УДК 517.983

ОБОБЩЕННО-ОБРАТНЫЙ ОПЕРАТОР К ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Ф. Журавлев

Житомир. нац. агроэкол. ун-т
Старый б-л, 7, Житомир, 10008, Украина
e-mail: vfz2008@ukr.net

By using the theory of generalized inversion of operators in Banach spaces, we establish conditions for the generalized invertibility of an integro-differential operator with degenerate kernel in a Banach space. We obtain formulas for the construction of bounded projectors and a bounded generalized inverse operator to an integro-differential operator with a degenerate kernel in a Banach space. The results of investigations are illustrated by an example.

Встановлено умови узагальненої оборотності інтегро-диференціального оператора з виродженим ядром у банаховому просторі з використанням теорії узагальненого обернення операторів у банахових просторах. Отримано формули для побудови обмежених проекторів та обмеженого узагальненооберненого оператора до інтегро-диференціального оператора з виродженим ядром у банаховому просторі. Результати досліджень проілюстровано на прикладі.

При исследовании разрешимости различных типов функционально-дифференциальных уравнений и краевых задач для них в последние десятилетия широко применяется теория обобщенного обращения операторов [1 – 6]. Такой подход позволяет, с учетом специфики каждой конкретной задачи, применить для ее решения все преимущества “операторной техники”.

Хорошо разработаны и широко применяются способы обобщенного обращения нетеровых операторов в евклидовых пространствах [2, 4] и топологически нетеровых [5], n-, d-нормальных [7], эволюционных [8], интегральных операторов [9] в банаховых пространствах.

Исследование разрешимости и построение решений интегро-дифференциальных уравнений представляет собой задачу, специфика которой заключается в том, что интегро-дифференциальный оператор не имеет обратного оператора. Такие уравнения в евклидовых пространствах рассматривались в работах [10 – 12] и др.

В этой работе с использованием теории обобщенного обращения операторов в банаховых пространствах [4, 13], а также обобщенного обращения интегральных операторов в банаховых пространствах [9] получены условия обобщенной обратимости интегро-дифференциального оператора с вырожденным ядром в банаховом пространстве, построены ограниченные проекторы и обобщенно-обратный оператор к нему.

Постановка задачи. Пусть $z(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, которая действует из отрезка $[a, b]$ в действительное банахово пространство

$$\mathbf{B}_1\colon z(t) \in \mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1) := \left\{ z(\cdot)\colon [a,b] \to \mathbf{B}_1,\ |||z||| = \sup_{t\in[a,b]} \|z(t)\| \right\},$$

$\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1)$ — банахово пространство непрерывных на $[a,b]$ вектор-функций со значениями в $\mathbf{B}_1$, $z(t) \in \mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1)$, $\dot{z}(t) \in \mathbf{C}^1([a,b],\mathbf{B}_1)$, где $\mathbf{C}^1([a,b],\mathbf{B}_1)$ — банахово пространство непрерывно дифференцируемых вектор-функций с нормой

$$|||z||| = \sum_{k=0}^{1} \sup_{t\in[a,b]} \left\| z^{(k)}(t) \right\|,$$

где $z^{(k)}(t)$ — k-я производная от $z(t)$. Производная $\dot{z}(t)$ понимается в смысле [14, с. 140].

Рассмотрим интегро-дифференциальный оператор

$$(Lz)(t) := \dot{z}(t) - M(t) \int_a^b \big[W(s)z(s) + V(s)\dot{z}(s)\big] ds, \tag{1}$$

где оператор-функция $M(t)$ действует из банахова пространства $\mathbf{B}_2$ в банахово пространство $\mathbf{B}_1$ и сильно непрерывна с нормой $|||M||| = \sup_{t\in[a,b]} \|M(t)\|_{\mathbf{B}_2} = M_0 < \infty$, а оператор-функции $W(t)$ и $V(t)$ действуют из банахова пространства $\mathbf{B}_1$ в банахово пространство $\mathbf{B}_2$ и сильно непрерывны с нормами $|||W||| = \sup_{t\in[a,b]} \|W(t)\|_{\mathbf{B}_1} = W_0 < \infty$ и $|||V||| = \sup_{t\in[a,b]} \|V(t)\|_{\mathbf{B}_1} = V_0 < \infty$. Таким образом, оператор L действует из банахова пространства $\mathbf{C}^1([a,b],\mathbf{B}_1)$ в банахово пространство $\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1)$.

Ставится задача: найти условия обобщенной обратимости интегро-дифференциального оператора L в банаховом пространстве, построить ограниченные проекторы $\mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_{Y_L}$ и ограниченный обобщенно-обратный оператор L^-.

Предварительные сведения. Известно [15, 16], что линейный ограниченный оператор L, действующий из банахова пространства $\mathbf{B}_1$ в банахово пространство $\mathbf{B}_2$, обобщенно обратим, если его ядро $N(L)$ и образ $R(L)$ дополняемы в пространствах $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ соответственно. При этом существуют ограниченные проекторы $\mathcal{P}_{N(L)}\colon \mathbf{B}_1 \to N(L)$ и $\mathcal{P}_{Y_L}\colon \mathbf{B}_2 \to Y_L$, индуцирующие разбиения банаховых пространств $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ в прямые топологические суммы

$$\mathbf{B}_1 = N(L) \oplus X_L, \qquad \mathbf{B}_2 = Y_L \oplus R(L).$$

Класс обобщенно обратимых операторов $L\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ в дальнейшем будем обозначать через $\mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$.

В [9] показано, что оператор L_1 в линейном интегральном уравнении Фредгольма с вырожденным ядром

$$(L_1 y)(t) := y(t) - M(t) \int_a^b N(s)y(s)\, ds = g(t) \tag{2}$$

обобщенно обратим, если оператор

$$D = I_{\mathbf{B}_2} - A, \qquad A = \int_a^b N(s)M(s)\, ds, \qquad D\colon \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_2 \tag{3}$$

обобщенно обратим.

Для интегрального уравнения (2) справедлива следующая теорема.

Теорема 1 [9]**.** *Пусть* $D \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_2)$. *Тогда соответствующее (2) однородное интегральное уравнение имеет семейство решений*

$$y(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c.$$

Неоднородное интегральное уравнение (2) при выполнении условия

$$\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)g(s)\,ds = 0$$

и только при нем имеет семейство решений

$$y(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c + g(t) + M(t)D^{-}\int\limits_a^b N(s)g(s)\,ds.$$

где $\mathcal{P}_{N(D)}$ *и* $\mathcal{P}_{Y_D}$ *— ограниченные проекторы на нуль-пространство* $N(D)$ *и подпространство* $Y_D = \mathbf{B}_2 \ominus R(D)$ *оператора* D *соответственно,* D^{-} *— ограниченный обобщенно обратный оператор к оператору* $D,$ c *— произвольный элемент банахова пространства* $\mathbf{B}_2$.

Основной результат. ***1. Построение ограниченных проекторов.*** Обозначим в (1)

$$\dot{z}(t) = y(t), \qquad z(t) = \int\limits_a^t y(s)\,ds + c_0, \qquad c_0 \in \mathbf{B}_1.$$

Тогда оператор D определяется по формуле (3), где

$$N(s) = \int\limits_s^b W(\tau)d\tau + V(s). \tag{4}$$

Пусть $D \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_2)$. А значит, существуют ограниченные проекторы

$$\mathcal{P}_{N(D)} \colon \mathbf{B}_2 \to N(D), \qquad \|\mathcal{P}_{N(D)}\|_{\mathbf{B}_2} = p_d < \infty,$$
$$\mathcal{P}_{Y_D} \colon \mathbf{B}_2 \to Y_D, \qquad \|\mathcal{P}_{Y_D}\|_{\mathbf{B}_2} = \bar{p}_d < \infty$$

на нуль-пространство $N(D)$ и подпространство $Y_D = \mathbf{B}_2 \ominus R(D)$ оператора D соответственно [16] и ограниченный обобщенно обратный оператор D^{-} к оператору D [13].

Обозначим

$$W = \int\limits_a^b W(s)\,ds, \qquad W \colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2,$$

$$S = \mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)M(s)W\,ds = \mathcal{P}_{Y_D}AW = \mathcal{P}_{Y_D}\big[I_{\mathbf{B}_2} - D\big]W = \mathcal{P}_{Y_D}W,$$

поскольку $\mathcal{P}_{Y_D}D = 0$.

Пусть оператор $S \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$. Тогда существуют ограниченные проекторы

$$\mathcal{P}_{N(S)} \colon \mathbf{B}_1 \to N(S), \qquad \|\mathcal{P}_{N(S)}\|_{\mathbf{B}_1} = p_s < \infty,$$

$$\mathcal{P}_{Y_S} \colon \mathbf{B}_2 \to Y_S, \quad \|\mathcal{P}_{Y_S}\|_{\mathbf{B}_2} = \bar{p}_s < \infty$$

на нуль-пространство $\mathcal{P}_{N(S)}$ и подпространство $\mathcal{P}_{Y_S} = \mathbf{B}_2 \ominus R(S)$ и ограниченный обобщенно обратный оператор $S^- \colon \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_1$ к оператору S.

Теорема 2. *Пусть операторы $D \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_2)$ и $S \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$, а оператор-функции $M(t)$, $W(t)$, $V(t)$ удовлетворяют указанным выше условиям. Тогда интегро-дифференциальный оператор L обобщенно обратим.*

Доказательство. Для доказательства обобщенной обратимости оператора L необходимо и достаточно показать, что существуют ограниченные проекторы [16]

$$\mathcal{P}_{N(L)} \colon \mathbf{C}^1([a,b], \mathbf{B}_1) \to N(L), \qquad \mathcal{P}_{Y_L} \colon \mathbf{C}([a,b], \mathbf{B}_1) \to Y_L$$

разбивающие банаховы пространства $\mathbf{C}^1([a,b], \mathbf{B}_1)$, $\mathbf{C}([a,b], \mathbf{B}_1)$ в прямые топологические суммы

$$\mathbf{C}^1([a,b], \mathbf{B}_1) = N(L) \oplus X_L, \qquad \mathbf{C}([a,b], \mathbf{B}_1) = Y_L \oplus R(L).$$

Обозначим

$$\widetilde{M}(t) = \int\limits_a^t M(s)\, ds, \qquad \widetilde{D} = \left[I_{\mathbf{B}_2} + D^- A\right] W. \tag{5}$$

Пусть операторы D и S обобщенно обратимы. Покажем, что операторы

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = M(t) \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b N(s) f(s)\, ds, \tag{6}$$

$$(\mathcal{P}_{N(L)} z)(t) = \widetilde{M}(t) \mathcal{P}_{N(D)} \left\{ \int\limits_a^b \left[W(s) z(s) + V(s) \dot{z}(s)\right] ds - W z(a) \right\} +$$
$$+ \left\{ \widetilde{M}(t) \widetilde{D} \mathcal{P}_{N(S)} + \mathcal{P}_{N(S)} \right\} z(a) \tag{7}$$

являются ограниченными проекторами на подпространство $\mathbf{C}([a,b], \mathbf{B}_1) \ominus R(L)$ и нуль-пространство $N(L) \subset \mathbf{C}^1([a,b], \mathbf{B}_1)$.

Для доказательства того, что оператор (6) является проектором на подпространство Y_L, сначала необходимо и достаточно показать, что он удовлетворяет свойствам

$$\mathcal{P}_{Y_L}^2 = \mathcal{P}_{Y_L}, \qquad \mathcal{P}_{Y_L} L = 0, \tag{8}$$

а затем показать его ограниченность.

Проверим первое равенство из (8). Пусть $f(t) \in \mathbf{C}([a,b], \mathbf{B}_1)$.

$$(\mathcal{P}_{Y_L}^2 f)(t) = M(t) \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b N(s) (\mathcal{P}_{Y_L} f)(s)\, ds =$$

$$= M(t)\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\left\{M(s)\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(\tau)f(\tau)d\tau\right\}ds =$$

$$= M(t)\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}A\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds =$$

$$= M(t)\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}[I_{\mathbf{B}_2} - D]\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds = (\mathcal{P}_{Y_L}f)(t),$$

так как $\mathcal{P}_{Y_D}D = 0$.

Далее проверим второе соотношение из (8):

$$(\mathcal{P}_{Y_L}Lz)(t) = M(t)\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\left\{\dot z(s) - M(s)\int\limits_a^b [W(\tau)z(\tau) + V(\tau)\dot z(\tau)]\,d\tau\right\}ds =$$

$$= M(t)\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\dot z(s)\,ds - M(t)\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}A\int\limits_a^b [W(s)z(s)\,ds + V(s)\dot z(s)]\,ds =$$

$$= M(t)\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b \left\{\int\limits_s^b W(\tau)d\tau + V(s)\right\}\dot z(s)\,ds -$$

$$- M(t)\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}A\int\limits_a^b \big[W(s)z(s) + V(s)\dot z(s)\big]ds =$$

$$= M(t)\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b W(s)\big[z(s) - z(a)\big]ds + M(t)\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b V(s)\dot z(s)\,ds -$$

$$- M(t)\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}A\int\limits_a^b W(s)z(s)\,ds - M(t)\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}A\int\limits_a^b V(s)\dot z(s)\,ds =$$

$$= M(t)\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\big[I_{\mathbf{B}_2} - A\big]\int\limits_a^b \big[W(s)z(s) + V(s)\dot z(s)\big]\,ds - M(t)\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}Wz(a) = 0,$$

так как

$$\int\limits_a^s \dot z(\tau)d\tau = z(s) - z(a), \qquad I_{\mathbf{B}_2} - A = D, \qquad \mathcal{P}_{Y_D}D = 0, \qquad \mathcal{P}_{Y_D}W = S, \qquad \mathcal{P}_{Y_S}S = 0.$$

Учтя сделанные выше предположения относительно оператор-функций $M(t)$, $N(t)$, проекторов $\mathcal{P}_{Y_D}$ и $\mathcal{P}_{Y_S}$, покажем ограниченность проектора $\mathcal{P}_{Y_L}$ в пространстве $\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1)$:

$$\|\mathcal{P}_{Y_L}\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1)} = \sup_{f\in\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1),f\neq 0} \frac{\|\mathcal{P}_{Y_L} f\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1)}}{\|f\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1)}} =$$

$$= \sup_{f\in\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1),f\neq 0} \frac{\left\| M(t)\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\displaystyle\int_a^b N(s)f(s)\,ds \right\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1)}}{\|f\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1)}} \leq$$

$$\leq \sup_{f\in\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1),f\neq 0} \frac{|||M(t)|||\,\|\mathcal{P}_{Y_S}\|_{\mathbf{B}_1}\|\mathcal{P}_{Y_D}\|_{\mathbf{B}_1}\displaystyle\int_a^b |||N(s)|||\,\|f(s)\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1)}\,ds}{\|f\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1)}} \leq$$

$$\leq M_0[W_0+V_0]\bar{p}_s\bar{p}_d(b-a) \sup_{f\in\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1),f\neq 0} \frac{\|f\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1)}}{\|f\|_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1)}} \leq$$

$$\leq M_0[W_0+V_0]\bar{p}_s\bar{p}_d(b-a) < \infty. \tag{9}$$

Далее покажем, что проектор $\mathcal{P}_{N(L)}$ (7) является проектором на нуль-пространство $N(L)$, т. е. удовлетворяет условиям

$$\mathcal{P}^2_{N(L)} = \mathcal{P}_{N(L)}, \qquad L\mathcal{P}_{N(L)} = 0. \tag{10}$$

Проверим первое соотношение из (10):

$$\left(\mathcal{P}^2_{N(L)}z\right)(t) = \widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)}\int\limits_a^b \left[W(s)(\mathcal{P}_{N(L)}z)(s) + V(s)\,\frac{d}{ds}\,(\mathcal{P}_{N(L)}z)(s)\right] ds -$$

$$- \widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)}W(\mathcal{P}_{N(L)}z)(a) + \widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)}\widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)}(\mathcal{P}_{N(L)}z)(a) +$$

$$+ \mathcal{P}_{N(S)}(\mathcal{P}_{N(L)}z)(a).$$

Из (7) имеем $(\mathcal{P}_{N(L)}z)(a) = \mathcal{P}_{N(S)}z(a)$ при $t = a$. Учитывая это, получаем

$$(\mathcal{P}^2_{N(L)}z)(t) = \widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)}\int\limits_a^b W(s)\Bigg\{\widetilde{M}(s)\mathcal{P}_{N(D)}\int\limits_a^b [W(\tau)z(\tau) + V(\tau)\dot{z}(\tau)]\,d\tau -$$

$$- \widetilde{M}(s)\mathcal{P}_{N(D)}Wz(a) + \widetilde{M}(s)\widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)}z(a) + \mathcal{P}_{N(S)}z(a)\Bigg\}ds +$$

$$+ \widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)}\int\limits_a^b V(s)\Bigg\{M(s)\mathcal{P}_{N(D)}\int\limits_a^b [W(\tau)z(\tau) + V(\tau)\dot{z}(\tau)]\,d\tau -$$

$$- M(s)\mathcal{P}_{N(D)}Wz(a) + M(s)\widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)}z(a)\Bigg\}ds -$$

$$- \widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)}W\mathcal{P}_{N(S)}z(a) + \widetilde{M}(t)\widetilde{D}\mathcal{P}^2_{N(S)}z(a) + \mathcal{P}^2_{N(S)}z(a) =$$

$$= \widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)}A\mathcal{P}_{N(D)}\int\limits_a^b \big[W(s)z(s)+V(s)\dot z(s)\big]ds - \widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)}A\mathcal{P}_{N(D)}Wz(a)+$$

$$+\widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)}A\widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)}z(a)+\widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)}W\mathcal{P}_{N(S)}z(a)-$$

$$-\widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)}W\mathcal{P}_{N(S)}z(a)+\widetilde{M}(t)\widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)}z(a)+\mathcal{P}_{N(S)}z(a)=$$

$$=(\mathcal{P}_{N(L)}z)(t)+\widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)}A\widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)}z(a), \tag{11}$$

поскольку $A\mathcal{P}_{N(D)} = \big[I_{\mathbf{B}_2} - D\big]\mathcal{P}_{N(D)} = \mathcal{P}_{N(D)}$, а $\mathcal{P}^2_{N(S)} = \mathcal{P}_{N(S)}$.

Покажем, что второе слагаемое из (11) равняется нулю, т. е.

$$\mathcal{P}_{N(D)}A\widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)} = 0.$$

Принимая во внимание, что $A = I_{\mathbf{B}_2} - D,\ \widetilde{D} = \big[I_{\mathbf{B}_2} + D^- A\big]W$, получаем

$$\mathcal{P}_{N(D)}\big[I_{\mathbf{B}_2} - D\big]\big[I_{\mathbf{B}_2} + D^-(I_{\mathbf{B}_2} - D)\big]W\mathcal{P}_{N(S)} =$$

$$= \mathcal{P}_{N(D)}\big[I_{\mathbf{B}_2} - D\big]\big[I_{\mathbf{B}_2} + D^- - D^-D\big]W\mathcal{P}_{N(S)} =$$

$$= \mathcal{P}_{N(D)}\big[I_{\mathbf{B}_2} - D\big]\big[D^- + \mathcal{P}_{Y_D}\big)\big]W\mathcal{P}_{N(S)} =$$

$$= \mathcal{P}_{N(D)}D^-W\mathcal{P}_{N(S)} + \mathcal{P}_{N(D)}\big[I_{\mathbf{B}_2} - D\big]S\mathcal{P}_{N(S)} -$$

$$-\big[\mathcal{P}_{N(D)} - \mathcal{P}^2_{N(D)}\big]W\mathcal{P}_{N(S)} = 0,$$

поскольку $\mathcal{P}_{N(D)}D^- = 0,\ S\mathcal{P}_{N(S)} = 0,\ \mathcal{P}_{N(D)} - \mathcal{P}^2_{N(D)} = 0$.

Таким образом, $\big(\mathcal{P}^2_{N(L)}z\big)(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}z)(t)$.

Далее проверим второе соотношение из (10):

$$\big(L\mathcal{P}_{N(L)}z\big)(t) = \frac{d}{dt}\big(\mathcal{P}_{N(L)}z\big)(t)-$$

$$-M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\int\limits_a^b \left[W(s)(\mathcal{P}_{N(L)}z)(s) + V(s)\frac{d}{ds}(\mathcal{P}_{N(L)}z)(s)\right]ds =$$

$$= M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\int\limits_a^b \big[W(s)z(s)+V(s)\dot z(s)\big]ds-$$

$$-M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Wz(a) + M(t)\widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)}z(a)-$$

$$-M(t)\int\limits_a^b W(s)\Bigg\{\widetilde{M}(s)\mathcal{P}_{N(D)}\int\limits_a^b \big[W(\tau)z(\tau)+V(\tau)\dot z(\tau)\big]\,d\tau -$$

$$-\widetilde{M}(s)\mathcal{P}_{N(D)}Wz(a) + \widetilde{M}(s)\widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)}z(a) + \mathcal{P}_{N(S)}z(a)\Bigg\}ds-$$

$$- M(t)\int_a^b V(s)\Big\{M(s)\mathcal{P}_{N(D)}\int_a^b \big[W(\tau)z(\tau)+V(\tau)\dot z(\tau)\big]d\tau-$$

$$- M(s)\mathcal{P}_{N(D)}Wz(a)+M(s)\widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)}z(a)\Big\}ds=$$

$$= M(t)\big[I_{\mathbf{B}_2}-A\big]\mathcal{P}_{N(D)}\int_a^b \big[W(s)z(s)+V(s)\dot z(s)\big]ds-$$

$$- M(t)\big[I_{\mathbf{B}_2}-A\big]\mathcal{P}_{N(D)}Wz(a)+M(t)\big[D\widetilde{D}-W\big]\mathcal{P}_{N(S)}z(a)=0,$$

поскольку $I_{\mathbf{B}_2}-A=D,\ D\mathcal{P}_{N(D)}=0,$

$$\begin{aligned}\big[D\widetilde{D}-W\big]\mathcal{P}_{N(S)} &= \big\{D\big[I_{\mathbf{B}_2}+D^-\left(I_{\mathbf{B}_2}-D\right)\big]W-W\big\}\,\mathcal{P}_{N(S)}=\\ &=\big[DW+DD^-W-DD^-DW-W\big]\mathcal{P}_{N(S)}=\\ &=\big[\big(I_{\mathbf{B}_2}-\mathcal{P}_{Y_D}\big)W-W\big]\mathcal{P}_{N(S)}=-\mathcal{P}_{Y_D}W\mathcal{P}_{N(S)}=-S\mathcal{P}_{N(S)}=0.\end{aligned}$$

Ограниченность проектора $\mathcal{P}_{N(L)}$ показывается аналогично (9).

2. Построение обобщенно-обратного оператора в банаховом пространстве. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$(Lz)(t):=\dot z(t)-M(t)\int_a^b \big[W(s)z(s)+V(s)\dot z(s)\big]ds=f(t). \tag{12}$$

В работе [17] с помощью замены $\dot z(t)=y(t)$ или

$$z(t)=\int_a^t y(s)\,ds+c_0,\quad c_0\in\mathbf{B}_1, \tag{13}$$

интегро-дифференциальное уравнение (12) сводится к интегральному уравнению

$$y(t)-M(t)\int_a^b N(s)y(s)\,ds=g(t), \tag{14}$$

где

$$g(t)=f(t)+M(t)Wc_0.$$

По теореме 1 имеем, что при выполнении условия

$$\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)g(s)\,ds=0$$

и только при нем интегральное уравнение (14) имеет семейство решений

$$y(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c + g(t) + M(t)D^{-}\int\limits_a^b N(s)g(s)\,ds,$$

где c — произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{B}_2$.

Тогда, учитывая замену (13) и тот факт, что $c_0 = \mathcal{P}_{N(S)}\tilde{c} - S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)f(s)ds$ [17], получаем общее решение интегро-дифференциального уравнения (1):

$$z(t) = \int\limits_a^t y(s)\,ds + c_0 = \begin{bmatrix}\widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)} & \left(\widetilde{M}(t)\widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)} + \mathcal{P}_{N(S)}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ \tilde{c}\end{bmatrix} +$$

$$+ \tilde{f}(t) + \widetilde{M}(t)\big[D^{-} - \widetilde{D}S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}\big]\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds - S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds,$$

где $\tilde{f}(t) = \int_a^t f(s)\,ds,$ а $\widetilde{M}(t)$ и $\widetilde{D}$ определены формулами (5).

Теорема 3. *Пусть* $D \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_2)$ *и* $S \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$. *Тогда оператор*

$$\left(L^{-}f\right)(t) = \tilde{f}(t) + \widetilde{M}(t)\big[D^{-} - \widetilde{D}S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}\big]\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds - S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds \tag{15}$$

является ограниченным обобщенно-обратным к оператору L.

Доказательство. Оператор L^{-} является обобщенно-обратным к оператору L, если он удовлетворяет условиям [15]

$$LL^{-}L = L, \qquad L^{-}LL^{-} = L^{-}. \tag{16}$$

Сначала найдем суперпозицию LL^{-}. Для сокращения записей обозначим

$$\overline{D} = D^{-} - \widetilde{D}S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}, \qquad N = \int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds. \tag{17}$$

Тогда

$$\left(LL^{-}f\right)(t) = f(t) + M(t)\overline{D}N - M(t)\int\limits_a^b W(s)\left\{\int\limits_a^s f(\tau)d\tau + \int\limits_a^s M(\tau)d\tau\overline{D}N\right\}ds +$$

$$+ M(t)\int\limits_a^b W(s)\,dsS^{-}\mathcal{P}_{Y_D}N - M(t)\int\limits_a^b V(s)\left\{f(s) + M(s)\overline{D}N\right\}ds =$$

$$= f(t) + M(t)\overline{D}N - M(t)\int\limits_a^b\left[\int\limits_s^b W(\tau)d\tau\right]f(s)\,ds -$$

$$- M(t)\int\limits_a^b \left[\int\limits_s^b W(\tau)d\tau\right] M(s)\overline{D}\,dsN + M(t)WS^{-}\mathcal{P}_{Y_D}N-$$

$$- M(t)\int\limits_a^b V(s)f(s)\,ds - M(t)\int\limits_a^b V(s)M(s)\overline{D}N\,ds.$$

После преобразований получим

$$\begin{aligned}\left(LL^{-}f\right)(t) = f(t) + M(t)\overline{D}N - M(t)\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds- \\ - M(t)A\overline{D}N + M(t)WS^{-}\mathcal{P}_{Y_D}N = \\ = f(t) - M(t)N + M(t)D\overline{D}N + M(t)WS^{-}\mathcal{P}_{Y_D}N.\end{aligned} \qquad (18)$$

Упростив выражение

$$\begin{aligned}D\overline{D} &= D\big[D^{-} - \widetilde{D}S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}\big] = DD^{-} - D\widetilde{D}S^{-}\mathcal{P}_{Y_D} = \\ &= DD^{-} - D\left(I_{\mathbf{B}_1} + D^{-}A\right)WS^{-}\mathcal{P}_{Y_D} = \\ &= DD^{-} - DWS^{-}\mathcal{P}_{Y_D} - DD^{-}AWS^{-}\mathcal{P}_{Y_D} = \\ &= DD^{-} - DWS^{-}\mathcal{P}_{Y_D} - DD^{-}\big[I_{\mathbf{B}_2} - D\big]WS^{-}\mathcal{P}_{Y_D} = \\ &= DD^{-} - DD^{-}WS^{-}\mathcal{P}_{Y_D} = [I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_D}]\big[I_{\mathbf{B}_2} - WS^{-}\mathcal{P}_{Y_D}\big],\end{aligned}$$

будем иметь

$$D\overline{D} = I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_D} - WS^{-}\mathcal{P}_{Y_D} + SS^{-}\mathcal{P}_{Y_D}, \qquad (19)$$

поскольку $DD^{-}D = D,\ DD^{-} = I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_D}$, а $\mathcal{P}_{Y_D}W = S$.

Подставляя (19) в (18), получаем

$$\begin{aligned}\left(LL^{-}f\right)(t) &= f(t) - M(t)N \\ &\quad + M(t)\big\{I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{Y_D} - WS^{-}\mathcal{P}_{Y_D} + SS^{-}\mathcal{P}_{Y_D}\big\}N + M(t)WS^{-}\mathcal{P}_{Y_D}N \\ &= f(t) - M(t)\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}N,\end{aligned}$$

поскольку $SS^{-} = I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_S}$.

Используя представление проектора $\mathcal{P}_{Y_L}$ (6) (теорема 2) и обозначение для N из (17), имеем

$$\left(LL^{-}f\right)(t) = f(t) - M(t)\mathcal{P}_{Y_S}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds = \left(\big[I_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1)} - \mathcal{P}_{Y_L}\big]f\right)(t).$$

Далее проверим первое соотношение из (16):

$$LL^{-}L = [I_{\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1)} - \mathcal{P}_{Y_L}]L = L - \mathcal{P}_{Y_L}L = L,$$

поскольку, как показано выше, $\mathcal{P}_{Y_L}L = 0$.

Теперь найдем суперпозицию $L^{-}L$:

$$\big(L^{-}Lz\big)(t)=\int\limits_a^t\left\{\dot z(s)-M(s)\int\limits_a^b[W(\tau)z(\tau)+V(\tau)\dot z(\tau)]\,d\tau\right\}ds+$$

$$+\widetilde{M}(t)\overline{D}\int\limits_a^b N(s)\left\{\dot z(s)-M(s)\int\limits_a^b[W(\tau)z(\tau)+V(\tau)\dot z(\tau)]\,d\tau\right\}ds-$$

$$-S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\left\{\dot z(s)-M(s)\int\limits_a^b[W(\tau)z(\tau)+V(\tau)\dot z(\tau)]\,d\tau\right\}ds.$$

После преобразований получим

$$\big(L^{-}Lz\big)(t)=\int\limits_a^t\dot z(s)\,ds-\widetilde{M}(t)\int\limits_a^b[W(s)z(s)+V(s)\dot z(s)]\,ds+$$

$$+\widetilde{M}(t)\overline{D}\int\limits_a^b N(s)\dot z(s)\,ds-\widetilde{M}(t)\overline{D}A\int\limits_a^b\big[W(s)z(s)+V(s)\dot z(s)\big]ds-$$

$$-S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\dot z(s)\,ds+S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}A\int\limits_a^b\big[W(s)z(s)+V(s)\dot z(s)\big]ds. \qquad (20)$$

С учетом того, что $N(s)$ определено равенством (4), а $\int_a^t\dot z(s)\,ds=z(t)-z(a)$, вычислим сумму второго, третьего и четвертого слагаемых из (20):

$$-\widetilde{M}(t)\big[I_{\mathbf{B}_2}+\overline{D}A\big]\int\limits_a^b\big[W(s)z(s)+V(s)\dot z(s)\big]ds+$$

$$+\widetilde{M}(t)\overline{D}\int\limits_a^b\left[\int\limits_s^b W(\tau)d\tau+V(s)\right]\dot z(s)\,ds=$$

$$=-\widetilde{M}(t)\big[I_{\mathbf{B}_1}+\overline{D}A\big]\int\limits_a^b W(s)z(s)\,ds-\widetilde{M}(t)\big[I_{\mathbf{B}_2}+\overline{D}A\big]\int\limits_a^b V(s)\dot z(s)\,ds+$$

$$+\widetilde{M}(t)\overline{D}\int\limits_a^b W(s)\big[z(s)-z(a)\big]ds+\widetilde{M}(t)\overline{D}\int\limits_a^b V(s)\dot z(s)\,ds=$$

$$=\widetilde{M}(t)\big[\,\overline{D}-I_{\mathbf{B}_2}-\overline{D}A\big]\int\limits_a^b\big[W(s)z(s)+V(s)\dot z(s)\big]ds-\widetilde{M}(t)\overline{D}Wz(a). \qquad (21)$$

Далее в (20) упростим выражение

$$S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}A\left\{\int\limits_a^b \big[W(s)z(s)+V(s)\dot{z}(s)\big]ds\right\}ds - S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\dot{z}(s)\,ds =$$

$$= S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}A\int\limits_a^b W(s)z(s) + S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}A\int\limits_a^b V(s)\dot{z}(s)\,ds-$$

$$- S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b W(s)\big[z(s)-z(a)\big]ds - S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b V(s)\dot{z}(s)\,ds =$$

$$= S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}[A-I_{\mathbf{B}_2}]\int\limits_a^b \big[W(s)z(s)+V(s)\dot{z}(s)\big] + S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}Wz(a) =$$

$$= S^{-}Sz(a) = \big(I_{\mathbf{B}_1}-\mathcal{P}_{N(S)}\big)\,z(a), \tag{22}$$

поскольку $I_{\mathbf{B}_2}-A=D,\ \mathcal{P}_{Y_D}D=0,\ S^{-}S=I_{\mathbf{B}_1}-\mathcal{P}_{N(S)}$.

Подставив (21) и (22) в (20), получим

$$\big(L^{-}Lz\big)\,(t) = \int\limits_a^t \dot{z}(s)\,ds + \widetilde{M}(t)\big[\,\overline{D}-I_{\mathbf{B}_2}-\overline{D}A\big]\int\limits_a^b \big[W(s)z(s)+V(s)\dot{z}(s)\big]ds-$$

$$- \widetilde{M}(t)\overline{D}Wz(a) + \big(I_{\mathbf{B}_1}-\mathcal{P}_{N(S)}\big)\,z(a). \tag{23}$$

Упростим выражения $\overline{D}-I_{\mathbf{B}_2}-\overline{D}A$ и $\overline{D}W$. Имеем

$$\overline{D}-I_{\mathbf{B}_2}-\overline{D}A = -I_{\mathbf{B}_2}+\overline{D}D =$$

$$= -I_{\mathbf{B}_2} - \big[D^{-}-\widetilde{D}S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}\big]D =$$

$$= -I_{\mathbf{B}_2} + D^{-}D - \widetilde{D}S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}D = -\mathcal{P}_{N(D)}, \tag{24}$$

так как $-I_{\mathbf{B}_2}+D^{-}D=-\mathcal{P}_{N(D)},\ \mathcal{P}_{Y_D}D=0$;

$$\overline{D}W = \big[D^{-}-\widetilde{D}S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}\big]W = D^{-}W-\widetilde{D}S^{-}S = D^{-}W-\widetilde{D}\big[I_{\mathbf{B}_1}-\mathcal{P}_{N(S)}\big] =$$

$$= D^{-}W - \big[I_{\mathbf{B}_2}+D^{-}A\big]W + \widetilde{D}\mathcal{P}_{Y_S} =$$

$$= D^{-}W - \big[I_{\mathbf{B}_2}+D^{-}-D^{-}D\big]W + \widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)} =$$

$$= -\mathcal{P}_{N(D)}W + \widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)}. \tag{25}$$

Учитывая, что $\int_a^t \dot{z}(s)\,ds = z(t)-z(a)$, подставляем (24) и (25) в (23) и получаем

$$\big(L^{-}Lz\big)\,(t) = \int\limits_a^t \dot{z}(s)\,ds - \widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)}\int\limits_a^b \big[W(s)z(s)+V(s)\dot{z}(s)\big]ds+$$

$$+ \widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)}Wz(a) - \widetilde{M}(t)\widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)}z(a) + \big[I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(S)}\big]z(a) =$$

$$= z(t) - \widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)}\left\{\int\limits_a^b \big[W(s)z(s) + V(s)\dot{z}(s)\big]ds - Wz(a)\right\} -$$

$$- \left\{\widetilde{M}(t)\widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)} + \mathcal{P}_{N(S)}\right\} z(a).$$

Используя представление проектора $\mathcal{P}_{N(L)}$ (7) (теорема 2), имеем

$$\big(L^{-}Lz\big)(t) = z(t) - \widetilde{M}(t)\mathcal{P}_{N(D)}\left\{\int\limits_a^b \big[W(s)z(s) + V(s)\dot{z}(s)\big]ds - Wz(a)\right\} -$$

$$- \left\{\widetilde{M}(t)\widetilde{D}\mathcal{P}_{N(S)} + \mathcal{P}_{N(S)}\right\}z(a) =$$

$$= \big(\big[I_{\mathbf{C}^1([a,b],\mathbf{B}_1)} - \mathcal{P}_{N(L)}\big]z\big)(t).$$

Теперь проверим второе соотношение из (16):

$$L^{-}LL^{-} = \big[I_{\mathbf{C}^1([a,b],\mathbf{B}_1)} - \mathcal{P}_{N(L)}\big]L^{-} = L^{-} - \mathcal{P}_{N(L)}L^{-} = L^{-},$$

поскольку из общей теории обобщенного обращения операторов известно [15, с. 141], что $\mathcal{P}_{N(L)}L^{-} = 0$.

Таким образом, оператор (15) является обобщенно-обратным к итегро-дифференциальному оператору (1).

Ограниченность оператора L^{-} следует из ограниченности операторов, входящих в его структуру.

Теорема 3 доказана.

3. Построение обобщенно-обратного оператора к интегро-дифференциальному в евклидовом пространстве. В случае, когда интегро-дифференциальное уравнение рассматривается в евклидовом пространстве, применяя методы построения псевдообратных операторов и ортопроекторов в конечномерных пространствах [2, 4], предложенную методику исследования можно уточнить и конкретизировать.

Рассмотрим уравнение (1) в предположении, что $M(t)$ — $(n\times m)$-мерная матрица, $W(t)$ и $V(t)$ — $(m \times n)$-мерные матрицы, $f(t)$ — $(n \times 1)$-мерная матрица, элементы которых принадлежат пространству $\mathbf{L}_2[a,b]$. Операторное уравнение (1) будем рассматривать в классе функций $z(t)$ таких, что $z(t) \in \mathbf{D}_2^n[a,b],\ \dot{z}(t) \in \mathbf{L}_2^n[a,b]$.

В этом случае оператор $D = I_m - A,\ A = \int_a^b N(s)M(s)\,ds$ и ортопроекторы $P_{N(D)}$, $P_{N(D^*)}$ будут $(m \times m)$-мерными матрицами и к матрице D существует единственная $(m \times m)$-мерная псевдообратная матрица D^{+}.

При этом оператор $\widetilde{D}$ будет $(m \times n)$-мерной матрицей

$$\widetilde{D} = \big(I_m + D^{+}A\big)\,W.$$

Оператор $S = \mathcal{P}_{Y_D}W$ будет $(m \times n)$-мерной матрицей, а ортопроекторы $P_{N(S)}$ на нуль-пространство $N(S)$ и $P_{N(S^*)}$ на нуль-пространство $N\left(S^*\right)$ сопряженного оператора

S^* будут, соответственно, $(m \times m)$-мерными и $(n \times n)$-мерными матрицами. При этом к матрице S существует единственная $(n \times m)$-мерная псевдообратная матрица S^+, а оператор $D^+ - \widetilde{D}S^+P_{N(D^*)}$ будет $(m \times m)$-мерной матрицей.

Тогда теорема 2 формулируется следующим образом.

Теорема 4. *Пусть интегро-дифференциальный оператор L (1) действует из пространства $\mathbf{D}_2^n[a,b]$ в пространство $\mathbf{L}_2^n[a,b]$. Тогда оператор L обобщенно обратим.*

Действительно, поскольку конечномерные операторы обобщенно обратимы, из теоремы 1 получим, что в конечномерных пространствах интегро-дифференциальный оператор L всегда обобщенно обратим, а проекторы

$$\mathcal{P}_{N(L)}\colon \mathbf{D}_2^n[a,b] \to N(L), \qquad \mathcal{P}_{Y_L}\colon \mathbf{L}_2^n[a,b] \to Y_L$$

будут ограниченными и иметь вид

$$(\mathcal{P}_{Y_L}f)(t) = M(t)P_{N(S^*)}P_{N(D^*)}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds,$$

$$(\mathcal{P}_{N(L)}z)(t) = \widetilde{M}(t)P_{N(D)}\left\{\int\limits_a^b \big[W(s)z(s) + V(s)\dot{z}(s)\big]ds - Wz(a)\right\} +$$

$$+\left\{\widetilde{M}(t)\widetilde{D}P_{N(S)} + P_{N(S)}\right\}z(a).$$

В этом случае теорема 3 формулируется следующим образом.

Теорема 5. *Пусть $L\colon \mathbf{D}_2^n[a,b] \to \mathbf{L}_2^n[a,b]$. Тогда оператор*

$$\big(L^- f\big)(t) = \tilde{f}(t) + \widetilde{M}(t)\big[D^+ - \widetilde{D}S^+P_{N(D^*)}\big]\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds -$$

$$- S^+P_{N(D^*)}\int\limits_a^b N(s)f(s)\,ds$$

является обобщенно-обратным к оператору L.

Пример 1. Построим обобщенно-обратный оператор L^- к интегро-дифференциальному оператору

$$(Lz)(t) := \dot{z}(t) - M(t)\int\limits_0^2 \big[W(s)z(s) + V(s)\dot{z}(s)\big]ds = f(t), \tag{26}$$

$$M(t) = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} t & 2 & t \\ 1 & t^2-2t & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t & 2 & t \\ 1 & t^2-2t & 1\end{bmatrix}, \ldots\right\},$$

$$W(s) = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} s-\dfrac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s-\dfrac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix}, \ldots\right\},$$

$$V(s) = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} \dfrac{s^2}{2} - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dfrac{s^2}{2} - \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix}, \ldots \right\}.$$

Задачу (26) будем рассматривать в предположении, что вектор-функция $z(t)$ действует из отрезка $[0,2]$ в банахово пространство $\mathbf{c}$ всех сходящихся числовых последовательностей: $z(t) \in \mathbf{C}([0,2],\mathbf{c}) := \{z(\cdot)\colon [0,2] \to \mathbf{c}\}$, $\dot z(t) \in \mathbf{C}^1([0,2],\mathbf{c}) := \{\dot z(\cdot)\colon [0,2] \to \mathbf{c}\}$, оператор-функции $M(t)$, $W(t)$ и $V(t)$ действуют из банахова пространства $\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})$ в себя с нормами

$$|||M|||_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})} = \sup_{t\in[0,2]} \|M(t)\|_{\mathbf{c}}, \qquad |||W|||_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})} = \sup_{t\in[0,2]} \|W(t)\|_{\mathbf{c}},$$

$$|||V|||_{\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})} = \sup_{t\in[0,2]} \|V(t)\|_{\mathbf{c}}.$$

Таким образом, оператор L действует из банахова пространства непрерывно дифференцируемых на промежутке $[0,2]$ функций $\mathbf{C}^1([0,2],\mathbf{c})$ в банахово пространство непрерывных функций $\mathbf{C}([0,2],\mathbf{c})$.

Для этой задачи имеем

$$N(s) = \int_s^2 W(\tau)d\tau + V(s) =$$

$$= \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} \dfrac{3}{2}(s-1) & 0 \\ 0 & 1-s \\ 0 & 1-s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dfrac{3}{2}(s-1) & 0 \\ 0 & 1-s \\ 0 & 1-s \end{bmatrix}, \ldots \right\},$$

$$W = \int_0^2 W(s)\,ds = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ldots \right\}.$$

Далее получаем

$$A = \int_0^2 N(s)M(s)\,ds = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots \right\},$$

$$D = I_{\mathbf{B}_2} - A = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ldots \right\},$$

$$\mathcal{P}_{N(D)} = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots \right\},$$

$$\mathcal{P}_{Y_D} = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots \right\},$$

$$D^- = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ldots \right\},$$

$$S = \mathcal{P}_{Y_D} W = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots \right\},$$

$$\mathcal{P}_{N(S)} = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ldots \right\},$$

$$\mathcal{P}_{Y_S} = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ldots \right\}.$$

Очевидно, что построенные проекторы и операторы ограничены в банаховом пространстве **c**.

Для построения обобщенно-обратного оператора L^- вычислим операторы

$$S^- = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots \right\},$$

$$S^- \mathcal{P}_{Y_D} = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots \right\},$$

$$\widetilde{D} = \big[I_{\mathbf{B}_2} + D^- A\big] W = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ldots \right\},$$

$$D^- - \widetilde{D} S^- \mathcal{P}_{Y_D} = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ldots \right\}.$$

Тогда

$$\widetilde{M}(t) = \int\limits_0^t M(s)\,ds = \operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} \dfrac{t^2}{2} & 2t & \dfrac{t^2}{2} \\ t & \dfrac{t^3}{3} - t^2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dfrac{t^2}{2} & 2t & \dfrac{t^2}{2} \\ t & \dfrac{t^3}{3} - t^2 & 0 \end{bmatrix}, \ldots \right\}, \tag{27}$$

$$\widetilde{M}(t)\left[D^{-}-\widetilde{D}S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}\right]-S^{-}\mathcal{P}_{Y_D}=$$
$$=\operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix}1-\dfrac{t^2}{2} & 2t & 1\\ -t & \dfrac{t^3}{3}-t^2 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1-\dfrac{t^2}{2} & 2t & 1\\ -t & \dfrac{t^3}{3}-t^2 & 0\end{bmatrix},\ldots\right\}. \qquad (28)$$

Подставив (27), (28) в формулу (15), получим обобщенно-обратный оператор к интегро-дифференциальному оператору (26):

$$\left(L^{-}f\right)(t)=\int\limits_0^t f(s)\,ds+$$
$$+\operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix}1-\dfrac{t^2}{2} & 2t & 1\\ -t & \dfrac{t^3}{3}-t^2 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1-\dfrac{t^2}{2} & 2t & 1\\ -t & \dfrac{t^3}{3}-t^2 & 0\end{bmatrix},\ldots\right\}\int\limits_0^2 N(s)f(s)\,ds.$$

Литература

1. *Ben-Israel A., Greville T. N. E.* Generalized Inverses. Theory and applications. – 2nd ed. – New-York: Springer-Verlag, 2003. – 420 p.
2. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems // Inverse and Ill-Posed Problems Series. – 2nd ed. – Vol. 59. – Berlin: De Gruyter, 2016. – 296 p.
3. *Samoilenko A. M., Boichuk A. A., Zhuravlev V. F.* Linear boundary-value problems for normally solvable operator equations in a banach space // Differ. Equ. – 2014. – **50**, № 3. – P. 1 – 11.
4. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Нормально разрешимые краевые задачи. – Киев: Наук. думка, 2019. – 628 с.
5. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Покутный А. А.* Нормально разрешимые операторные уравнения в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 2. – С. 165 – 177; ***English translation:*** Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 2. – P. 179 – 192.
6. *Boichuk A. A., Medved' M., Zhuravliov V. F.* Fredholm boundary-value problems for linear delay systems defined by pairwise permutable matrices // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. – 2015. – № 23. – P. 1 – 9.
7. *Журавлев В. Ф.* Критерий разрешимости и представление решений линейных n- $(d$-$)$ нормальных операторных уравнений в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 2. – С. 167 – 182; ***English translation:*** Ukr. Math. J. – 2010. – **62**, № 2. – P. 186 – 202.
8. *Бойчук А. А., Покутный А. А.* Приложение эргодической теории к исследованию краевой задачи с периодическим операторным коэффициентом // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 3. – С. 329 – 338; ***English translation:*** Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 3. – P. 329 – 339.
9. *Журавльов В. П.* Узагальнене обернення операторів Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах // Нелін. коливання. – 2014. – **17**, № 3. – С. 351 – 364; ***English translation:*** J. Math. Sci. – 2016. – **212**, № 3. – P. 275 – 289.
10. *Ландо Ю. К.* Об индексе и нормальной разрешимости интегро-дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. – 1968. – **4**, № 6. – С. 1112 – 1126.
11. *Самойленко А. М., Бойчук О. А., Кривошея С. А.* Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1576 – 1579; ***English translation:*** Ukr. Math. J. – 1996. – **48**, № 11. – P. 1785 – 1789.
12. *Бойчук О. А., Головацька І. А.* Крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь // Нелін. коливання. – 2013. – **16**, № 4. – С. 460 – 474; ***English translation:*** J. Math. Sci. – 2014. – **203**, № 3. – P. 306 – 321.

13. *Бойчук О. А., Покутний О. О., Журавльов В. П.* Обмежені розв'язки еволюційних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 1. – С. 7 – 28; ***English translation:*** Ukr. Math. J. – 2018. – **70**, № 1. – P. 422 – 436.

14. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.

15. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.

16. *Попов М. М.* Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха // Математика сьогодні. – 2007. – Вип. 13. – С. 78 – 116.

17. *Boichuk A. A., Zhuravlev V. F.* Solvability criterion of integro-differential equations with degenerate kernel in Banach spaces // Nonlinear Dyn. Syst. Theory. – 2018. – **18**, № 4. – P. 331 – 341.

Получено 28.02.19,
после доработки — 02.05.19