УДК 517.929.2

ПРО ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

М. Ф. Городній, В. П. Кравець

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
вул. Володимирська, 64, Київ, 01033, Україна
e-mail: gorodnii@univ.kiev.ua,
toriiawik@ukr.net

We study the problem of existence of a unique solution bounded on $\mathbb{Z}$ of a linear second-order difference equation with a jump of the operator coefficient in a finite-dimensional Banach space.

Досліджується питання про існування єдиного обмеженого на $\mathbb{Z}$ розв'язку лінійного різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта у скінченновимірному банаховому просторі.

Нехай X — m-вимірний комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$; I, O — одиничний та нульовий оператори в X; A, B — фіксовані лінійні оператори в X.

Розглянемо різницеве рівняння

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = F_n x_n + y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

у якому $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — задана, а $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — шукана послідовності елементів простору X, $F_n = A$, $n \geq 1$, $F_n = B$, $n \leq 0$.

Мета цієї статті — отримати необхідні та достатні умови для операторів A, B, за яких виконується така умова.

Умова обмеженості. Для довільної обмеженої в X послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі X.

Аналогічне питання для різницевого рівняння першого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта досліджено в [1]. Випадок, коли матриці операторів A, B зводяться до діагонального вигляду, розглянуто в [2]. Про різницеві рівняння другого порядку зі сталими операторними коефіцієнтами та їх застосування — див. [3, с. 17; 4] та наведені там посилання.

Допоміжні твердження. Покладемо

$$X^2 = \left\{ \overline{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \;\middle|\; x^{(1)}, x^{(2)} \in X \right\}.$$

Тоді X^2 — $2m$-вимірний комплексний банахів простір із покоординатним додаванням і множенням на скаляр та нормою

$$\|\overline{x}\|_* = \|x^{(1)}\| + \|x^{(2)}\|, \quad \overline{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \in X^2.$$

Якщо E, F, G, H — лінійні оператори в X, то, як і для випадку числових матриць,

$T = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ задає лінійний оператор в X^2 за правилом

$$T\overline{x} = \begin{pmatrix} Ex^{(1)} + Fx^{(2)} \\ Gx^{(1)} + Hx^{(2)} \end{pmatrix}, \qquad \overline{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \in X^2.$$

Нехай

$$T_A = \begin{pmatrix} A + 2I & -I \\ I & O \end{pmatrix}, \qquad T_B = \begin{pmatrix} B + 2I & -I \\ I & O \end{pmatrix},$$

$\sigma(T_A)$ — набір власних чисел оператора T_A, $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

У подальшому використовуються такі твердження.

Лема 1. *Для оператора T_A існує обернений оператор*

$$T_A^{-1} = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & A + 2I \end{pmatrix}.$$

Лема 2. *Число $\lambda \neq 0$ є власним числом T_A, якому відповідає власний вектор $\begin{pmatrix} \lambda v \\ v \end{pmatrix}$, тоді і тільки тоді, коли $\lambda + \dfrac{1}{\lambda} - 2$ є власним числом A, якому відповідає власний вектор v.*

Лема 3. *Якщо $\lambda \in \sigma(T_A)$ і йому відповідає власний вектор $\begin{pmatrix} \lambda v \\ v \end{pmatrix}$, то $\lambda \neq 0$, $\dfrac{1}{\lambda} \in \sigma(T_A)$ і йому відповідає власний вектор $\begin{pmatrix} v \\ \lambda v \end{pmatrix}$.*

Лема 4. *$\sigma(T_A) \cap S = \varnothing$ тоді і тільки тоді, коли $\sigma(A) \cap [-4; 0] = \varnothing$.*

Лема 5. *Рівняння $\lambda + \dfrac{1}{\lambda} - 2 = \mu$ має при заданому $\mu \in \mathbb{C}$ два корені, один із яких лежить усередині кола S, а інший зовні S, тоді і тільки тоді, коли $\mu \notin [-4; 0]$.*

Доведення лем 1 – 5 тривіальні і тут не наводяться.

Лема 6. *Якщо μ — власне число оператора A, якому відповідає клітина Жордана порядку p, і $\lambda + \dfrac{1}{\lambda} - 2 = \mu$, то власним числам λ, $\dfrac{1}{\lambda}$ оператора T_A відповідають клітини Жордана порядку, не меншого за p.*

Доведення. Із умов леми випливає (див., наприклад [5] (§ 19)), що в X існує такий набір лінійно незалежних векторів $e_1, e_2, \ldots, e_p$, що

$$(A - \mu I)e_1 = \bar{0}, \qquad (A - \mu I)e_k = e_{k-1}, \quad 2 \leq k \leq p. \tag{2}$$

Внаслідок леми 2 $(T_A - \lambda E)\overline{v}_1 = \widetilde{0}$, де E — одиничний оператор в X^2,

$$\widetilde{0} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \quad \overline{v}_1 = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix},$$

$v_1^{(1)} = \lambda e_1$, $v_2^{(1)} = e_1$. Знайдемо такі вектори $\overline{v}_k$, $2 \leq k \leq p$, що

$$\forall 1 \leq k \leq p - 1 \colon (T_A - \lambda E)\overline{v}_{k+1} = \overline{v}_k. \tag{3}$$

Оскільки при фіксованому $1 \leq k \leq p - 1$ рівність (3) покоординатно записується у вигляді

$$(A - \mu I)v_1^{(k+1)} = v_1^{(k)} - \frac{1}{\lambda}\, v_2^{(k)},$$

$$v_1^{(k+1)} - \lambda v_2^{(k+1)} = v_2^{(k)},$$

маємо

$$(A-\mu I)v_1^{(k+1)} = v_1^{(k)} - \frac{1}{\lambda^2}\,v_1^{(k)} + \frac{1}{\lambda^3}\,v_1^{(k-1)} - \ldots + \frac{(-1)^k}{\lambda^{k+1}}\,v_1^{(1)}, \tag{4}$$

$$v_2^{(k+1)} = \frac{1}{\lambda}\,v_1^{(k+1)} - \frac{1}{\lambda^2}\,v_1^{(k)} + \ldots + \frac{(-1)^k}{\lambda^{k+1}}\,v_1^{(1)}. \tag{5}$$

Зокрема, при $k=1$ рівність (4) записується у вигляді

$$(A-\mu I)v_1^{(2)} = v_1^{(1)} - \frac{1}{\lambda^2}\,v_1^{(1)} = \left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)\lambda e_1,$$

а отже, з урахуванням (2) можна покласти

$$v_1^{(2)} = \lambda\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)e_2. \tag{6}$$

При цьому з (5) матимемо

$$v_2^{(2)} = \frac{1}{\lambda}\,v_1^{(2)} - \frac{1}{\lambda^2}\,v_1^{(1)} = \left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)e_2 - \frac{1}{\lambda}e_1. \tag{7}$$

Отже, шуканий вектор $\overline{v}_2$ існує, і його координати є лінійними комбінаціями векторів $e_1,\ e_2$.

Оскільки при фіксованому $2 \le k \le p-1$ у правій частині (4) матимемо лінійну комбінацію векторів $e_1, e_2, \ldots, e_k$, вектори $\overline{v}_{k+1}$ послідовно визначаються за допомогою співвідношень (4), (5) для $k = 3, 4, \ldots, p-1$. Тому внаслідок рівностей (3) оператор T_A має клітину Жордана порядку, не меншого за p.

Відзначимо, що внаслідок співвідношень (4) – (7) для всіх допустимих k

$$v_2^{(k+1)} = \left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)^k e_{k+1} + h_k(\lambda; e_1, e_2, \ldots, e_k), \tag{8}$$

де $h_k(\lambda; e_1, e_2, \ldots, e_k)$ — деяка лінійна комбінація базисних векторів $e_1, e_2, \ldots, e_k$.

Щодо власного числа $\dfrac{1}{\lambda}$ міркування аналогічні.

Лему 6 доведено.

Позначимо через $J(\mu, p)$ клітину Жордана порядку p з числом μ на головній діагоналі.

Лема 7. *Нехай $\sigma(A) \cap [-4; 0] = \varnothing$. Тоді кожній клітині Жордана $J(\mu, p)$ матриці оператора A відповідають дві клітини Жордана $J(\lambda, p)$, $J\left(\dfrac{1}{\lambda}, p\right)$ матриці оператора T_A, де $\mu = \lambda + \dfrac{1}{\lambda} - 2$.*

Доведення. З лем 2, 3, 6 випливає, що коли матриця оператора A має клітину Жордана $J(\mu, p)$ і $\mu = \lambda + \dfrac{1}{\lambda} - 2$, то матриця оператора T_A має клітини Жордана $J(\lambda, q_1)$, $J\left(\dfrac{1}{\lambda}, q_2\right)$, де $q_1 \ge p$, $q_2 \ge p$. Якщо, від супротивного, для деякої $J(\mu, p)$ $q_1 > p$ або $q_2 > p$, то внаслідок скінченновимірності простору X твердження леми 6 не може виконуватися для кожної з клітин Жордана матриці оператора T_A.

Лему 7 доведено.

Наслідок 1. *Якщо $\sigma(A) \cap [-4; 0] = \varnothing$, то підпростори $X_-^2(A)$, $X_+^2(A)$ мають розмірності m, а також жорданова нормальна форма матриці оператора T_A містить пари клітин Жордана, вказаних у лемі 7.*

Лема 8. *Для того щоб умова обмеженості виконувалася для рівняння (1), необхідно і достатньо, щоб ця умова виконувалася у просторі X^2 для різницевого рівняння*

$$\overline{x}_{n+1} = G_n\overline{x}_n + \overline{y}_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

в якому $G_n = T_A,\ n \geq 1,\ G_n = T_B,\ n \leq 0.$

Доведення леми 8 стандартне, і у даній статті не наводиться.

Нехай T — такий лінійний оператор в X^2, що $\sigma(T) \cap S = \varnothing$. Визначимо простори $X^2_-(T),\ X^2_+(T)$ за таким правилом. Якщо $\sigma(T)$ лежить усередині кола S, то $X^2_-(T) = X^2$, $X^2_+(T) = \{\overline{0}\}$. Якщо $\sigma(T)$ лежить зовні S, то $X^2_-(T) = \{\overline{0}\},\ X^2_+(T) = X^2$. Якщо ж $\sigma(T)$ має непорожні перетини з множинами $S_- = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ і $S_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$, то зафіксуємо такий базис $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k,\ \overline{f}_{k+1}, \overline{f}_{k+2}, \ldots, \overline{f}_{2m}$ у просторі X^2, в якому матриця оператора T має жорданову нормальну форму, причому $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k$ відповідають клітини Жордана з власними числами із S_-, а $\overline{f}_{k+1}, \overline{f}_{k+2}, \ldots, \overline{f}_{2m}$ — клітини Жордана з власними числами із S_+. Тоді $X^2_-(T),\ X^2_+(T)$ — лінійні оболонки векторів $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k$ та $\overline{f}_{k+1}, \overline{f}_{k+2}, \ldots, \overline{f}_{2m}$ відповідно.

Внаслідок теореми 1 роботи [1] справджується таке твердження.

Теорема 1. *Для різницевого рівняння (9) умова обмеженості виконується тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

(i) $\sigma(T_A) \cap S = \varnothing,\ \sigma(T_B) \cap S = \varnothing$;

(ii) $X^2 = X^2_-(T_A) \dot{+} X^2_+(T_B)$, *тобто* X^2 *є прямою сумою* $X^2_-(T_A)$ *та* $X^2_+(T_B)$.

Основний результат. Перевірка умови (ii) теореми 1 є нетривіальною задачею, розв'язання якої потребує, взагалі кажучи, громіздких обчислень. Наступна теорема, яка є основним результатом цієї статті, містить достатні умови на оператори $A,\ B$, при виконанні яких справджується імплікація (i) $\Rightarrow$ (ii) для умов теореми 1.

Теорема 2. *Нехай виконується умова (i) теореми 1, а також матриці операторів* $A,\ B$ *мають жорданову нормальну форму в одному і тому ж базисі* $e_1, e_2, \ldots, e_m$ *(тут також суттєвий однаковий порядок базисних векторів для* A *і* B*). Тоді виконується умова (ii) теореми 1.*

Доведення. Розглянемо випадок, коли матриця оператора A має дві клітини Жордана порядків $p_1,\ p_2,\ p_1 + p_2 = m$, а матриця B — три клітини порядків $q_1,\ q_2 = 1,\ q_3$, $q_1 + 1 + q_3 = m$, причому $p_1 > q_1 + 1$. У загальному випадку міркування аналогічні.

Нехай $\mu_1,\ \mu_2$ та $z_1,\ z_2,\ z_3$ — власні числа операторів $A,\ B$, які відповідають їхнім клітинам Жордана. Тоді

$$(A - \mu_1 I)e_1 = \bar{0}, \qquad (A - \mu_1 I)e_k = e_{k-1}, \quad 2 \leq k \leq p_1;$$

$$(A - \mu_2 I)e_{p_1+1} = \bar{0}, \qquad (A - \mu_2 I)e_k = e_{k-1}, \quad p_1 + 2 \leq k \leq m;$$

$$(B - z_1 I)e_1 = \bar{0}, \qquad (B - z_1 I)e_k = e_{k-1}, \quad 2 \leq k \leq q_1;$$

$$(B - z_2 I)e_{q_1+1} = \bar{0};$$

$$(B - z_3 I)e_{q_1+2} = \bar{0}, \qquad (B - z_3 I)e_k = e_{k-1}, \quad q_1 + 3 \leq k \leq m.$$

Зафіксуємо такі числа $\lambda_k,\ k = 1, 2,\ \nu_k,\ k = 1, 2, 3$, що для кожного k $|\lambda_k| < 1,\ \mu_k = \lambda_k + \dfrac{1}{\lambda_k} - 2,\ |\nu_k| < 1,\ z_k = \nu_k + \dfrac{1}{\nu_k} - 2.$

Скористаємося лемами 6, 7 і виберемо в X^2 вектори $\overline{v}_1 = \overline{v}_1(e_1), \ldots,\ \overline{v}_{p_1} = \overline{v}_{p_1}(e_1)$, $\overline{v}_{p_1+1} = \overline{v}_{p_1+1}(e_{p_1+1}), \ldots,\ \overline{v}_{p_1+p_2} = \overline{v}_{p_1+p_2}(e_{p_1+1})$, які задають клітини Жордана оператора

T_A, що відповідають власним числам $\lambda_1,\ \lambda_2$ і будуються за формулами (4), (5) за власним вектором e_1 і приєднаними векторами $e_2,\ldots,e_{p_1}$ та власним вектором e_{p_1+1} і приєднаними векторами $e_{p_1+2},\ldots,e_{p_1+p_2}$ оператора A, а також вектори $\overline{w}_1=\overline{w}_1(e_1),\ldots,\overline{w}_{q_1}=\overline{w}_{q_1}(e_1)$, $\overline{w}_{q_1+1}=\overline{w}_{q_1+1}(e_{q_1+1}),\ \overline{w}_{q_1+2}=\overline{w}_{q_1+2}(e_{q_1+2}),\ldots,\overline{w}_{q_1+1+q_3}=\overline{w}_{q_1+1+q_3}(e_{q_1+2})$, які аналогічно задають клітини Жордана оператора T_B, що відповідають власним числам $\dfrac{1}{\nu_1},\ \dfrac{1}{\nu_2},\ \dfrac{1}{\nu_3}$.

Внаслідок леми 7 простори $X_-^2(T_A),\ X_+^2(T_B),\ m$-вимірні і є лінійними оболонками векторів $\overline{v}_1,\ldots,\overline{v}_{p_1+p_2}$ і $\overline{w}_1,\ldots,\overline{w}_{q_1+1+q_3}$ відповідно.

Отже, для виконання умови (ii) теореми 1 досить перевірити, що рівність

$$\sum_{k=1}^{p_1}\delta_k\overline{v}_k(e_1)+\sum_{k=p_1+1}^{m}\delta_k\overline{v}_k(e_{p_1+1})=$$

$$=\sum_{k=1}^{q_1}\sigma_k\overline{w}_k(e_1)+\sigma_{q_1+1}\overline{w}_{q_1+1}(e_{q_1+1})+\sum_{k=q_1+2}^{m}\sigma_k\overline{w}_k(e_{q_1+2}) \tag{10}$$

виконується тільки при $\delta_1=\ldots=\delta_m=\sigma_1=\ldots=\sigma_m=0$.

Відзначимо, що для довільних $i=1,2,\ j=1,2,3$

$$T_A-\lambda_iE=T_B-\frac{1}{\nu_j}\,E+\begin{pmatrix}A-B+T_{i,j} & 0\\ 0 & T_{i,j}\end{pmatrix}, \tag{11}$$

де $T_{i,j}=\left(\dfrac{1}{\nu_j}-\lambda_i\right)I$. Подіємо на (10) оператором $(T_A-\lambda_2E)$. З урахуванням (11) і властивостей приєднаних векторів для других координат отриманої рівності буде виконуватися співвідношення

$$\delta_1(\lambda_1-\lambda_2)v_2^{(1)}(e_1)+\sum_{k=2}^{p_1}\delta_k\left(v_2^{(k-1)}(e_1)+(\lambda_1-\lambda_2)v_2^{(k)}(e_1)\right)+\sum_{k=p_1+2}^{m}\delta_kv_2^{(k-1)}(e_{p_1+1})=$$

$$=\sigma_1\left(\frac{1}{\nu_1}-\lambda_2\right)w_2^{(1)}(e_1)+\sum_{k=2}^{q_1}\sigma_k\left(w_2^{(k-1)}(e_1)+\left(\frac{1}{\nu_1}-\lambda_2\right)w_2^{(k)}(e_1)\right)+$$

$$+\sigma_{q_1+1}\left(\frac{1}{\nu_2}-\lambda_2\right)w_2^{(q_1+1)}(e_{q_1+1})+\sigma_{q_1+2}\left(\frac{1}{\nu_3}-\lambda_2\right)w_2^{(q_1+2)}(e_{q_1+2})+$$

$$+\sum_{k=q_2+3}^{m}\sigma_k\left(w_2^{(k-1)}(e_{q_1+2})+\left(\frac{1}{\nu_3}-\lambda_2\right)w_2^{(k)}(e_{q_1+2})\right). \tag{12}$$

Внаслідок (8) у рівності (12) вектор e_m зустрічається тільки у виразі для $w_2^{(m)}(e_{q_1+2})$.

Отже, з лінійної незалежності $e_1,e_2,\ldots,e_m$ випливає, що $\sigma_m=0$. Після цього, повернувшись до (10), робимо висновок, що й $\delta_m=0$.

Таким чином, в обох частинах (10) залишаються суми $m-1$ доданків. Далі міркуємо аналогічно. Подіявши на (10) спочатку p_2 разів оператором $T_A-\lambda_2E$, а потім p_1 разів оператором $T_A-\lambda_1E$, послідовно отримаємо $\sigma_m=\delta_m=0,\ \sigma_{m-1}=\delta_{m-1}=0,\ldots,\sigma_1==\delta_1=0$.

Теорему 2 доведено.

Наступний приклад показує, що коли матриці операторів $A,\ B$ мають жорданову нормальну форму в одному й тому ж базисі, але з різним порядком базисних векторів, то твердження теореми 2 може не виконуватися.

Приклад 1. Нехай $X = \mathbb{C}^2,\ e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Розглянемо такі оператори $A,\ B$, що $(A-\mu I)e_1 = \bar{0},\ (A-\mu I)e_2 = e_1,\ (B-zI)e_2 = \bar{0},\ (B-zI)e_1 = e_2$ для деяких $\mu,\ z$ з множини $\mathbb{R}\backslash[0,4]$. Нехай $\lambda,\ \nu$ — такі числа, що $|\lambda| < 1,\ |\nu| < 1,\ \mu = \lambda + \dfrac{1}{\lambda} - 2,\ z = \nu + \dfrac{1}{\nu} - 2$. Тоді, з урахуванням співвідношень (6), (7), $X_-^2(T_A),\ X_+^2(T_B)$ є відповідно лінійними оболонками векторів $\begin{pmatrix}\lambda\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\ \lambda\left(1-\dfrac{1}{\lambda^2}\right)\\ -\dfrac{1}{\lambda}\\ 1-\dfrac{1}{\lambda^2}\end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{1}{\nu}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\nu}\left(1-\nu^2\right)\\ 0\\ 1-\nu^2\\ -\nu\end{pmatrix}$.

Перевіримо, що при деяких $\lambda,\ \mu$, які задовольняють вказані вище умови, ці чотири вектори лінійно залежні, а отже, умова (ii) не виконується. Справді,

$$\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0 & \dfrac{1}{\nu}\left(1-\nu^2\right)\\ 0 & \lambda\left(1-\dfrac{1}{\lambda^2}\right) & \dfrac{1}{\nu} & 0\\ 1 & -\dfrac{1}{\lambda} & 0 & 1-\nu^2\\ 0 & 1-\dfrac{1}{\lambda^2} & 1 & -\nu\end{vmatrix} = -1 - \left(\lambda - \frac{1}{\nu}\right)^2\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)\left(1-\nu^2\right).$$

Покладемо $\nu = \dfrac{1}{3}$ і розглянемо функцію $F\colon (0;1] \to \mathbb{R}$, яка діє за правилом $F(\lambda) = -1 - \dfrac{8}{9}(\lambda-3)^2\left(1-\dfrac{1}{\lambda^2}\right)$. Оскільки функція F неперервна на $(0;1]$, $F(1) = -1$, $\lim_{\lambda\to 0+} F(\lambda) = +\infty$, знайдеться таке $\lambda_0 \in (0,1)$, що $F(\lambda_0) = 0$. Тому при $\nu = \dfrac{1}{3},\ \lambda = \lambda_0$ умова (ii) не виконується.

Література

1. *Городній М. Ф., Гончар І. В.* Про обмежені розв'язки різницевого рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом // Доп. НАН України. – 2016. – № 12. – С. 12 – 16.
2. *Городній М. Ф., Кравець В. П.* Обмежені розв'язки різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта // Доп. НАН України. – 2019. – № 2. – С. 12 – 16.
3. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – Київ: Вища шк., 1992. – 319 с.
4. *Кабанцова Л. Ю.* Линейные разностные уравнения второго порядка в банаховом пространстве и расщепление операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2017. – **17**, вып. 3. – С. 285 – 293.
5. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971. – 272 с.

Одержано 26.03.2019