}_{k_{n,n}} - \mathbf{a})\|_{\mathfrak{M}} = 0 \tag{6}$$

для кожної множини $M \in \mathfrak{G}$. Звідси та з обмеженості послідовності $(\mathbf{x}_{k_{n,n}})_{n\geq 1}$ в $\mathfrak{M}$ випливає, що $\mathbf{a} \in \mathfrak{M}$ і $\|\mathbf{a}\|_{\mathfrak{M}} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mathbf{x}_{k_{n,n}}\|_{\mathfrak{M}}$.

Співвідношення (6) означає, що $\mathbf{x}_{k_{n,n}} \xrightarrow{\text{loc.},\, \mathfrak{M}} \mathbf{a}$ при $n \to \infty$.

Лему 1 доведено.

Оператор $F\colon \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$ будемо називати *c-неперервним*, якщо для довільних $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ і послідовності $\mathbf{x}_k \in \mathfrak{M}$, $k \in \mathbb{N}$, для яких $\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc.},\, \mathfrak{M}} \mathbf{x}$ при $k \to \infty$, випливає, що

$$F\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc.},\, \mathfrak{M}} F\mathbf{x} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Прикладами c-неперервних операторів є оператори $\mathcal{P}_M$, $M \in \mathfrak{G}$, одиничний оператор I ($I\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$), нульовий оператор O ($O\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$), а також оператор $\mathcal{A}$, що визначається за допомогою співвідношення (3).

Поняття c-неперервного оператора ввів до розгляду (на мові "ε, δ") Е. Мухамадієв [6]; їхнє вивчення було продовжене в [7 – 17] та інших роботах.

Важливим для розв'язання задачі про зображення розв'язків рівняння (1) є таке твердження.

Теорема 2. *Нехай c-неперервний оператор $\mathcal{B} \in L(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ має обернений неперервний оператор $\mathcal{B}^{-1}$. Тоді оператор $\mathcal{B}^{-1}$ є c-неперервним.*

Доведення. Припустимо, що оператор $\mathcal{B}^{-1}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ не є c-неперервним. Тоді існують обмежені послідовності $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1}$, $(\mathbf{y}_k)_{k\geq 1}$ елементів $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{y}_k$ простору $\mathfrak{M}$ і множина $M \in \mathfrak{G}$, для яких

$$\mathcal{B}\mathbf{x}_k = \mathbf{y}_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

$$\mathbf{y}_k \xrightarrow{\text{loc.},\, \mathfrak{M}} \mathbf{0} \quad \text{при} \quad k \to \infty \tag{8}$$

і

$$\|\mathcal{P}_M \mathbf{x}_k\|_{\mathfrak{M}} \geq 1, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Завдяки скінченним розмірностям просторів E_g, $g \in G$, лемі 1, обмеженості послідовності $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1}$ і співвідношенню (9) існують елемент $\mathbf{z} \in \mathfrak{M}$ і підпослідовність $(k_p)_{p\geq 1}$ послідовності натуральних чисел такі, що

$$\mathbf{x}_{k_p} \xrightarrow{\text{loc.},\, \mathfrak{M}} \mathbf{z} \quad \text{при} \quad p \to \infty \tag{10}$$

і

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathfrak{M}} \geq 1. \tag{11}$$

Очевидно, що для всіх $g \in G$ і $p \in \mathbb{N}$

$$\|(\mathcal{B}\mathbf{z})(g)\|_{E_g} \leq \|(\mathcal{B}(\mathbf{z} - \mathbf{x}_{k_p}))(g)\|_{E_g} + \|\mathbf{y}_{k_p}(g)\|_{E_g}$$

(тут використано співвідношення (7)). Тому на підставі (8), (10) і c-неперервності оператора $\mathcal{A}$

$$\mathcal{B}\mathbf{z} = \mathbf{0}. \tag{12}$$

Співвідношення (11) і (12) суперечать оборотності оператора $\mathcal{B}$.

Отже, припущення про те, що оператор $\mathcal{B}^{-1}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ не є c-неперервним, хибне.

Теорему 2 доведено.

3.2. Теорема про ε-сітки сфер одиничного радіуса. У подальшому викладі ми будемо використовувати як банахові простори $E_g,\ g \in G,$ так і спряжені з ними простори $E_g^*,$ $g \in G,$ що також є банаховими. Від просторів $E_g,\ g \in G,$ вимагатимемо, щоб вони мали скінченну розмірність і $\sup_{g\in G} \dim E_g < +\infty.$ Оскільки $\dim E_g^* = \dim E_g$ [1], $g \in G,$ то також $\sup_{g\in G} \dim E_g^* < +\infty.$ При виконанні зазначених вимог сфери

$$S_g = \{\varphi \in E_g^* : \|\varphi\|_{E_g^*} = 1\}, \quad g \in G,$$

будуть компактними і тому при будь-яких $\varepsilon > 0$ і $g \in G$ для S_g існує скінченна ε-сітка S_g^ε. Не очевидно, що кожному $\varepsilon > 0$ відповідає таке натуральне число k_ε, що для всіх $g \in G$ для сфери S_g існує ε-сітка S_g^ε, число елементів $\operatorname{card} S_g^\varepsilon$ якої не більше k_ε. Взаємно-однозначна відповідність між нормами в скінченновимірному банаховому просторі і абсолютно опуклими поглинаючими компактними множинами є природною [18]. Далі покажемо, що не залежно від того, як визначається норма в просторі і який вигляд має породжена нею одинична сфера, для кожних $\varepsilon > 0$ і $g \in G$ існує така ε-сітка S_g^ε, що виконується співвідношення

$$\sup_{g\in G} \operatorname{card} S_g^\varepsilon < +\infty.$$

Ця властивість сфер у скінченновимірних просторах буде використовуватися при з'ясуванні загального вигляду лінійних c-неперервних елементів простору $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$.

Щоб не ускладнювати викладення матеріалу, використовуватимемо дійсні банахові простори. Основні допоміжні для подальшого результати, які ми наведемо, справджуються й у випадку комплексних банахових просторів.

Зафіксуємо довільний дійсний скінченновимірний банахів простір E з нормою $\|\cdot\|_E$. Розмірність $\dim E$ цього простору позначимо через m. Для лінійно незалежних векторів $a_1, \ldots, a_m \in E$ розглянемо в E множину

$$\Pi(a_1, \ldots, a_m) = \{\theta_1 a_1 + \ldots + \theta_m a_m \colon |\theta_1| \leq 1, \ldots, |\theta_m| \leq 1\},$$

яку називають замкненим *паралелотопом* [19, с. 149]. Також розглянемо в E одиничну сферу S з центром у точці $x = 0$, тобто множину

$$S = \{x \in E \colon \|x\|_E = 1\}.$$

Лема 2. *Існують такі вектори* $a_1, \ldots, a_m \in S$, *що*

$$S \subset \Pi(a_1, \ldots, a_m). \tag{13}$$

Доведення. Оскільки за припущенням простір E дійсний і має розмірність m, то цей простір ізоморфний арифметичному m-вимірному простору $\mathbb{R}^m$. Тому при доведенні леми, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $E = \mathbb{R}^m$.

Розглянемо лінійно незалежні вектори $a_{1,1}, \ldots, a_{m,1} \in S$, підпростори $E_{1,1}, \ldots, E_{m,1}$ простору E, де $E_{k,1}$ — підпростір, породжений векторами $a_{l,1}$, $l \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{k\}$, і гіперплощини $a_{k,1} + E_{k,1} = \{a_{k,1} + x \colon x \in E_{k,1}\}$, $k = \overline{1, m}$. Якщо

$$S \subset \Pi(a_{1,1}, \ldots, a_{m,1}), \tag{14}$$

то доведення леми завершено. Якщо $S \setminus \Pi(a_{1,1}, \ldots, a_{m,1}) \neq \varnothing$, то для кожної точки $s \in$ $\in S \setminus \Pi(a_{1,1}, \ldots, a_{m,1})$ можна розглянути гіперплощини $a_{k,1} + E_{k,1}$, $k \in C_s$, де C_s — непорожня підмножина всіх таких точок множини $\{1, \ldots, m\}$, що точка s строго відділена від точки 0 кожною такою гіперплощиною [20]. Розглянемо паралелотопи

$$\Pi_k(s) = \begin{cases} \Pi(s, a_{2,1}, \ldots, a_{m,1}), & \text{якщо} \quad k = 1, \quad 1 \in C_s, \\ \Pi(a_{1,1}, \ldots, a_{k-1,1}, s, a_{k+1,1}, \ldots, a_{m,1}), & \text{якщо} \quad k \in C_s \setminus \{1, m\}, \\ \Pi(a_{1,1}, \ldots, a_{m-1,1}, s), & \text{якщо} \quad k = m, \quad m \in C_s, \end{cases} \qquad k \in C_s.$$

Для об'ємів паралелотопів $\Pi(a_{1,1}, \ldots, a_{m,1})$ і $\Pi_k(s)$, $k \in C_s$, виконується співвідношення

$$V(\Pi(a_{1,1}, \ldots, a_{m,1})) < V(\Pi_k(s)), \quad k \in C_s.$$

У цьому неважко переконатися, використавши [19, с. 151 – 156]. Завдяки компактності сфери S і неперервній залежності об'ємів $V(\Pi_k(s))$, $k \in C_s$, від вектора $s \in S$ (об'єм паралелотопа $\Pi(b_1, \ldots, b_m)$ є неперервною функцією від координат векторів $b_1, \ldots, b_m$) існують такі число $k_1 \in \{1, \ldots, m\}$ і точка $s_1 \in S \setminus \Pi(a_{1,1}, \ldots, a_{m,1})$, що для паралелотопа $\Pi(a_{1,2}, \ldots, a_{m,2})$, де

$$a_{i,2} = \begin{cases} a_{i,1}, & \text{якщо} \quad i \neq k_1, \\ s_1, & \text{якщо} \quad i = k_1, \end{cases}$$

будуть виконуватися співвідношення

$$V(\Pi(a_{1,2}, \ldots, a_{m,2})) > V(\Pi(a_{1,1}, \ldots, a_{m,1}))$$

і

$$V(\Pi(a_{1,2}, \ldots, a_{m,2})) = \sup_{s \in S \setminus \Pi(a_{1,1}, \ldots, a_{m,1})} \max_{k \in C_s} V(\Pi_k(s)).$$

Якщо $S \subset \Pi(a_{1,2}, \ldots, a_{m,2})$, то доведення леми завершено, якщо ж це співвідношення не виконується, то будуємо паралелотоп $\Pi(a_{1,3}, \ldots, a_{m,3})$ так само, як і $\Pi(a_{1,2}, \ldots, a_{m,2})$.

Отже, або через скінченне число кроків буде виконуватися співвідношення типу (14) (тоді доведення леми завершено), або процес побудови паралелотопів $\Pi(a_{1,l}, \ldots, a_{m,l})$, $l \geq$ ≥ 1, буде необмеженим. Розглянемо другий випадок.

Із способу побудови паралелотопів $\Pi(a_{1,l},\ldots,a_{m,l})$, $l\ge 1$, видно, що їх об'єми $V(\Pi(a_{1,l},\ldots,a_{m,l}))$, $l\ge 1$, строго зростають і не більші 2^m. Тому послідовність $(V(\Pi(a_{1,l},\ldots,a_{m,l})))_{l\ge 1}$ є збіжною до деякого числа $V^*\le 2^m$.

Звідси, з компактності сфери S, неперервної залежності $V(\Pi(a_1,\ldots,a_m))$ від $a_1,\ldots,a_m$ і того, що $a_{1,l},\ldots,a_{m,l}\in S$ для всіх $l\ge 1$, випливає існування векторів $a_1^*,\ldots,a_m^*\in S$ і строго зростаючої послідовності $(l_n)_{n\ge 1}$ натуральних чисел, для яких

$$\lim_{n\to+\infty} a_{k,l_n}=a_k^*,\quad k=\overline{1,m}, \tag{15}$$

і

$$\lim_{n\to+\infty} V(\Pi(a_{1,l_n},\ldots,a_{m,l_n}))=V(\Pi\,(a_1^*,\ldots,a_m^*))=V^*. \tag{16}$$

Покажемо, що

$$S\subset\Pi\,(a_1^*,\ldots,a_m^*)\,.$$

Припустимо, що це співвідношення не виконується, тобто

$$S\setminus\Pi\,(a_1^*,\ldots,a_m^*)\ne\varnothing. \tag{17}$$

Розглянемо довільний вектор $s^*\in S\setminus\Pi\,(a_1^*,\ldots,a_m^*)$. Існує таке $k^*\in\{1,\ldots,m\}$, що гіперплощина $a_{k^*}^*+E_{k^*}$, де E_{k^*} — породжений векторами a_k^*, $k\ne k^*$, підпростір простору E, строго відділяє точки s^* і 0. Тоді

$$V(\Pi\,(a_1^{**},\ldots,a_m^{**}))>V(\Pi\,(a_1^*,\ldots,a_m^*))=V^*,$$

де

$$a_k^{**}=\begin{cases} a_k^*, & \text{якщо}\quad k\ne k^*,\\ s^*, & \text{якщо}\quad k=k^*.\end{cases}$$

Використаємо паралелотопи

$$\Pi(a_{1,l_n},\ldots,a_{k^*-1,l_n},s^*,a_{k^*+1,l_n},\ldots,a_{m,l_n}),\quad n\ge 1.$$

Оскільки

$$V(\Pi\,(a_{1,l_n},\ldots,a_{k^*-1,l_n},s^*,a_{k^*+1,l_n},\ldots,a_{m,l_n}))\le V(\Pi\,(a_{1,l_n},\ldots,a_{m,l_n}))\,,\quad n\ge 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} V(\Pi\,(a_{1,l_n},\ldots,a_{m,l_n}))=V^*$$

і

$$\lim_{n\to\infty} V(\Pi\,(a_{1,l_n},\ldots,a_{k^*-1,l_n},s^*,a_{k^*+1,l_n},\ldots,a_{m,l_n}))=V(\Pi\,(a_1^{**},\ldots,a_m^{**}))$$

завдяки (15) та неперервній залежності $V(\Pi\,(a_1,\ldots,a_{k^*-1},s^*,a_{k^*+1},\ldots,a_m))$ від векторних аргументів $a_1,\ldots,a_{k^*-1},a_{k^*+1},\ldots,a_m$, то

$$V(\Pi\,(a_1^{**},\ldots,a_m^{**}))\le V^*,$$

що суперечить (16).

Отже, припущення про виконання співвідношення (17) є хибним.

Лему 2 доведено.

За допомогою леми 2 отримаємо оцінку зверху числа елементів ε-сітки з найменшою потужністю для розглянутої вище сфери S.

Як і вище, вважатимемо, що банахів простір E є дійсним і має розмірність m.

Лема 3. *Для кожного числа $\varepsilon \in (0,1)$ існує скінченна ε-сітка $S^\varepsilon \subset S$ для сфери S, для якої*

$$\operatorname{card} S^\varepsilon < \left(2m\left(\left[\varepsilon^{-1}\right]+1\right)\right)^m,$$

де $\left[\varepsilon^{-1}\right]$ — ціла частина числа ε^{-1}.

Доведення. Зафіксуємо лінійно незалежні вектори $a_1,\ldots,a_m \in S$, для яких виконується співвідношення (13). Розглянемо паралелотоп

$$\Pi = \frac{1}{2m\left(\left[\varepsilon^{-1}\right]+1\right)}\Pi(a_1,\ldots,a_m).$$

Діаметр $\operatorname{diam}\Pi$ паралелотопа Π менший ε, оскільки

$$\frac{1}{2m\left(\left[\varepsilon^{-1}\right]+1\right)} = \frac{1}{2m\left(\varepsilon^{-1}-\left\{\varepsilon^{-1}\right\}+1\right)} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2m\left(1+\varepsilon\left(1-\left\{\varepsilon^{-1}\right\}\right)\right)} < \frac{\varepsilon}{2m},$$

де $\left\{\varepsilon^{-1}\right\}$ — дробова частина числа ε^{-1}, і

$$\operatorname{diam}\Pi(a_1,\ldots,a_m) = \sup_{x_1,x_2\in\Pi(a_1,\ldots,a_m)} \|x_1-x_2\|_E =$$

$$= \sup\left\{\left\|\sum_{k=1}^m \theta_k' a_k - \sum_{k=1}^m \theta_k'' a_k\right\|_E :\ \left|\theta_k'\right| \le 1, \left|\theta_k''\right| \le 1,\ k=\overline{1,m}\right\} \le$$

$$\le \sup\left\{\sum_{k=1}^m \left|\theta_k'-\theta_k''\right| \|a_k\|_E \colon\ \left|\theta_k'\right| \le 1, \left|\theta_k''\right| \le 1,\ k=\overline{1,m}\right\} = 2m.$$

Паралелотоп $\Pi(a_1,\ldots,a_m)$ є об'єднанням $\left(2m\left(\left[\varepsilon^{-1}\right]+1\right)\right)^m$ паралелотопів

$$-\left(1+\frac{1}{2m\left(\left[\varepsilon^{-1}\right]+1\right)}\right)\sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=1}^m \frac{l_k}{m\left(\left[\varepsilon^{-1}\right]+1\right)} a_k + \Pi,$$

де $l_1,\ldots,l_m \in \left\{1,\ldots,2m\left(\left[\varepsilon^{-1}\right]+1\right)\right\}$. Діаметри цих паралелотопів, як і паралелотопа Π, також менші числа ε. У кожному з паралелотопів, що має непорожній перетин зі сферою S, візьмемо довільну точку, що належить і цій сфері. Множина таких точок, очевидно, є ε-сіткою для S. Число точок цієї ε-сітки менше $\left(2m\left(\left[\varepsilon^{-1}\right]+1\right)\right)^m$, оскільки $\varepsilon \in (0,1)$.

Лему 3 доведено.

Зауваження 1. Твердження леми 3 правильне й у випадку комплексного скінченновимірного банахового простору E. У цьому легко переконатися, здійснивши декомплексифікацію простору E [21, с. 18].

На підставі наведених тверджень про сфери і паралелотопи справджується така теорема.

Теорема 3. *Нехай $\{X_h \colon h \in H\}$ — довільна множина скінченновимірних банахових просторів з нормами $\|\cdot\|_{X_h}$, $h \in H$, відповідно і $\sup_{h\in H}\dim X_h < +\infty$.*

Тоді для кожного числа $\varepsilon \in (0, 1/2]$ існує таке натуральне число ν, що для кожної сфери $S_h = \{\varphi \in X_h \colon \|\varphi\|_{X_h} = 1\}$, $h \in H$, знайдеться множина $M_h \subset S_h$, число елементів якої не більше ν, для якої

$$\min_{m \in M_h} \|\varphi - m\|_{X_h} \le \varepsilon \quad \text{для всіх} \quad \varphi \in S_h.$$

3.3. Зображення лінійних c-неперервних операторів. Розглянемо лінійні неперервні оператори $\mathcal{P}_\alpha \colon E_\alpha \to \mathfrak{M}$, $\alpha \in G$, і $\mathcal{Q}_\beta \colon \mathfrak{M} \to E_\beta$, $\beta \in G$, що визначаються рівностями

$$(\mathcal{P}_\alpha u)(g) = \begin{cases} u, & \text{якщо} \quad g = \alpha, \\ 0_g, & \text{якщо} \quad g \neq \alpha, \end{cases} \qquad u \in E_\alpha,$$

і

$$\mathcal{Q}_\beta \mathbf{z} = \mathbf{z}(\beta), \quad \mathbf{z} \in \mathfrak{M}.$$

Теорема 4. *Нехай* $\sup_{g \in G} \dim E_g < +\infty$ *і* $\mathcal{B}$ — c*-неперервний елемент простору* $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$.

Існують такі оператори $B(g, \alpha) \in L(E_\alpha, E_g)$, $g, \alpha \in G$ *(вони визначаються єдиним чином), для яких*

$$\sup_{g \in G} \sum_{\alpha \in G} \|B(g, \alpha)\|_{L(E_\alpha, E_g)} < +\infty \tag{18}$$

і

$$(\mathcal{B}\mathbf{x})(g) = \sum_{\alpha \in G} B(g, \alpha)\mathbf{x}(\alpha), \quad g \in G, \tag{19}$$

для всіх $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$.

Доведення. Розглянемо скінченні множини $M_k \subset G$, $k \ge 1$, для яких $M_k \subset M_{k+1}$, $k \ge 1$, і $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k = G$. Для кожного $g \in G$ розглянемо простір E_g^*, спряжений з E_g [1], і множину $S_g = \{\varphi \in E_g^* \colon \|\varphi\|_{E_g^*} = 1\}$. Із c-неперервності оператора $\mathcal{B}$ випливає, що для всіх $\mathbf{x} \in \mathfrak{B}$ і $g \in G$

$$\mathcal{Q}_g \mathcal{B}\mathbf{x} = \lim_{k \to +\infty} \sum_{\alpha \in M_k} \mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha \mathbf{x}(\alpha). \tag{20}$$

Тому

$$\varphi(\mathcal{Q}_g \mathcal{B}\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in G} \varphi(\mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha \mathbf{x}(\alpha))$$

для всіх $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$, $\varphi \in S_g$ і $g \in G$. Отже,

$$\|\mathcal{B}\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})} \ge \sum_{\alpha \in G} \sup_{\|x\|_{E_g} = 1} |\varphi(\mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha x)| \tag{21}$$

для всіх $\varphi \in S_g$ і $g \in G$. Завдяки скінченній розмірності банахових просторів E_g, $g \in G$, та умові $\sup_{g \in G} \dim E_g < +\infty$ для кожного $g \in G$ існує скінченна множина $A_g \subset S_g$, число $\operatorname{card} A_g$ елементів якої не більше деякого не залежного від g числа ν, така, що

$$\min_{a \in A_g} \|\varphi - a\|_{E_g^*} \le \frac{1}{2} \quad \text{для всіх} \quad \varphi \in S_g.$$

Тут використано теорему 3. На підставі (21) отримуємо, що для кожного $g \in G$

$$\nu \|\mathcal{B}\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})} \geq \sum_{\alpha \in G} \sum_{a \in A_g} \sup_{\|x\|_{E_g}=1} |a(\mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha x)| \geq$$

$$\geq \sum_{\alpha \in G} \sup_{\|x\|_{E_g}=1} \max_{a \in A_g} |a(\mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha x)|. \tag{22}$$

Оскільки для всіх $\varphi \in S_g,\ x \in E_g\ \ (\|x\|_{E_g} = 1),\ g \in G$ і $\alpha \in G$

$$|\varphi(\mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha x)| \leq |\varphi(\mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha x) - a(\mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha x)| + |a(\mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha x)|,$$

де a — такий елемент множини A_g, що $\|\varphi - a\|_{E_g^*} \leq \dfrac{1}{2}$, то

$$|\varphi(\mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha x)| \leq \frac{1}{2}\, \|\mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha\|_{E_g} + \max_{a \in A_g} |a(\mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha x)|,$$

якщо $\varphi \in S_g$ і $x \in E_g\ \ (\|x\|_{E_g} = 1)$. Тому

$$\|\mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha\|_{L(E_\alpha, E_g)} = \sup_{\|x\|_{E_g}=1} \max_{\varphi \in S_g} |\varphi_g(\mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha x)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \|\mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha\|_{L(E_\alpha, E_g)} + \sup_{\|x\|_{E_g}=1} \max_{a \in A_g} |a(\mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha x)|,$$

тобто

$$\sup_{\|x\|_{E_g}=1} \max_{a \in A_g} |a(\mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha x)| \geq \frac{1}{2} \|\mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha\|_{L(E_\alpha, E_g)}$$

Отже, на підставі (22) для всіх $g \in G$

$$2\nu \|\mathcal{B}\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})} \geq \sum_{\alpha \in G} \|\mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha\|_{L(E_\alpha, E_g)}. \tag{23}$$

Звідси випливає (18), де

$$B(g,\alpha) = \mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha.$$

Рівність (19) випливає з (20) і (23).

Тепер покажемо, що оператори $B(g,\alpha),\ g,\alpha \in G$, визначаються єдиним чином.

Припустимо, що оператор $\mathcal{B}$ можна подати у вигляді

$$(\mathcal{B}\mathbf{x})(g) = \sum_{\alpha \in G} C(g,\alpha)\mathbf{x}(\alpha), \quad g \in G, \tag{24}$$

де $\mathbf{x} \in \mathfrak{M},\ C(g,\alpha) \in L(E_\alpha, E_g),\ g,\alpha \in G$, і

$$\sup_{g \in G} \sum_{\alpha \in G} \|C(g,\alpha)\|_{L(E_\alpha, E_g)} < +\infty. \tag{25}$$

Покажемо, що

$$C(g,\alpha) = B(g,\alpha), \quad g,\alpha \in G. \tag{26}$$

Зафіксуємо довільні елемент $\alpha \in G$ і ненульовий вектор $u \in E_\alpha$. Розглянемо елемент $\mathbf{z}$ простору $\mathfrak{M}$, що визначається рівністю

$$\mathbf{z}(g) = \begin{cases} u, & \text{якщо} \quad g = \alpha, \\ 0_g, & \text{якщо} \quad g \neq \alpha. \end{cases}$$

Із співвідношень (18), (19), (24) і (25) випливає, що

$$((\mathcal{B}\mathbf{z})(g) = B(g,\alpha)u = C(g,\alpha)u, \quad g \in G.$$

На підставі довільності вибору α і u виконується рівність (26).

Теорему 4 доведено.

Наслідок 1. *Якщо* $\sup_{g \in G} \dim E_g < +\infty$ *і* $\mathcal{B}$ — c*-неперервний елемент простору* $L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})$, *то*

$$\sup_{g\in G} \sum_{\alpha\in G} \|\mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha\|_{L(E_\alpha,E_g)} < +\infty$$

і

$$(\mathcal{B}\mathbf{x})(g) = \sum_{\alpha\in G} \mathcal{Q}_g \mathcal{B} \mathcal{P}_\alpha \mathbf{x}(\alpha), \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{M}, \quad g \in G.$$

Зауваження 2. У теоремі 4 співвідношення (18) не можна замінити співвідношенням

$$\sum_{\alpha\in G} \sup_{g\in G} \|B(g,\alpha)\|_{L(E_\alpha,E_g)} < +\infty, \tag{27}$$

що підтверджується наступним прикладом.

Приклад 1. Нехай $E_g = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел), $g \in G$, і $G = \mathbb{Z}$. Розглянемо для кожного цілого числа $k \geq 2$ функцію

$$a_k(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad n/k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{якщо} \quad n/k \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Оператор $\mathfrak{A} \in L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})$, що визначається рівністю

$$(\mathfrak{A}x)(n) = \sum_{k\geq 2} \frac{1}{k2^k} \left(\sum_{m=0}^{2^k-1} a_k(n-m)\, x\left(n + 2^k + m\right) \right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

c-неперервний, проте співвідношення (27) не задовольняє.

Зауваження 3. Якщо

$$\sup_{g\in G} \dim E_g = +\infty,$$

то співвідношення (18) може не виконуватися, що підтверджується таким прикладом.

Приклад 2. Будемо вважати, що $G = \mathbb{N}$. Кожному $n \in N$ співставимо банахів простір E_n функцій $x = x(m)$, $m \in \mathbb{N}$, зі значеннями в $\mathbb{R}$ таких, для кожної з яких $x(m) = 0$, якщо $m > n$, з нормою

$$\|x\|_{E_n} = \max_{1\leq m\leq n} |x(m)|.$$

Очевидно, $\dim E_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Тому $\sup_{n\in\mathbb{N}} \dim E_n = +\infty$. Також очевидно, що всі простори E_n, $n \in \mathbb{N}$, є підпросторами банахового простору $l_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Визначимо оператори $P_k\colon l_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to l_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, рівностями

$$(P_k x)(m) = \begin{cases} x(k), & \text{якщо} \quad m = k, \\ 0, & \text{якщо} \quad m \neq k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N},$$

де $x \in l_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Очевидно, що ці оператори лінійні, неперервні,

$$\|P_k\|_{L(l_\infty(\mathbb{N},\mathbb{R}), l_\infty(\mathbb{N},\mathbb{R}))} = 1, \quad k \geq 1,$$

і

$$\|P_k\|_{L(E_k, E_n)} = 1, \quad 1 \leq k \leq n. \tag{28}$$

Аналогічно, як і в п. 1, розглянемо банахів простір $\mathfrak{M}$ елементів $\mathbf{y} = \mathbf{y}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, для яких $\mathbf{y}(n) \in E_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, з нормою $\|\mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mathbf{y}(n)\|_{E_n}$. Визначимо оператор $\mathcal{B}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ рівностями

$$(\mathcal{B}\mathbf{y})(n) = \sum_{k=n}^{2n-1} P_{k+1-n}\mathbf{y}(k), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Легко перевірити, що цей оператор лінійний, неперервний і c-неперервний. Для нього

$$\|\mathcal{B}\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})} = 1,$$

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \|P_{k+1-n}\|_{L(E_k, E_n)} = n$$

завдяки (28) і, отже,

$$\sup_{n\geq 1} \sum_{k=n}^{2n-1} \|P_{k+1-n}\|_{L(E_k, E_n)} = +\infty,$$

тобто для $\mathcal{B}$ співвідношення (18) не виконується.

За допомогою теорем 2 і 4 отримуємо таке твердження.

Теорема 5. *Нехай* $\sup_{g\in G} \dim E_g < +\infty$ *і оператори* $A(g, \alpha) \in L(E_\alpha, E_g)$, $g, \alpha \in G$, *задовольняють співвідношення*

$$\sup_{g\in G} \sum_{\alpha\in G} \|A(g, \alpha)\|_{L(E_\alpha, E_g)} < +\infty. \tag{29}$$

Тоді:

1) якщо оператор

$$(\mathcal{A}\mathbf{x})(g) = \sum_{\alpha\in G} A(g, \alpha)\mathbf{x}(\alpha), \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{M}, \quad g \in G, \tag{30}$$

має неперервний обернений $\mathcal{A}^{-1}$, *то існують оператори* $C(g, \alpha) \in L(E_\alpha, E_g)$, $g, \alpha \in G$, *для яких*

$$\sup_{g \in G} \sum_{\alpha \in G} \|C(g,\alpha)\|_{L(E_\alpha, E_g)} < +\infty, \tag{31}$$

$$(\mathcal{A}^{-1}\mathbf{y})(g) = \sum_{\alpha \in G} C(g,\alpha)\mathbf{y}(\alpha), \ \ \mathbf{y} \in \mathfrak{M}, \ g \in G, \tag{32}$$

і

$$\sum_{\alpha \in G} A(g,\alpha)C(\alpha,\beta) = \sum_{\alpha \in G} C(g,\alpha)A(\alpha,\beta) =$$

$$= \begin{cases} I_\beta, & \text{якщо} \quad g = \beta, \\ O_{g,\beta}, & \text{якщо} \quad g \neq \beta, \end{cases} \tag{33}$$

2) якщо існують оператори $C(g,\alpha) \in L(E_\alpha, E_g)$, $g, \alpha \in G$, для яких виконуються співвідношення (31) і (33), то оператор $\mathcal{A}$ має неперервний обернений оператор $\mathcal{A}^{-1}$, що подається за допомогою співвідношення (32).

Доведення. Завдяки (29) оператор $\mathcal{A}$ c-неперервний. Тому за теоремою 2 оператор $\mathcal{A}^{-1}$ також є c-неперервним. Тоді на підставі теореми 4 існують лінійні неперервні оператори $C(g,\alpha)\colon E_\alpha \to E_g$, $g, \alpha \in G$, для яких виконується співвідношення (31) і оператор $\mathcal{A}^{-1}$ подається за допомогою співвідношення (32). На підставі (29)–(32) для кожного $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ виконуються співвідношення

$$\mathbf{y}(g) = \big(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\mathbf{y}\big)(g) =$$

$$= \sum_{\alpha \in G} A(g,\alpha) \big(\mathcal{A}^{-1}\mathbf{y}\big)(\alpha) =$$

$$= \sum_{\alpha \in G} A(g,\alpha) \sum_{\beta \in G} C(\alpha,\beta)\mathbf{y}(\beta) =$$

$$= \sum_{\beta \in G} \left(\sum_{\alpha \in G} A(g,\alpha)C(\alpha,\beta) \right) \mathbf{y}(\beta), \quad g \in G. \tag{34}$$

Зафіксуємо довільне $\beta \in G$. Поклавши в (34)

$$\mathbf{y}(g) = \begin{cases} u, & \text{якщо} \quad g = \beta, \\ 0_g, & \text{якщо } g \neq \beta, \end{cases}$$

де u — довільний елемент простору E_β, отримаємо

$$\sum_{\alpha \in G} A(g,\alpha)C(\alpha,\beta)u = \begin{cases} u, & \text{якщо} \quad g = \beta, \\ 0_g, & \text{якщо} \quad g \neq \beta. \end{cases}$$

Звідси з урахуванням довільності вектора $u \in E_\beta$ випливає, що

$$\sum_{\alpha\in G} A(g,\alpha)C(\alpha,\beta) = \begin{cases} I_\beta, & \text{якщо} \quad g=\beta, \\ O_{g,\beta}, & \text{якщо} \quad g\neq\beta. \end{cases}$$

Аналогічним чином отримуємо

$$\sum_{\alpha\in G} C(g,\alpha)A(\alpha,\beta) = \begin{cases} I_\beta, & \text{якщо} \quad g=\beta, \\ O_{g,\beta}, & \text{якщо} \quad g\neq\beta. \end{cases}$$

Далі переконаємося в правильності п. 2 теореми 5. За допомогою операторів $C(g,\alpha)$, $g,\alpha\in G$, для яких виконується співвідношення (31), визначимо лінійний неперервний оператор $\mathcal{C}\colon \mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ формулою

$$(\mathcal{C}\mathbf{x})(g) = \sum_{\alpha\in G} C(g,\alpha)\mathbf{x}(\alpha), \quad \mathbf{x}\in\mathfrak{M}, \quad g\in G.$$

Завдяки (29), (30), (31) і (33) виконуються співвідношення

$$(\mathcal{A}\mathcal{C}\mathbf{y})(g) = \sum_{\alpha\in G} A(g,\alpha)\sum_{\beta\in G} C(\alpha,\beta)\mathbf{y}(\beta) =$$

$$= \sum_{\beta\in G}\left(\sum_{\alpha\in G} A(g,\alpha)C(\alpha,\beta)\right)\mathbf{y}(\beta) = \mathbf{y}(g), \quad \mathbf{y}\in\mathfrak{M}, \quad g\in G,$$

і

$$(\mathcal{C}\mathcal{A}\mathbf{y})(g) = \sum_{\alpha\in G} C(g,\alpha)\sum_{\beta\in G} A(\alpha,\beta)\mathbf{y}(\beta) =$$

$$= \sum_{\beta\in G}\left(\sum_{\alpha\in G} C(g,\alpha)A(\alpha,\beta)\right)\mathbf{y}(\beta) = \mathbf{y}(g), \quad \mathbf{y}\in\mathfrak{M}, \quad g\in G.$$

Отже, $\mathcal{A}\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{A} = I$, тобто оператор $\mathcal{A}$ має обернений оператор $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{C}$. Цей оператор неперервний на підставі (31).

Теорему 5 доведено.

3.4. Експоненціальні оцінки норм значень функцій, що зображають c-неперервні оператори. Наведемо твердження про оцінку норм значень операторно-значних функцій, за допомогою яких подаються c-неперервні оператори.

Теорема 6. *Нехай*

$$\sup_{g\in G}\dim E_g < +\infty,$$

лінійний неперервний оператор $\mathcal{B}\colon\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ має обернений неперервний оператор $\mathcal{B}^{-1}$ і для деяких чисел $q\in(0,1)$, $N\geq 1$ і зображення (4) множини G виконується співвідношення

$$\|\mathcal{Q}_{g_n}\mathcal{B}\mathcal{P}_{g_m}\|_{L(E_{g_m},E_{g_n})} \leq Nq^{|n-m|}, \quad n,m\in\mathbb{H}. \tag{35}$$

Тоді оператор $\mathcal{B}^{-1}\colon\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ є c-неперервним і для деяких чисел $q_1\in(0,1)$ і $N_1\geq 1$ виконується співвідношення

$$\|\mathcal{Q}_{g_n}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{P}_{g_m}\|_{L(E_{g_m},E_{g_n})} \leq N_1q_1^{|n-m|}, \quad n,m\in\mathbb{H}. \tag{36}$$

Доведення. Зазначимо, що завдяки (35) оператор $\mathcal{B}$ є c-неперервним. Аналогічну властивість має й оператор $\mathcal{B}^{-1}$ на підставі теореми 2.

Зафіксуємо довільне число $\varepsilon \in \big(0, q^{-1}-1\big)$ і розглянемо оператори $\mathcal{B}_{p,\delta} \in L(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$, $p \in \{1,-1\},\ \delta \in (0,\varepsilon]$, що визначаються співвідношеннями

$$(\mathcal{B}_{p,\delta}\mathbf{x})(g_n) = \sum_{m\in\mathbb{H}} \mathcal{Q}_{g_n}\mathcal{B}\mathcal{P}_{g_m}(1+\delta)^{p(n-m)}\mathbf{x}(g_m), \quad n \in \mathbb{H}, \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{M}. \tag{37}$$

Зазначимо, що згідно з наслідком 1

$$(\mathcal{B}\mathbf{x})(g_n) = \sum_{m\in\mathbb{H}} \mathcal{Q}_{g_n}\mathcal{B}\mathcal{P}_{g_m}\mathbf{x}(g_m), \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{M}, \quad n \in \mathbb{H}. \tag{38}$$

Із співвідношення (35), (37), (38) та нерівності $(1+\varepsilon)q < 1$ випливає, що оператори $\mathcal{B}_{1,\delta}$ і $\mathcal{B}_{-1,\delta}$ c-неперервні і

$$\lim_{\delta\to 0} \|\mathcal{B}_{p,\delta} - \mathcal{B}\|_{L(\mathfrak{M},\mathfrak{M})} = 0, \quad p \in \{-1,1\}.$$

Тому на підставі оборотності оператора $\mathcal{B}$ існує число $\gamma \in (0,\varepsilon)$ таке, що оператори $\mathcal{B}_{p,\gamma},\ p \in \{-1,1\}$, також мають обернені неперервні оператори $\mathcal{B}_{p,\gamma}^{-1},\ p \in \{-1,1\}$, які c-неперервні за теоремою 2. За наслідком 1

$$\max_{p\in\{-1,1\}} \sup_{n\in\mathbb{H}} \sum_{m\in\mathbb{H}} \|\mathcal{Q}_{g_n}\mathcal{B}_{p,\gamma}^{-1}\mathcal{P}_{g_m}\|_{L(E_{g_m},E_{g_n})} < +\infty \tag{39}$$

і

$$\left(\mathcal{B}_{p,\gamma}^{-1}\mathbf{y}\right)(g_n) = \sum_{m\in\mathbb{H}} \mathcal{Q}_{g_n}\mathcal{B}_{p,\gamma}^{-1}\mathcal{P}_{g_m}\mathbf{y}(\alpha_m), \quad n \in \mathbb{H}, \tag{40}$$

для всіх $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ і $p \in \{-1,1\}$. Аналогічно

$$\left(\mathcal{B}^{-1}\mathbf{y}\right)(g_n) = \sum_{m\in\mathbb{H}} \mathcal{Q}_{g_n}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{P}_{g_m}\mathbf{y}(g_m), \quad n \in \mathbb{H}, \tag{41}$$

і

$$\sup_{n\in\mathbb{H}} \sum_{m\in\mathbb{H}} \|\mathcal{Q}_{g_n}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{P}_{g_m}\|_{L(E_{g_m},E_{g_n})} < +\infty.$$

Розглянемо довільні число $n_0 \in \mathbb{H}$ і ненульовий вектор $u \in E_{g_{n_0}}$. Також розглянемо елементи $\mathbf{y}_{n_0} \in \mathfrak{M}$ і $\mathbf{f}_{p,n_0} \in \mathfrak{M},\ p \in \{-1,1\}$, що визначаються рівностями

$$\mathbf{y}_{n_0}(g_n) = \begin{cases} u, & \text{якщо} \quad n = n_0, \\ 0_{g_n}, & \text{якщо} \quad n \neq n_0, \end{cases}$$

і

$$\mathbf{f}_{p,n_0}(g_n) = (1+\gamma)^{pn}\mathbf{y}_{n_0}(g_n), \quad p \in \{-1,1\}.$$

Покажемо, що для кожного $n \in \mathbb{H}$

$$(1+\gamma)^{pn}\left(\mathcal{B}^{-1}\mathbf{f}_{-p,n_0}\right)(g_n) = (\mathcal{B}_{p,\gamma}^{-1}\mathbf{y}_{n_0})(g_n), \quad p \in \{-1,1\}. \tag{42}$$

Використаємо співвідношення (37). Позначивши ліву частину (42) через $\mathbf{z}(g_n)$, отримаємо

$$(\mathcal{B}_{p,\gamma}\mathbf{z})(g_n) = \sum_{m\in\mathbb{H}} \mathcal{Q}_{g_n}\mathcal{B}\mathcal{P}_{\alpha_m}(1+\gamma)^{p(n-m)}\mathbf{z}(\alpha_m) =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{H}} \mathcal{Q}_{g_n}\mathcal{B}\mathcal{P}_{g_m}(1+\gamma)^{p(n-m)}(1+\gamma)^{pm}(\mathcal{B}^{-1}\mathbf{f}_{-p,n_0})(g_m) =$$

$$= (1+\gamma)^{pn}\sum_{m\in\mathbb{H}} \mathcal{Q}_{g_n}\mathcal{B}\mathcal{P}_{g_m}(\mathcal{B}^{-1}\mathbf{f}_{-p,n_0})(g_m) =$$

$$= (1+\gamma)^{pn}(\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1}\mathbf{f}_{-p,n_0})(g_n) = (1+\gamma)^{pn}\mathbf{f}_{-p,n_0}(g_n) =$$

$$= \mathbf{y}_{n_0}(g_n), \quad p\in\{-1,1\}, \quad n\in\mathbb{H}.$$

З останньої рівності з урахуванням оператора $\mathcal{B}_{p,\gamma}$ та співвідношення

$$(\mathcal{B}_{p,\gamma}\mathcal{B}_{p,\gamma}^{-1}\mathbf{y}_{n_0})(g_n) = \mathbf{y}_{n_0}(g_n), \quad n\in\mathbb{H},$$

випливає (42). З означення елементів $\mathbf{y}_{n_0}, \mathbf{f}_{p,n_0} \in \mathfrak{M}$ та співвідношень (40) – (42) випливає, що

$$(1+\gamma)^{pn}\mathcal{Q}_{g_n}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{P}_{g_{n_0}}(1+\gamma)^{-pn_0}u = \mathcal{Q}_{g_n}\mathcal{B}_{p,\gamma}^{-1}\mathcal{P}_{g_{n_0}}u$$

для всіх $p\in\{-1,1\}$ і $n\in\mathbb{H}$. Тому на підставі довільності числа $n_0\in\mathbb{H}$ та вектора $u\in E_{g_{n_0}}$

$$\mathcal{Q}_{g_n}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{P}_{g_m} = (1+\gamma)^{p(m-n)}\mathcal{Q}_{g_n}\mathcal{B}_{p,\gamma}^{-1}\mathcal{P}_{g_m}, \quad p\in\{-1,1\}, \quad n,m\in\mathbb{H}.$$

Звідси з урахуванням (39) маємо (36), де

$$N_1 = \max_{p\in\{-1,1\}}\sup_{n\in\mathbb{H}}\sum_{m\in\mathbb{H}}\|\mathcal{Q}_{g_n}\mathcal{B}_{p,\gamma}^{-1}\mathcal{P}_{g_m}\|_{L(E_{g_m},E_{g_n})}$$

і

$$q_1 = (1+\gamma)^{-1}.$$

Теорему 6 доведено.

4. Доведення теореми 1. Завдяки (2) оператор $\mathcal{A}$, що визначається співвідношенням (3), неперервний і c-неперервний. На підставі виконання умови A та теореми Банаха про обернений оператор [1] цей оператор має неперервний обернений $\mathcal{A}^{-1}$. За теоремою 2 оператор $\mathcal{A}^{-1}$ c-неперервний. Тому до оператора $\mathcal{A}$ можна застосувати теореми 4 і 5. Завдяки цим теоремам і тому, що розв'язок рівняння (1) можна подати за допомогою рівності $\mathbf{x} = \mathcal{A}^{-1}\mathbf{y}$, справджується твердження п. 1 теореми 1. Твердження п. 2 теореми 1 випливає з наслідку 1 і теореми 6.

5. Додаткові зауваження та посилання на літературу. Теорема 1 про зображення обмежених розв'язків дискретного рівняння (1) та теореми 4 і 5 про зображення лінійних c-неперервних операторів, що діють у просторі $\mathfrak{M}$, є новими. Ці твердження аналогічні відповідним твердженням з роботи [4], присвяченої лінійним дискретним рівнянням у випадку, коли банахові простори E_g, $g\in G$, збігаються з деяким скінченновимірним простором E. Основний у статті функціональний простір $\mathfrak{M}$, породжений просторами E_g, $g\in G$, у випадку $G=\mathbb{Z}$ також використовувався для дослідження експоненціальної дихотомії розв'язків різницевих рівнянь [5].

Теорема 3 про ε-сітки сфер одиничного радіуса, що виконує в даній статті допоміжну функцію, також є новою.

Теорема 6 про експоненціальні оцінки норм операторних функцій, за допомогою яких подаються c-неперервні оператори та обмежені розв'язки дискретного рівняння (1), наводиться вперше.

Дослідженню задач, пов'язаних із існуванням обмежених розв'язків дискретних рівнянь, присвячено багато публікацій. Відмітимо частину з них. Умови розв'язності різницевих рівнянь у просторах обмежених послідовностей наведено в [22 – 24]. Теорію Фавара – Амеріо для різницевих та дискретних рівнянь без H-класів цих рівнянь побудовано в [25 – 31].

Література

1. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища шк., 1974. – 456 с.
2. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. – М.: Физматгиз, 1960. – 472 с.
3. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 311 с.
4. *Слюсарчук В. Е.* О представлении ограниченных решений линейных дискретных уравнений // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 2. – С. 210 – 215.
5. *Слюсарчук В. Е.* Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 1. – С. 109 – 115.
6. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269 – 274.
7. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1981. – **116**, № 4. – С. 483 – 501.
8. *Слюсарчук В. Е.* Интегральное представление c-непрерывных линейных операторов // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 8. – С. 34 – 37.
9. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. – 1986. – **130**, № 1. – С. 86 – 104.
10. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 262 – 267.
11. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 5. – С. 660 – 662.
12. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 201 – 205.
13. *Слюсарчук В. Ю.* Узагальнення теореми Мухамадієва про оборотність функціональних операторів у просторі обмежених функцій // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 3. – С. 398 – 412.
14. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Нелін. коливання. – 2009. – **12**, № 3. – С. 109 – 115.
15. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1541 – 1556.
16. *Слюсарчук В. Е.* Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. – 2010. – **201**, № 8. – С. 103 – 126.
17. *Bruno G., Pankov A., Tverdokhleb Yu.* On almost-periodic operators in the spaces of sequences // Acta Appl. Math. – 2001. – **4**, № 1-3. – P. 153 – 167.
18. *Белицкий Г. Р., Любич Ю. И.* Нормы матриц и их приложения. – К.: Наук. думка, 1984. – 160 с.

19. *Пизо Ш., Заманский М.* Курс математики. Алгебра и анализ. – М.: Наука, 1971. – 656 с.

20. *Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления // М.: Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. – 1987. – **14**. – С. 5 – 101.

21. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.

22. *Слюсарчук В. Ю.* Експоненціально дихотомічні різницеві рівняння з неліпшицевими збуреннями // Нелін. коливання. – 2011. – **14**, № 4. – С. 536 – 555.

23. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локального лінійного наближення нелінійних різницевих операторів слабко регулярними операторами // Нелін. коливання. – 2012. – **15**, № 1. – С. 112 – 126.

24. *Слюсарчук В. Ю.* Нелінійні різницеві рівняння у просторах обмежених двосторонніх послідовностей // Нелін. коливання. – 2012. – **15**, № 4. – С. 528 – 538.

25. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом // Нелін. коливання. – 2013. – **16**, № 3. – С. 416 – 425.

26. *Slyusarchuk V. Yu.* Almost periodic solutions of difference equations with discrete argument on metric space // Miskolc Math. Notes. – 2014. – **15**, Issue 1. – P. 211 – 215.

27. *Слюсарчук В. Е.* Условия существования почти периодичности решений нелинейных разностных уравнений в банаховом пространстве // Мат. заметки. – 2015. – **97**, № 2. – С. 277 – 285.

28. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні та періодичні розв'язки різницевих рівнянь у метричному просторі // Нелін. коливання. – 2015. – **18**, № 1. – С. 112 – 119.

29. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні розв'язки функціональних рівнянь // Нелін. коливання. – 2016. – **19**, № 1. – С. 142 – 148.

30. *Слюсарчук В. Е.* Почти периодические решения дискретных уравнений // Изв. РАН. Сер. мат. – 2016. – **80**, № 2. – С. 125 – 138.

31. *Слюсарчук В. Е.* К теории Фавара для функциональных уравнений // Сиб. мат. журн. – 2017. – **58**, № 1. – С. 206 – 218.

Одержано 02.07.2017