УДК 517.956.3

О НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА*

А. Т. Асанова

Ин-т математики и мат. моделирования
ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан
e-mail: assanova@math.kz

Г. К. Василина

Ин-т математики и мат. моделирования
ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан;
Алматин. ун-т энергетики и связи
ул. Байтурсынулы, 126, Алматы, 050013, Казахстан
e-mail: v_gulmira@mail.ru

А. Е. Иманчиев

Ин-т математики и мат. моделирования
ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан;
Актюбин. регионал. гос. ун-т им. К. Жубанова
пр. А. Молдагуловой, 34-А, Актобе, 030000, Казахстан
e-mail: imanchiev_ae@mail.ru

The initial boundary-value problem for the integro-differential equation of third order is considered. Replacing the required function and its time derivative by a combination of two new unknown functions, we reduce this problem to an equivalent problem consisting of a family of multipoint problems for a system of two Volterra first-order integro-differential equations and integral relations. Algorithms for finding a solution of the equivalent problem are constructed. By using the parametrization method, we derive conditions of the unique solvability of a family of multipoint problems for the system of Volterra first-order integro-differential equations in terms of initial data. We establish conditions for the existence of a unique classical solution of the initial boundary-value problem for the integro-differential equation of third order in terms of the coefficients of the equation and boundary functions.

Розглядається початково-крайова задача для інтегро-диференціального рівняння третього порядку. За допомогою заміни шуканої функції та її похідної за часом комбінацією двох нових невідомих функцій ця задача зводиться до еквівалентної задачі, що складається з сім'ї багатоточкових задач для системи двох інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерра першого порядку та інтегральних співвідношень. Побудовано алгоритми знаходження розв'язку еквівалентної задачі. Одержано умови однозначної розв'язності сім'ї багатоточкових задач для системи інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерра першого порядку в термінах вихідних даних за допомогою методу параметризації. Встановлено умови існування єдиного класичного розв'язку початково-крайової задачі для інтегро-диференціального рівняння третього порядку в термінах коефіцієнтів рівняння та граничних функцій.

1. Постановка задачи. На $\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$ рассматривается начально-краевая задача для

© А. Т. Асанова, Г. К. Василина, А. Е. Иманчиев, 2019

интегро-дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} = A_1(t,x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + A_2(t,x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_3(t,x)\,\frac{\partial u}{\partial x} + A_4(t,x)\,\frac{\partial u}{\partial t} + A_5(t,x)u +$$

$$+ \int\limits_0^t \left\{ Z_1(t,s,x)\,\frac{\partial u(s,x)}{\partial x} + Z_2(t,s,x)u(s,x) \right\} ds + f(t,x), \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=0}^{m} \left\{ P_{i,j}(x)\,\frac{\partial u(t_j,x)}{\partial x} + S_{i,j}(x)\ \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=t_j} + L_{i,j}(x)u(t_j,x) \right\} = \varphi_i(x), \tag{1.2}$$

$$i = 1,2, \quad x \in [0,\omega],$$

$$u(t,0) = \psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.3}$$

где $u(t,x)$ — искомая функция, функции $A_s(t,x),\ s = \overline{1,5},\ f(t,x)$ непрерывны на Ω, функции $Z_l(t,\tau,x)$ непрерывны на $[0,T] \times \Omega,\ l = 1,2,$ функции $P_{i,j}(x),\ S_{i,j}(x),\ L_{i,j}(x),\ i = \overline{1,2},$ $j = \overline{0,m},\ \varphi_i(x),\ i = 1,2,$ непрерывны на $[0,\omega],\ 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = T,$ функция $\psi(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0,T]$.

Пусть $C\left(\Omega, \mathbb{R}^k\right)$ — пространство вектор-функций $v(t,x)$, непрерывных на Ω с нормой

$$\|v\|_0 = \max_{(t,x)\in\Omega} \|v(t,x)\|, \qquad \|v(t,x)\| = \max_{i=\overline{1,k}} |v_i(t,x)|;$$

$C\left([0,\omega], \mathbb{R}^k\right)$ — пространство вектор-функций $\varphi(x)$, непрерывных на $[0,\omega]$ с нормой

$$\|\varphi\|_0 = \max_{x\in[0,\omega]} \|\varphi(x)\|;$$

$C^1\left([0,T], \mathbb{R}^k\right)$ — пространство вектор-функций $\psi(t)$, непрерывно дифференцируемых на $[0,T]$ с нормой

$$\|\psi\|_1 = \max\left(\max_{t\in[0,T]} \|\psi(t)\|, \max_{t\in[0,T]} \|\dot{\psi}(t)\| \right), \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Функция $u(t,x) \in C(\Omega,\mathbb{R})$, имеющая частные производные

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega,\mathbb{R}), \qquad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega,\mathbb{R}), \qquad \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} \in C(\Omega,\mathbb{R}),$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t} \in C(\Omega,\mathbb{R}), \qquad \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x \partial t^2} \in C(\Omega,\mathbb{R}),$$

называется решением задачи (1.1) – (1.3), если она удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению третьего порядка (1.1) для всех $(t,x) \in \Omega$ и граничным условиям (1.2), (1.3).

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № АР 05131220).

Интегро-дифференциальные уравнения в частных производных описывают многие физические процессы, которые носят эридитарный характер, т. е. такие явления, в которых учитывается не только настоящее положение системы или ближайшее предыдущее, но также все предыдущие положения. Примером может служить явление упругости, где деформация упругого бруса или кручение струны зависят не только от природы применяемых сил, но также от предыдущих деформаций, которым был подвергнут брус или струна. Другими явлениями такого рода являются магнитный или электрический гистерезис, запаздывание, перенос лучистой энергии и диффузия нейтронов [1 – 7]. Интегро-дифференциальное уравнение (1.1) можно трактовать также как нагруженное дифференциальное уравнение третьего порядка [4, с. 28].

В предлагаемой работе рассматриваются вопросы существования единственного решения начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения третьего порядка (1.1) – (1.3). С помощью новых неизвестных функций исследуемая задача сведена к эквивалентной многоточечной задаче для системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра первого порядка и интегральным соотношениям. Предложены алгоритмы нахождения решения эквивалентной задачи. Установлены условия существования единственного решения задачи (1.1) – (1.3) в терминах разрешимости многоточечной задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра первого порядка. Получены условия однозначной разрешимости многоточечной задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра первого порядка в терминах исходных данных.

2. Переход к эквивалентной задаче. Искомую функцию $u(t,x)$ и ее производную по времени $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}$ заменим следующим образом:

$$u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x), \qquad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \alpha[u_1(t,x) - u_2(t,x)],$$

здесь $\alpha = \max\left(\max_{(t,x)\in\Omega}\{|A_1(t,x)| + |A_3(t,x)|\}, 1\right)$. Далее введем следующие обозначения:

$$A(t,x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha + A_1(t,x) + \dfrac{A_3(t,x)}{\alpha} & -\alpha - A_1(t,x) + \dfrac{A_3(t,x)}{\alpha} \\ \alpha - A_1(t,x) - \dfrac{A_3(t,x)}{\alpha} & -\alpha + A_1(t,x) - \dfrac{A_3(t,x)}{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad U(t,x) = \begin{pmatrix} u_1(t,x) \\ u_2(t,x) \end{pmatrix},$$

$$B(t,x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_2(t,x) & -A_2(t,x) \\ -A_2(t,x) & A_2(t,x) \end{pmatrix}, \qquad V(t,x) = \frac{\partial U(t,x)}{\partial x}, \qquad W(t,x) = \frac{\partial U(t,x)}{\partial t},$$

$$C(t,x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_4(t,x) + \dfrac{A_5(t,x)}{\alpha} & -A_4(t,x) + \dfrac{A_5(t,x)}{\alpha} \\ -\dfrac{A_5(t,x)}{\alpha} - A_4(t,x) & -\dfrac{A_5(t,x)}{\alpha} + A_4(t,x) \end{pmatrix}, \qquad F(t,x) = \begin{pmatrix} \dfrac{f(t,x)}{2\alpha} \\ \dfrac{f(t,x)}{2\alpha} \end{pmatrix},$$

$$K_l(t,s,x) = \frac{1}{2\alpha}\begin{pmatrix} Z_l(t,s,x) & Z_l(t,s,x) \\ -Z_l(t,s,x) & -Z_l(t,s,x) \end{pmatrix}, \quad l = 1,2, \qquad \Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix},$$

$$M_i(x) = \begin{pmatrix} P_{1,i}(x) & P_{1,i}(x) \\ P_{2,i}(x) & P_{2,i}(x) \end{pmatrix}, \quad L_i(x) = \begin{pmatrix} L_{1,i}(x) + \alpha S_{1,i}(x) & L_{1,i}(x) - \alpha S_{1,i}(x) \\ L_{2,i}(x) + \alpha S_{2,i}(x) & L_{2,i}(x) - \alpha S_{2,i}(x) \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0,m},$$

$$\Psi(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi(t) + \dfrac{\dot{\psi}(t)}{\alpha} \\ \psi(t) - \dfrac{\dot{\psi}(t)}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

После несложных преобразований задача (1.1) – (1.3) перейдет в следующую эквивалентную задачу:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A(t,x)V + \int\limits_0^t K_1(t,s,x)V(s,x)ds + B(t,x)W(t,x) + C(t,x)U(t,x) +$$

$$+ \int\limits_0^t K_2(t,s,x)U(s,x)ds + F(t,x), \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=0}^m M_i(x)V(t_i,x) + \sum_{i=0}^m L_i(x)U(t_i,x) = \Phi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{2.2}$$

$$U(t,x) = \Psi(t) + \int\limits_0^x V(t,\xi)d\xi, \qquad W(t,x) = \dot{\Psi}(t) + \int\limits_0^x \frac{\partial V(t,\xi)}{\partial t}\,d\xi. \tag{2.3}$$

В интегральных соотношениях (2.5) учтено условие (1.3).

Решением задачи (2.3) – (2.5) является тройка функций $(V(t,x), W(t,x), U(t,x))$, где функция $V(t,x) \in C\left(\Omega, \mathbb{R}^2\right)$, удовлетворяющая двумерной системе интегро-дифференциальных уравнений первого порядка (2.3) и многоточечному условию (2.4), имеет частные производные $\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x} \in C\left(\Omega, \mathbb{R}^2\right)$, $\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t} \in C\left(\Omega, \mathbb{R}^2\right)$, $\dfrac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x \partial t} \in C\left(\Omega, \mathbb{R}^2\right)$, а функции $U(t,x)$ и $W(t,x)$ связаны с функциями $V(t,x)$ и $\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t}$ интегральными соотношениями (2.5).

Если функция $u^*(t,x)$ является решением задачи (1.1) – (1.3), то тройка функций

$$\left(V^*(t,x), W^*(t,x), U^*(t,x)\right),$$

где

$$u_1^*(t,x) = \frac{1}{2}\,u^*(t,x) + \frac{1}{2\alpha}\,\frac{\partial u^*(t,x)}{\partial t}, \qquad u_2^*(t,x) = \frac{1}{2}\,u^*(t,x) - \frac{1}{2\alpha}\,\frac{\partial u^*(t,x)}{\partial t},$$

$$U^*(t,x) = \begin{pmatrix} u_1^*(t,x) \\ u_2^*(t,x) \end{pmatrix}, \qquad V^*(t,x) = \frac{\partial U^*(t,x)}{\partial x}, \qquad W^*(t,x) = \frac{\partial U^*(t,x)}{\partial t},$$

будет решением задачи (2.3) – (2.5). И наоборот, если тройка функций

$$\left(V^{**}(t,x), W^{**}(t,x), U^{**}(t,x)\right),$$

где

$$U^{**}(t,x) = \begin{pmatrix} u_1^{**}(t,x) \\ u_2^{**}(t,x) \end{pmatrix}, \qquad V^{**}(t,x) = \frac{\partial U^{**}(t,x)}{\partial x}, \qquad W^{**}(t,x) = \frac{\partial U^{**}(t,x)}{\partial t},$$

является решением задачи (2.3) – (2.5), то функция $u^{**}(t,x)$ с непрерывными частными производными, определяемая равенствами

$$u^{**}(t,x) = u_1^{**}(t,x) + u_2^{**}(t,x), \qquad \frac{\partial u^{**}(t,x)}{\partial t} = \alpha \left[u_1^{**}(t,x) - u_2^{**}(t,x) \right],$$

$$\frac{\partial u^{**}(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial u_1^{**}(t,x)}{\partial x} + \frac{\partial u_2^{**}(t,x)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 u^{**}(t,x)}{\partial x \partial t} = \alpha \left[\frac{\partial u_1^{**}(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial u_2^{**}(t,x)}{\partial t} \right],$$

$$\frac{\partial^2 u^{**}(t,x)}{\partial t^2} = \alpha \left[\frac{\partial^2 u_1^{**}(t,x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_2^{**}(t,x)}{\partial t^2} \right],$$

$$\frac{\partial^3 u^{**}(t,x)}{\partial x \partial t^2} = \alpha \left[\frac{\partial^2 u_1^{**}(t,x)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u_2^{**}(t,x)}{\partial x \partial t} \right]$$

для всех $(t,x) \in \Omega$, будет решением задачи (1.1) – (1.3).

Задача (2.3) – (2.5) при фиксированных $U(t,x)$, $W(t,x)$ является семейством многоточечных задач для системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра относительно функции $V(t,x)$. Роль параметра семейства играет переменная x, непрерывно изменяющаяся на $[0,\omega]$. Интегральные соотношения (2.5) позволяют определить функции $U(t,x)$ и $W(t,x)$ через $V(t,x)$ и $\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t}$ для всех $(t,x) \in \Omega$.

Таким образом, имеем замкнутую систему уравнений для нахождения тройки функций $(V(t,x), W(t,x), U(t,x))$. Для нахождения решения задачи (2.3) – (2.5) используется итерационный процесс, где тройка последовательных приближений

$$\left(V^{(k)}(t,x), W^{(k)}(t,x), U^{(k)}(t,x) \right)$$

определяется по следующему алгоритму $\mathcal{A}$:

Шаг 0. 1) Полагая $U(t,x) = \Psi(t)$, $W(t,x) = \dot{\Psi}(t)$ в правой части системы (2.3) и многоточечном условии (2.4) и решая семейство многоточечных задач (2.3), (2.4), находим начальное приближение $V^{(0)}(t,x)$ для всех $(t,x) \in \Omega$. 2) Из интегральных соотношений (2.5) последовательно при $V(t,x) = V^{(0)}(t,x)$ и $\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \dfrac{\partial V^{(0)}(t,x)}{\partial t}$ определяем $U^{(0)}(t,x)$ и $W^{(0)}(t,x)$ для всех $(t,x) \in \Omega$.

Шаг 1. 1) Полагая $U(t,x) = U^{(0)}(t,x)$, $W(t,x) = W^{(0)}(t,x)$ в правой части системы (2.3) и многоточечном условии (2.4), снова решая семейство многоточечных задач (2.3), (2.4), находим $V^{(1)}(t,x)$ для всех $(t,x) \in \Omega$. 2) Из интегральных соотношений (2.5) при $V(t,x) = V^{(1)}(t,x)$ и $\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \dfrac{\partial V^{(1)}(t,x)}{\partial t}$ последовательно определяем $U^{(1)}(t,x)$, $W^{(1)}(t,x)$ для всех $(t,x) \in \Omega$.

И так далее.

Шаг k. 1) Полагая $U(t,x) = U^{(k-1)}(t,x)$, $W(t,x) = W^{(k-1)}(t,x)$ в правой части системы (2.3) и многоточечном условии (2.4), снова решая семейство многоточечных задач (2.3), (2.4), находим $V^{(k)}(t,x)$ для всех $(t,x) \in \Omega$. 2) Из интегральных соотношений (2.5) при $V(t,x) = V^{(k)}(t,x)$ и $\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \dfrac{\partial V^{(k)}(t,x)}{\partial t}$ последовательно определяем $U^{(k)}(t,x)$, $W^{(k)}(t,x)$ для всех $(t,x) \in \Omega$.

$k = 1, 2, 3, \ldots$.

Предлагаемый алгоритм разбивает процесс нахождения решения задачи (2.3) – (2.5) на две части: а) решение семейства многоточечных задач для системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра относительно $V(t,x)$; б) определение из интегральных соотношений (2.5) функций $U(t,x)$ и $W(t,x)$.

Таким образом, основным условием реализуемости построенного алгоритма является однозначная разрешимость семейства многоточечных задач для системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра (2.3), (2.4) относительно функции $V(t,x)$.

3. Семейство многоточечных задач для системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра. При исследовании краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений возникают вопросы, связанные со свойствами интегро-дифференциальных уравнений. Если задача Коши для дифференциальных уравнений, вообще говоря, в любой точке области гладкости коэффициентов однозначно разрешима, то для интегро-дифференциальных уравнений это далеко не так [8 – 12]. Точки, в которых нарушается единственность решения задачи Коши, следуя Я. В. Быкову [12], называются особенными. Особенные точки отражают специфику интегро-дифференциальных уравнений. Двухточечные краевые задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма рассматривались в работах [13 – 17]. Установлены необходимые и достаточные условия однозначной, корректной разрешимости исследуемых задач методом параметризации [18]. Двухточечные краевые задачи с параметром для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма высокого порядка исследовались в работах [19 – 22]. Теория и методы решения обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма всесторонне изучены в монографии [23]. Многоточечные задачи для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, зависящих от параметра, возникают при исследовании гибридных систем и представляют большой интерес ввиду многочисленных приложений в задачах биологии, химии, экологии и др. [24 – 34]. Нелокальные и начально-краевые задачи для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков также приводят к семействам многоточечных краевых задач для систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений [30 – 34].

В этом пункте исследуется семейство многоточечных задач для n-мерной системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра. Приведена схема метода параметризации. Рассматриваемая задача сводится к эквивалентной задаче, состоящей из семейства задач Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра, и функциональным уравнениям относительно параметров. Далее построены алгоритмы нахождения приближенного решения эквивалентной задачи. Установлены условия сходимости предложенного алгоритма, одновременно обеспечивающие существование единственного решения эквивалентной задачи с параметрами. Получены достаточные условия однозначной разрешимости семейства многоточечных краевых задач в терминах коэффициентов системы и граничных матриц. Приведено следствие из основного утверждения при отсутствии разбиения области.

Рассмотрим семейство многоточечных задач для системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A(t,x)V + \int\limits_0^t K_1(t,\tau,x)V(\tau,x)d\tau + F(t,x), \quad t \in [0,T], \quad x \in [0,\omega], \tag{3.1}$$

$$\sum_{i=0}^{m} M_i(x)V(t_i,x) = \Phi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{3.2}$$

где $V(t,x) = \mathrm{col}\,(V_1(t,x), V_2(t,x), \ldots, V_n(t,x))$, $(n\times n)$-мерные матрицы $A(t,x)$, $K_1(t,s,x)$ непрерывны на Ω, $[0,T]\times\Omega$, соответственно, n-мерная вектор-функция $F(t,x)$ непрерывна на Ω, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m = T$, n-мерная вектор-функция $\Phi(x)$ непрерывна на $[0,\omega]$.

Решением семейства многоточечных задач (3.1), (3.2) называется функция $V(t,x)$, непрерывная на Ω, имеющая непрерывную производную по t и удовлетворяющая системе интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра (3.1) при всех $(t,x)\in\Omega$, а также многоточечному краевому условию (3.2).

Схема метода параметризации. По шагу $h > 0$ разобьем область Ω на подобласти:

$$\Omega = \bigcup_{r=1}^{N} \Omega_r, \qquad \Omega_r = [(r-1)h, rh) \times [0,\omega], \quad r = \overline{1,N}, \quad Nh = T.$$

Пусть $V_r(t,x)$ — сужение функции $V(t,x)$ на Ω_r, т. е. $V_r(t,x) = V(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,N}$. Тогда задача (3.1), (3.2) преобразуется в эквивалентное семейство многоточечных задач для системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} = A(t,x)V_r + \sum_{i=1}^{r-1} \int\limits_{(i-1)h}^{ih} K_1(t,s,x)V_i(s,x)ds +$$

$$+ \int\limits_{(r-1)h}^{t} K_1(t,s,x)V_r(s,x)ds + F(t,x), \quad (t,x)\in\Omega_r, \quad r=\overline{1,N}, \tag{3.3}$$

$$M_0(x)V_1(t_0,x) + \sum_{i=1}^{m-1} M_i(x)V_{r_i}(t_i,x) + M_m(x)\lim_{t\to T-0} V_N(t,x) = \Phi(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{3.4}$$

$$\lim_{t\to ph-0} V_p(t,x) = V_{p+1}(ph,x), \quad p=\overline{1,N-1}, \quad x\in[0,\omega]. \tag{3.5}$$

Здесь r_i — номер интервала, которому принадлежит точка t_i: $t_i \in [(r_i-1)h, r_ih)$, $1 \le$ $\le r_i \le N$, $i=\overline{1,m-1}$. Равенства (3.5) являются условиями непрерывности (склеивания) решения на внутренних линиях разбиения $t = ph$, $p=\overline{1,N-1}$. При отсутствии разбиения отсутствует также условие (3.5).

Решением задачи (3.3) – (3.5) является система функций

$$V([t],x) = \big(V_1(t,x), V_2(t,x), \ldots, V_N(t,x)\big)',$$

где $V_r(t,x)$ — сужение функции $V(t,x)$ на Ω_r: $V_r\colon \Omega_r \to \mathbb{R}^n$, непрерывно и ограничено на Ω_r, имеет непрерывную производную по t на Ω_r и конечный левосторонний предел

$\lim_{t\to rh-0} V_r(t,x)$, $r=\overline{1,N}$, удовлетворяющая системе (3.3), краевому условию (3.4) и условию непрерывности (3.5).

Эквивалентность задач (3.1), (3.2) и (3.3) – (3.5) заключается в следующем.

Функция $V(t,x)$, определяемая равенствами $V(t,x)=V_r(t,x)$ при $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,N}$, $V(T,x)=\lim_{t\to Nh-0} V_N(t,x)$ при $x\in[0,\omega]$, удовлетворяет системе интегро-дифференциальных уравнений (3.1) при всех $(t,x)\in\Omega$ и многоточечному условию (3.2) при всех $x\in[0,\omega]$. Если $V(t,x)$ — решение семейства краевых задач (3.1), (3.2), то система его сужений $\{V_r(t,x)\}$, $r=\overline{1,N}$, является решением семейства задач (3.3) – (3.5). И, обратно, если система функций $V([t],x)=(V_1(t,x),V_2(t,x),\ldots,V_N(t,x))'$ — решение семейства задач (3.3) – (3.5), то функция $V(t,x)$, получаемая склеиванием систем функций $\{V_r(t,x)\}$, $r=\overline{1,N}$, будет решением исходного семейства краевых задач (3.1), (3.2). Из непрерывности коэффициента $A(t,x)$, ядра интегрального слагаемого $K(t,s,x)$, правой части $F(t,x)$ и функции $V(t,x)$ вытекает непрерывность $\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t}$.

Пусть $C\left(\Omega,h,\mathbb{R}^{nN}\right)$ — пространство систем функций

$$V([t],x)=\big(V_1(t,x),V_2(t,x),\ldots,V_N(t,x)\big)',$$

где функция $V_r\colon\Omega_r\to\mathbb{R}^n$ непрерывна и равномерно относительно $x\in[0,\omega]$ имеет конечный левосторонний предел $\lim_{t\to rh-0} V_r(t,x)$, $r=\overline{1,N}$, с нормой

$$\|V\|_1=\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{(t,x)\in\Omega_r}\|V_r(t,x)\|;$$

$C\left([0,\omega],\mathbb{R}^{nN}\right)$ — пространство функций $\lambda(x)=(\lambda_1(x),\lambda_2(x),\ldots,\ \lambda_N(x))'$, где функция $\lambda_r\colon[0,\omega]\to R^n$ непрерывна на $[0,\omega]$ с нормой $\|\lambda\|_2=\max_{r=\overline{1,N}}\max_{x\in[0,\omega]}\|\lambda_r(x)\|$.

Введем обозначения $\lambda_r(x)=V((r-1)h,x)$, $r=\overline{1,N}$. В задаче (3.3) – (3.5) осуществим замену функции $V_r(t,x)$: $V_r(t,x)=v_r(t,x)+\lambda_r(x)$ и перейдем к эквивалентной задаче

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}=A(t,x)v_r+A(t,x)\lambda_r(x)+\sum_{i=1}^{r-1}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}K_1(t,s,x)[v_i(s,x)+\lambda_i(x)]ds+$$

$$+\int\limits_{(r-1)h}^{t}K_1(t,s,x)[v_r(s,x)+\lambda_r(x)]ds+F(t,x),\quad (t,x)\in\Omega_r,\quad r=\overline{1,N},\tag{3.6}$$

$$v_r((r-1)h,x)=0,\quad r=\overline{1,N},\quad x\in[0,\omega],\tag{3.7}$$

$$M_0(x)\lambda_1(x)+\sum_{i=1}^{m-1}M_i(x)v_{r_i}(t_i,x)+\sum_{i=1}^{m-1}M_i(x)\lambda_{r_i}(x)+$$

$$+M_m(x)\lim_{t\to T-0}v_N(t,x)+M_m(x)\lambda_N(x)=\Phi(x),\quad x\in[0,\omega],\tag{3.8}$$

$$\lim_{t\to ph-0}v_p(t,x)+\lambda_p(x)=\lambda_{p+1}(x),\quad p=\overline{1,N-1},\quad x\in[0,\omega].\tag{3.9}$$

В отличие от (3.3) – (3.5) в задаче (3.6) – (3.9) появились начальные условия $v_r((r-1)h,x)=$ $=0$.

Решением задачи (3.6) – (3.9) является пара $(v^*([t],x),\lambda^*(x))$, где

$$v^*([t],x)=(v_1^*(t,x),v_2^*(t,x),\ldots,v_N^*(t,x))'\in C\left(\Omega,h,\mathbb{R}^{nN}\right),$$

$$\lambda^*(x)=(\lambda_1^*(x),\lambda_2^*(x),\ldots,\lambda_N^*(x))'\in C\left([0,\omega],\mathbb{R}^{nN}\right),$$

функции $v_r^*(t,x)$ непрерывно дифференцируемы по t на Ω_r, и при $\lambda_r(x)=\lambda_r^*(x),\ r=\overline{1,N}$, удовлетворяет семейству интегро-дифференциальных уравнений с функциональными параметрами (3.6), начальным условиям (3.7) при всех $(t,x)\in\Omega_r,\ r=\overline{1,N}$, многоточечному условию (3.8), условию непрерывности (3.9) при всех $x\in[0,\omega]$.

Задачи (3.1), (3.2) и (3.6) – (3.9) эквивалентны в следующем смысле. Если функция $V(t,x)$ является решением задачи (3.1), (3.2), то пара $(v([t],x),\lambda(x))$ с компонентами $v_r(t,x)=V(t,x)-V((r-1)h,x),\ (t,x)\in\Omega_r,\ \lambda_r(x)=V((r-1)h,x),\ x\in[0,\omega],\ r=\overline{1,N}$, будет решением задачи (3.6) – (3.9). И, обратно, если пара $(v^*([t],x),\lambda^*(x))$, где $v^*([t],x)=(v_1^*(t,x),v_2^*(t,x),\ldots,v_N^*(t,x))',\ \lambda^*(x)=(\lambda_1^*(x),\lambda_2^*(x),\ldots,\lambda_N^*(x))'$, — решение задачи (3.6) – (3.9), то функция $V^*(t,x)$, определяемая равенствами

$$V^*(t,x)=\lambda_r^*(x)+v_r^*(t,x),\quad (t,x)\in\Omega_r,\quad r=\overline{1,N},$$

$$V^*(T,x)=\lambda_N^*(x)+\lim_{t\to T-0}v_N^*(t,x),\quad x\in[0,\omega],$$

является решением задачи (3.1), (3.2). Из непрерывности и ограниченности функций $v_r^*(t,x)$ на $\Omega_r,\ r=\overline{1,N}$, следует существование левосторонних пределов $\lim_{t\to rh-0}v_r^*(t,x)$, а значения $v_1^*(0,x),\ v_{r_j}^*(t_j,x),\ j=\overline{2,m-1},\ \lim_{t\to T-0}v_N^*(t,x)$ удовлетворяют условию (3.8) при всех $x\in[0,\omega]$.

При фиксированных значениях параметров $\lambda_r(x)$ задача (3.6), (3.7) является семейством задач Коши для системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с начальными условиями на линиях $t=(r-1)h,\ r=\overline{1,N}$. Соотношения (3.8), (3.9) позволяют определить неизвестные параметры $\lambda_r(x),\ r=\overline{1,N}$.

Решения задач Коши — функции $v_r(t,x)$ — удовлетворяют семейству интегральных уравнений Вольтерра

$$\begin{aligned}v_r(t,x)={}&\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(\tau,x)v_r(\tau,x)d\tau+\int\limits_{(r-1)h}^{t}A(\tau,x)d\tau\lambda_r(x)+\\&+\sum_{i=1}^{r-1}\int\limits_{(r-1)h}^{t}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}K_1(\tau,s,x)v_i(s,x)ds\,d\tau+\sum_{i=1}^{r-1}\int\limits_{(r-1)h}^{t}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}K_1(\tau,s,x)dsd\tau\lambda_i(x)+\\&+\int\limits_{(r-1)h}^{t}\int\limits_{(r-1)h}^{\tau}K_1(\tau,s,x)v_r(s,x)dsd\tau+\int\limits_{(r-1)h}^{t}\int\limits_{(r-1)h}^{\tau}K_1(\tau,s,x)dsd\tau\lambda_r(x)+\\&+\int\limits_{(r-1)h}^{t}F(\tau,x)d\tau,\quad (t,x)\in\Omega_r,\quad r=\overline{1,N}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Так как

$$\int\limits_{(r-1)h}^{t}\left[\int\limits_{(r-1)h}^{\tau}K_1(\tau,s,x)v_r(s,x)ds\right]d\tau=\int\limits_{(r-1)h}^{t}\left[\int\limits_{s}^{t}K_1(\tau,s,x)d\tau\right]v_r(s,x)ds,$$

меняя местами переменные $s,\ \tau$ и учитывая обозначение

$$L(t,\tau,x)=A(\tau,x)+\int\limits_{\tau}^{t}K_1(s,\tau,x)ds,$$

переписываем представление (3.10) следующим образом:

$$v_r(t,x)=\int\limits_{(r-1)h}^{t}L(t,\tau,x)v_r(\tau,x)d\tau+\int\limits_{(r-1)h}^{t}L(t,\tau,x)d\tau\lambda_r(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{r-1}\int\limits_{(r-1)h}^{t}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}K_1(\tau,s,x)v_i(s,x)dsd\tau+\sum_{i=1}^{r-1}\int\limits_{(r-1)h}^{t}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}K_1(\tau,s,x)dsd\tau\lambda_i(x)+$$

$$+\int\limits_{(r-1)h}^{t}F(\tau,x)d\tau,\quad t\in[0,T],\quad x\in[0,\omega]. \tag{3.11}$$

Подставляя правую часть выражения из (3.11) при $t=\tau$ вместо $v_r(\tau,x)$ и повторяя этот процесс $\nu,\ \nu\in\mathbb{N}$, раз, получаем

$$v_r(t,x)=D_{\nu,r}(t,x)\lambda_r(x)+\sum_{i=1}^{r-1}\tilde{D}_{\nu,r,i}(t,x)\lambda_i(x)+G_{\nu,r}(t,x,v_r)+$$

$$+\sum_{i=1}^{r-1}\tilde{G}_{\nu,r,i}(t,x,v_i)+F_{\nu,r}(t,x),\quad (t,x)\in\Omega_r,\quad r=\overline{1,N}, \tag{3.12}$$

где

$$D_{\nu,r}(t,x)=\int\limits_{(r-1)h}^{t}L(t,\tau,x)d\tau+\int\limits_{(r-1)h}^{t}L(t,\tau_1,x)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}L(\tau_1,\tau_2,x)d\tau_2d\tau_1+\ldots$$

$$\ldots+\int\limits_{(r-1)h}^{t}L(t,\tau_1,x)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}L(\tau_1,\tau_2,x)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}L(\tau_{\nu-1},\tau_\nu,x)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_2d\tau_1,$$

$$\tilde{D}_{\nu,r,i}(t,x)=\int\limits_{(r-1)h}^{t}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}K_1(\tau,s,x)dsd\tau+$$

$$+\int\limits_{(r-1)h}^{t} L(t,\tau_1,x)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}\int\limits_{(i-1)h}^{ih} K_1(\tau_2,s,x)ds d\tau_2 d\tau_1+\ldots$$

$$\ldots+\int\limits_{(r-1)h}^{t} L(t,\tau_1,x)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} L(\tau_1,\tau_2,x)\ldots$$

$$\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\int\limits_{(i-1)h}^{ih} K_1(\tau_\nu,s,x)ds d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_2 d\tau_1,$$

$$G_{\nu,r}(t,x,v_r)=\int\limits_{(r-1)h}^{t} L(t,\tau_1,x)\ldots\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} L(\tau_{\nu-1},\tau_\nu,x)v_r(\tau_\nu,x)d\tau_\nu\ldots d\tau_2 d\tau_1,$$

$$\tilde{G}_{\nu,r,i}(t,x,v_i)=\int\limits_{(r-1)h}^{t}\int\limits_{(i-1)h}^{ih} K_1(\tau,s,x)v_i(s,x)ds d\tau+$$

$$+\int\limits_{(r-1)h}^{t} L(t,\tau_1,x)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}\int\limits_{(i-1)h}^{ih} K_1(\tau_2,s,x)v_i(s,x)ds d\tau_2 d\tau_1+\ldots$$

$$\ldots+\int\limits_{(r-1)h}^{t} L(t,\tau_1,x)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} L(\tau_1,\tau_2,x)\ldots$$

$$\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\int\limits_{(i-1)h}^{ih} K_1(\tau_\nu,s,x)v_i(s,x)ds d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_2 d\tau_1,$$

$$F_{\nu,r}(t,x)=\int\limits_{(r-1)h}^{t} F(\tau,x)d\tau+\int\limits_{(r-1)h}^{t} L(t,\tau_1,x)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} F(\tau_2,x)d\tau_2 d\tau_1+\ldots$$

$$\ldots+\int\limits_{(r-1)h}^{t} L(t,\tau_1,x)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} L(\tau_{\nu-2},\tau_{\nu-1},x)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} F(\tau_\nu,x)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1.$$

Определив из (3.12) левосторонние пределы от функции $v_r(t,x)$ при $t\to rh-0,\ r=\overline{1,N}$, значение $v_{r_i}(t,x)$ при $t=t_i,\ i=\overline{1,m-1}$, предварительно умножив равенство (3.8) на $h>0$, и подставив в соотношения (3.8), (3.9), получим систему линейных функциональных уравнений относительно $\lambda(x)$:

$$hM_0(x)\lambda_1(x)+h\sum_{i=1}^{m-1}M_i(x)\lambda_{r_i}(x)+h\sum_{i=1}^{m-1}M_i(x)\sum_{j=1}^{r_i-1}\tilde{D}_{\nu,r_i,j}(t,x)\lambda_j(x)+$$

$$+ hM_m(x)[I + D_{\nu,N}(T,x)]\lambda_N(x) + hM_m(x)\sum_{i=1}^{m-1}\tilde{D}_{\nu,N,i}(T,x)\lambda_i(x) =$$

$$= h\Phi(x) - h\sum_{i=1}^{m-1} M_i(x)F_{\nu,r_i}(t_i,x) - hM_m(x)F_{\nu,N}(T,x) -$$

$$- h\sum_{i=1}^{m-1} M_i(x)\left\{G_{\nu,r_i}(t_i,x,v_{r_i}) + \sum_{j=1}^{r_i-1}\tilde{G}_{\nu,r_i,j}(t_i,x,v_{r_i})\right\} -$$

$$- hM_m(x)\left\{G_{\nu,N}(T,x,v_N) + \sum_{i=1}^{m-1}\tilde{G}_{\nu,N,i}(T,x,v_i)\right\}, \qquad (3.13)$$

$$[I + D_{\nu,p}(ph,x)]\lambda_p(x) - \lambda_{p+1}(x) + \sum_{i=1}^{p-1}\tilde{D}_{\nu,p,i}(ph,x)\lambda_i(x) =$$

$$= -F_{\nu,p}(ph,x) - \left\{G_{\nu,p}(ph,x,v_p) + \sum_{i=1}^{p-1}\tilde{G}_{\nu,p,i}(ph,x,v_i)\right\}, \quad p = \overline{1,m-1}, \quad x \in [0,\omega]. \qquad (3.14)$$

Обозначим через $Q_\nu(h,x)$ матрицу, составленную из коэффициентов параметра $\lambda_r(x)$, $r = \overline{1,N}$, соответствующую левым частям (3.13) и (3.14). Уравнения (3.13), (3.14) перепишем в векторно-матричной форме:

$$Q_\nu(h,x)\lambda(x) = -F_\nu(h,x) - G_\nu(h,x,v), \qquad (3.15)$$

где

$$F_\nu(h,x) = \Bigg(h\sum_{i=1}^{m-1} M_i(x)F_{\nu,r_i}(t_i,x) + hM_m(x)F_{\nu,N}(T,x) -$$

$$- h\Phi(x), F_{\nu,1}(h,x), \ldots, F_{\nu,m-1}((m-1)h,x)\Bigg)',$$

$$G_\nu(h,x,v) = \Bigg(h\sum_{i=1}^{m-1} M_i(x)\left\{G_{\nu,r_i}(t_i,x,v_{r_i}) + \sum_{j=1}^{r_i-1}\tilde{G}_{\nu,r_i,j}(t_i,x,v_{r_i})\right\} + hM_m(x)\times$$

$$\times\left\{G_{\nu,N}(T,x,v_N) + \sum_{i=1}^{m-1}\tilde{G}_{\nu,N,i}(T,x,v_i)\right\}, G_{\nu,1}(h,x,v_1), G_{\nu,2}(2h,x,v_2) +$$

$$+ \tilde{G}_{\nu,2,1}(2h,x,v_1), \ldots, G_{\nu,m-1}((m-1)h,x,v_{m-1}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-2}\tilde{G}_{\nu,m-1,i}((m-1)h,x,v_i)\Bigg)'.$$

Соотношения (3.11) и (3.15) составляют замкнутую систему уравнений относительно $v_r(t,x)$ и $\lambda_r(x),\ r=\overline{1,N}$.

Если известна $\widetilde{v}([t],x)\in C\left(\Omega,h,\mathbb{R}^{nN}\right)$ с компонентами $\widetilde{v}_r(t,x)$, то из (3.15) можно найти $\lambda(x)\in C\left([0,\omega],\mathbb{R}^{nN}\right)$ с компонентами $\lambda_r(x),\ r=\overline{1,N}$. И обратно, если известна $\lambda(x)\in\in C\left([0,\omega],\mathbb{R}^{nN}\right)$, то из (3.11) можно найти $v([t],x)\in C\left(\Omega,h,\mathbb{R}^{nN}\right)$. Поскольку неизвестны как $v([t],x)$, так и $\lambda(x)$, применяется итерационный метод и решение задачи (3.6) – (3.9) $\big($пара $(v^*([t],x),\lambda^*(x))\in C\left(\Omega,h,\mathbb{R}^{nN}\right)\times C\left([0,\omega],\mathbb{R}^{nN}\right)$ с компонентами $(v_r^*(t,x),\lambda_r^*(x))$, $r=\overline{1,N}\big)$ находим как предел последовательности $\left(v^{(k)}([t],x),\lambda^{(k)}(x)\right)\in C\left(\Omega,h,\mathbb{R}^{nN}\right)\times\times C\left([0,\omega],\mathbb{R}^{nN}\right)$ с компонентами $\left(v_r^{(k)}(t,x),\lambda_r^{(k)}(x)\right),\ r=\overline{1,N},\ k=0,1,2,\ldots$.

Алгоритм и условия его сходимости. Поскольку неизвестными являются как функции $v_r(t,x)$, так и параметры $\lambda_r(x)$, для нахождения решения системы уравнений (3.11), (3.15) применяется итерационный процесс на основе следующего алгоритма $\mathcal{B}$:

Шаг 0. Предполагая, что при выбранных $h>0,\ \nu\in\mathbb{N}$, матрица $Q_\nu(h,x)\colon\mathbb{R}^{nN}\to\mathbb{R}^{nN}$ обратима для всех $x\in[0,\omega]$, начальное приближение по функциональному параметру $\lambda^{(0)}(x)=\left(\lambda_1^{(0)}(x),\lambda_2^{(0)}(x),\ldots,\lambda_N^{(0)}(x)\right)'\in C\left([0,\omega],\mathbb{R}^{nN}\right)$ определяем из системы линейных уравнений $Q_\nu(h,x)\lambda(x)=-F_\nu(h,x)$.

На Ω_r, решая семейство задач Коши (3.6), (3.7) при $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(0)}(x)$, находим

$$v^{(0)}([t],x)=\left(v_1^{(0)}(t,x),v_2^{(0)}(t,x),\ldots,v_N^{(0)}(t,x)\right)'\in C\left(\Omega,h,\mathbb{R}^{nN}\right).$$

Шаг 1. Подставив вместо $v([t],x)$ найденную функцию $v^{(0)}([t],x)$, из систем уравнений (3.15) определяем $\lambda^{(1)}(x)=\left(\lambda_1^{(1)}(x),\lambda_2^{(1)}(x),\ldots,\lambda_N^{(1)}(x)\right)'\in C\left([0,\omega],\mathbb{R}^{nN}\right)$.

На Ω_r, решая семейство задач Коши (3.6), (3.7) при $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(1)}(x)$, находим $v^{(1)}([t],x)==\left(v_1^{(1)}(t,x),v_2^{(1)}(t,x),\ldots,v_N^{(1)}(t,x)\right)'\in C\left(\Omega,h,\mathbb{R}^{nN}\right)$. И т. д.

Шаг k. Подставив вместо $v([t],x)$ найденную функцию $v^{(k-1)}([t],x)$, из систем уравнений (3.15) определяем $\lambda^{(k)}(x)=\left(\lambda_1^{(k)}(x),\lambda_2^{(k)}(x),\ldots,\lambda_N^{(k)}(x)\right)'\in C\left([0,\omega],\mathbb{R}^{nN}\right)$.

На Ω_r, решая семейство задач Коши (3.6), (3.7) при $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(k)}(x)$, находим

$$v^{(k)}([t],x)=\left(v_1^{(k)}(t,x),v_2^{(k)}(t,x),\ldots,v_N^{(k)}(t,x)\right)'\in C\left(\Omega,h,\mathbb{R}^{nN}\right),\quad k=1,2,\ldots.$$

Пусть

$$\alpha(x)=\max_{(t,\tau)\in[0,T]\times[0,T]}\|L(t,\tau,x)\|,\qquad \beta(x)=\max_{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]}\|K_1(t,s,x)\|,$$

$$\delta(x)=h^2\beta(x)e^{\alpha(x)h},\qquad \sigma_h(i,x)=e^{\alpha(x)h}-\sum_{j=0}^{i}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!},$$

$$\delta_1(r,x)=\frac{\delta(x)\left(\delta^r(x)+r(1-\delta(x))-1\right)}{(1-\delta(x))^2}.$$

Осуществимость и сходимость построенного алгоритма $\mathcal{B}$, а также существование единственного решения задачи (3.6) – (3.9) обеспечивают справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.1. *Пусть при некотором* ν, $\nu \in \mathbb{N}$, $(nN \times nN)$*-мерная матрица* $Q_\nu(h,x)$ *обратима для всех* $x \in [0,\omega]$ *и выполняются условия:*

1) $\left\|[Q_\nu(h,x)]^{-1}\right\| \le \gamma_\nu(h,x)$, *где* $\gamma_\nu(h,x)$ *— положительная непрерывная на* $[0,\omega]$ *функция;*

2)

$$q_\nu(h,x) = \gamma_\nu(h,x)\max\left(h\sum_{i=1}^{m}\|M_i(x)\|, 1\right)\left\{\sigma_h(\nu,x) + \max_{r=\overline{1,N}}\delta_1(r,x)\sigma_h(\nu-1,x) + \right.$$
$$\left. +(m-1)h^2\beta(x)\left[\sum_{j=0}^{\nu-1}\sigma_h(j,x) + \max_{r=\overline{1,N}}\delta_1(r,x)\sum_{j=0}^{\nu-2}\sigma_h(j,x)\right]\right\} \le \chi < 1,$$

где χ *—* const.

Тогда семейство задач (3.6) – (3.9) имеет единственное решение.

Доказательство. В силу непрерывности $A(t,x)$, $K_1(t,s,x)$, $M_j(t,x)$, $j=\overline{0,m}$, матрица $Q_\nu(h,x)$ непрерывна по $x\in[0,\omega]$. Тогда в силу условий теоремы и неравенства

$$\left\|[Q_\nu(h,x)]^{-1} - [Q_\nu(h,\bar{x})]^{-1}\right\| \le \left\|[Q_\nu(h,x)]^{-1}\right\| \cdot \|Q_\nu(h,x) - Q_\nu(h,\bar{x})\| \cdot \left\|[Q_\nu(h,\bar{x})]^{-1}\right\|,$$

где $x,\bar{x}\in[0,\omega]$, матрица $[Q_\nu(h,x)]^{-1}$ также непрерывна при всех $x\in[0,\omega]$. Тогда существует единственный $\lambda^{(0)}(x)$ с компонентами $\lambda_r^{(0)}(x) \in C([0,\omega],\mathbb{R}^n)$, $r=\overline{1,N}$, и

$$\left\|\lambda^{(0)}(x)\right\|_3 = \max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(0)}(x)\right\| \le \gamma_\nu(h,x)\|F_\nu(h,x)\|_3 \le$$
$$\le \gamma_\nu(h,x)\max\left\{1 + h\sum_{j=1}^{m}\|M_j(x)\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right\}\times$$
$$\times\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|F(t,x)\|, \|\Phi(x)\|\right)h. \tag{3.16}$$

При принятых предположениях задача Коши (3.6), (3.7) при $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$ для каждого фиксированного $x\in[0,\omega]$ имеет единственное решение $v^{(0)}([t],x)$ с компонентами $\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)$, $r=\overline{1,N}$. Используя неравенство Гронуолла – Беллмана в интегральных уравнениях (3.15), последовательно получаем

$$\left\|v_1^{(0)}(t,x)\right\| \le \left[e^{\alpha(x)t}-1\right]\left\|\lambda_1^{(0)}(x)\right\| + e^{\alpha(x)t}\sup_{t\in[0,h)}\|F(t,x)\|h, \quad (t,x)\in\Omega_1, \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\left\|v_r^{(0)}(t,x)\right\| \le \left[e^{\alpha(x)(t-(r-1)h)}-1\right]\left\|\lambda_r^{(0)}(x)\right\| + \\ + e^{\alpha(x)(t-(r-1)h)}\Bigg\{\sum_{i=1}^{r-1}\delta^i(x)\left[\left\|\lambda_1^{(0)}(x)\right\| + \sup_{t\in[0,h)}\|F(t,x)\|h\right] + \\ + \sum_{i=1}^{r-2}\delta^i(x)\left[\left\|\lambda_2^{(0)}(x)\right\| + \sup_{t\in[h,2h)}\|F(t,x)\|h\right] + \\ + \sum_{i=1}^{r-j}\delta^i(x)\left[\left\|\lambda_j^{(0)}(x)\right\| + \sup_{t\in[(j-1)h,jh)}\|F(t,x)\|h\right] + \ldots \\ \ldots + \delta(x)\left[\left\|\lambda_{r-1}^{(0)}(x)\right\| + \sup_{t\in[(r-2)h,(r-1)h)}\|F(t,x)\|h\right]\Bigg\} + \\ + e^{\alpha(x)(t-(r-1)h)}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|F(t,x)\|h, \quad (t,x)\in\Omega_r, \quad r=\overline{2,N}. \qquad (3.18)\end{aligned}$$

Из неравенств (3.17), (3.18) для всех $(t,x)\in\Omega_r,\ r=\overline{1,N},$ вытекает

$$\begin{aligned}\left\|v_r^{(0)}(t,x)\right\| \le \left[e^{\alpha(x)(t-(r-1)h)}-1\right]\left\|\lambda_r^{(0)}(x)\right\| + \\ + e^{\alpha(x)(t-(r-1)h)}\delta_1(r,x)\max_{j=\overline{1,r-1}}\left\|\lambda_j^{(0)}(x)\right\| + \\ + e^{\alpha(x)(t-(r-1)h)}\left\{\delta_1(r,x)\max_{j=\overline{1,r-1}}\sup_{t\in[(j-1)h,jh)}\|F(t,x)\| + \sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\|F(t,x)\|\right\}h. \qquad (3.19)\end{aligned}$$

Учитывая, что $\lambda^{(0)}(x)\in C\left([0,\omega],\mathbb{R}^{nN}\right)$, матрицы $A(t,x),\ K_1(t,s,x)$ и вектор $f(t,x)$ непрерывны на $\Omega,$ из (3.21) следует принадлежность $v^{(0)}([t],x)$ пространству $C\left(\Omega,h,\mathbb{R}^{nN}\right)$. Из (3.16), (3.19) имеем

$$\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|v_r^{(0)}(t,x)\right\| \le k_0(x,h,\nu)\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|F(t,x)\|,\|\Phi(x)\|\right), \qquad (3.20)$$

где

$$k_0(x,h,\nu)=\gamma_\nu(h,x)h\max\left\{1+h\sum_{j=1}^{m}\|M_j(x)\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!},\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right\}\times$$
$$\times\left(e^{\alpha(x)h}-1+e^{\alpha(x)h}\max_{r=\overline{1,N}}\delta_1(r,x)\right)+e^{\alpha(x)h}h\left(1+\max_{r=\overline{1,N}}\delta_1(r,x)\right).$$

По первому шагу алгоритма определяем $\lambda^{(1)}(x)\in C\left([0,\omega],\mathbb{R}^{nN}\right)$ и, используя (3.20), оцениваем разность $\lambda^{(1)}(x)-\lambda^{(0)}(x)$:

$$\left\|\lambda^{(1)}(x)-\lambda^{(0)}(x)\right\|_3 \le \gamma_\nu(h,x)\left\|G_\nu\left(h,x,v^{(0)}\right)\right\|_3 \le \gamma_\nu(h,x)\max\left(h\sum_{j=1}^{m}\|M_j(x)\|,1\right)\times$$

$$\times\left\{\frac{[\alpha(x)h]^{\nu}}{\nu!}+(m-1)h^2\beta(x)\sum_{i=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^i}{i!}\right\}\times$$

$$\times\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[(r-1)h,rh)}\left\|v_r^{(0)}(t,x)\right\|\le\gamma_\nu(h,x)\max\left(h\sum_{j=1}^{m}\|M_j(x)\|,1\right)\times$$

$$\times\left\{\frac{[\alpha(x)h]^{\nu}}{\nu!}+(m-1)h^2\beta(x)\sum_{i=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^i}{i!}\right\}k_0(x,h,\nu)\times$$

$$\times\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|F(t,x)\|,\|\varphi(x)\|\right). \tag{3.21}$$

Продолжая итерационный процесс, находим последовательности $\{\lambda_r^{(k)}(x)\}$, $\{v_r^{(k)}(t,x))\}$, $r=\overline{1,N}$, $k=1,2,\ldots$. Снова воспользовавшись неравенством Гроноулла – Беллмана, при каждом $r=\overline{1,N}$ оценим разность решений задач Коши с помощью разности параметров для всех $x\in[0,\omega]$:

$$\left\|v_r^{(k)}(t,x)-v_r^{(k-1)}(t,x)\right\|\le\left[e^{\alpha(x)(t-(r-1)h)}-1\right]\left\|\lambda_r^{(k)}(x)-\lambda_r^{(k-1)}(x)\right\|+$$

$$+e^{\alpha(x)(t-(r-1)h)}\delta_1(r,x)\max_{j=\overline{1,r-1}}\left\|\lambda_j^{(k)}(x)-\lambda_r^{(k-1)}(x)\right\|,\quad r=\overline{1,N}. \tag{3.22}$$

Из (3.15) следует

$$\left\|\lambda^{(k+1)}(x)-\lambda^{(k)}(x)\right\|_3=\left\|[Q_\nu(h,x)]^{-1}\left[G_\nu\left(h,x,v^{(k)}\right)-G_\nu\left(h,x,v^{(k-1)}\right)\right]\right\|_3\le$$

$$\le\gamma_\nu(h,x)\max\left(h\sum_{j=1}^{m}\|M_j(x)\|,1\right)\left\{\max_{r=\overline{1,N}}\int\limits_{(r-1)h}^{rh}\alpha(x)\ldots\right.$$

$$\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}}\alpha(x)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\alpha(x)\left\|v_r^{(k)}(\tau_\nu,x)-v_r^{(k-1)}(\tau_\nu,x)\right\|d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1+$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}\left[\int\limits_{(r-1)h}^{rh}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}\beta(x)\left\|v_i^{(k)}(s,x)-v_i^{(k-1)}(s,x)\right\|dsd\tau+\right.$$

$$+\int\limits_{(r-1)h}^{rh}\alpha(x)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}\beta(x)\left\|v_i^{(k)}(s,x)-v_i^{(k-1)}(s,x)\right\|dsd\tau_2d\tau_1+\ldots$$

$$\ldots+\int\limits_{(r-1)h}^{rh}\alpha(x)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}\alpha(x)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\int\limits_{(i-1)h}^{ih}\times$$

$$\times\, \beta(x) \left\| v_i^{(k)}(s,x) - v_i^{(k-1)}(s,x) \right\| ds d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \ldots d\tau_1 \Bigg] \Bigg\}.$$

Подставляя в последнее выражение (3.22) и вычисляя повторные интегралы, получаем

$$\left\| \lambda^{(k+1)}(x) - \lambda^{(k)}(x) \right\|_3 \leq q_\nu(h,x) \left\| \lambda^{(k)}(x) - \lambda^{(k-1)}(x) \right\|_3 \leq$$
$$\leq \chi \left\| \lambda^{(k)}(x) - \lambda^{(k-1)}(x) \right\|_3, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.23}$$

Из условия 2 теоремы 3.1 и неравенства

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| v_r^{(k)}(t,x) - v_r^{(k-1)}(t,x) \right| \leq$$
$$\leq \left[e^{\alpha(x)h} - 1 + e^{\alpha(x)h} \max_{r=\overline{1,N}} \delta_1(r,x) \right] \max_{r=\overline{1,N}} \left\| \lambda_r^{(k)}(x) - \lambda_r^{(k-1)}(x) \right\| \tag{3.24}$$

вытекает сходимость последовательности $\big(\lambda^{(k)}(x), v^{(k)}([t],x)\big) \in C\big([0,\omega], \mathbb{R}^{nN}\big) \times$ $\times C\big(\Omega, h, \mathbb{R}^{nN}\big)$ с компонентами $\big(\lambda_r^{(k)}(x), v_r^{(k)}(t,x)\big)$, $r = \overline{1,N}$, к решению задачи (3.6)–(3.9) $\big(\lambda^*(x), v^*([t],x)\big)$ при $k \to \infty$.

На основе (3.16), (3.20), (3.21), (3.23), (3.24) имеют место оценки

$$\|\lambda^*(x)\|_3 \leq \left\| \lambda^*(x) - \lambda^{(0)}(x) \right\|_3 + \left\| \lambda^{(0)}(x) \right|_3 \leq$$
$$\leq \frac{1}{1 - q_\nu(h,x)} \left\| \lambda^{(1)}(x) - \lambda^{(0)}(x) \right\|_3 + \left\| \lambda^{(0)}(x) \right\|_3 \leq$$
$$\leq k_1(x,h,\nu) \max\left(\max_{t\in[0,T]} \|F(t,x)\|, \|\Phi(x)\| \right),$$

$$\max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|v^*(t,x)\| \leq \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| v_r^*(t,x) - v_r^{(0)}(t,x) \right\| +$$
$$+ \max_{r=\overline{1,N}} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \left\| v_r^{(0)}(t,x) \right\| \leq$$
$$\leq \left(e^{\alpha(x)h} - 1 + e^{\alpha(x)h} \max_{r=\overline{1,N}} \delta_1(r,x) \right) \left\| \lambda^*(x) - \lambda^{(0)}(x) \right\|_3 +$$
$$+ k_0(x,h,\nu) \max\left(\max_{t\in[0,T]} \|F(t,x)\|, \|\Phi(x)\| \right) \leq$$
$$\leq k_2(x,h,\nu) \max\left(\max_{t\in[0,T]} \|F(t,x)\|, \|\Phi(x)\| \right),$$

где

$$k_1(x,h,\nu) = \frac{\gamma_\nu(h,x)}{1 - q_\nu(h,x)} \max\left[h \sum_{j=1}^m \|M_j(x)\|, 1 \right] \times$$

$$\times \left\{ \frac{[\alpha(x)h]^{\nu}}{\nu!} + (m-1)h^2\beta(x)\sum_{i=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^i}{i!} \right\} \times$$

$$\times\, k_0(x,h,\nu) + \gamma_\nu(h,x)\max\left\{ 1 + h\sum_{j=1}^{m}\|M_j(x)\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!} \right\} h,$$

$$k_2(x,h,\nu) = \left(e^{\alpha(x)h} - 1 + e^{\alpha(x)h}\max_{r=\overline{1,N}}\delta_1(r,x) \right)\frac{\gamma_\nu(h,x)}{1-q_\nu(h,x)}\max\left(h\sum_{j=1}^{m}\|M_j(x)\|, 1 \right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{[\alpha(x)h]^{\nu}}{\nu!} + (m-1)h^2\beta(x)\sum_{i=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^i}{i!} \right\} k_0(x,h,\nu) + k_0(x,h,\nu).$$

Поскольку пара $(\lambda^*(x), v^*([t],x))$ является решением задачи (3.6) – (3.9), система функций $V^*([t],x),$ с компонентами

$$V_r^*(t,x) = \lambda_r^*(x) + v_r^*(t,x), \quad (t,x)\in\Omega_r, \quad r=\overline{1,N},$$

$$\lim_{t\to T-0} V_N^*(t,x) = \lambda_N^*(x) + \lim_{t\to T-0} v_N^*(t,x), \quad x\in[0,\omega],$$

будет решением задачи (3.3) – (3.5). Покажем единственность. Пусть $V^*([t],x),\ V^{**}([t],x)$ — два решения задачи (3.3) – (3.5). Тогда соответствующие им пары $(\lambda^*(x), v^*([t],x))$, $(\lambda^{**}(x), v^{**}([t],x))$ будут решениями краевой задачи с параметр-функциями (3.6) – (3.9) и, аналогично (3.22), (3.23), получим

$$\|v_r^*(t,x) - v_r^{**}(t,x)\| \le \left[e^{\alpha(x)(t-(r-1)h)} - 1 \right]\|\lambda_r^*(x) - \lambda_r^{**}(x)\| +$$

$$+\, e^{\alpha(x)(t-(r-1)h)}\delta_1(r,x)\max_{j=\overline{1,r-1}}\left\|\lambda_j^*(x) - \lambda_j^{**}(x)\right\|,$$

$$\|\lambda^*(x) - \lambda^{**}(x)\|_3 \le q_\nu(h,x)\,\|\lambda^*(x) - \lambda^{**}(x)|_3, \quad \text{где} \quad q_\nu(h,x) \le \chi < 1.$$

Отсюда следует, что $\lambda_r^*(x) = \lambda_r^{**}(x),\ v_r^*(t,x) = v_r^{**}(t,x),\ r=\overline{1,N}$, т. е. $u_r^*(t,x) = u_r^{**}(t,x)$, $r=\overline{1,N}$, при $(t,x)\in\Omega$.

Теорема 3.1 доказана.

Так как пара $(\lambda^*(x), v^*([t],x))$ является решением задачи (3.6) – (3.9), то функция $V^*(t,x)$, определяемая равенствами $V^*(t,x) = \lambda_r^*(x) + v_r^*(t,x),\ (t,x)\in\Omega_r,\ r=\overline{1,N}$, $V^*(T,x) = \lambda_N^*(x) + \lim_{t\to T-0} v_N^*(t,x),\ x\in[0,\omega]$, будет решением задачи (3.1), (3.2). Из эквивалентности задач (3.1), (3.2) и (3.6) – (3.9) вытекает следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть при некотором $\nu,\ \nu\in\mathbb{N}$, $(nN\times nN)$-мерная матрица $Q_\nu(h,x)$ обратима для всех $x\in[0,\omega]$ и выполняются условия 1, 2 теоремы 3.1.*

Тогда семейство многоточечных задач для системы интегро-дифференциальных уравнений (3.1), (3.2) имеет единственное решение $V^*(t,x)\in(\Omega,\mathbb{R}^n)$ и справедлива оценка

$$\max_{t\in[0,T]}\|V^*(t,x)\| \le [k_1(x,h,\nu) + k_2(x,h,\nu)]\max\left(\max_{t\in[0,T]}\|F(t,x)\|, \|\Phi(x)\| \right).$$

4. Основные утверждения. Разрешимость задачи (1.1) – (1.3). Рассмотрим задачу (2.3) – (2.5). Тогда соответствующая система (3.1) будет двумерной, т. е. $n = 2$. Осуществимость и сходимость предложенного в п. 2 алгоритма $\mathcal{A}$, а также условия разрешимости задачи (2.3) – (2.5) дает следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть при некотором* ν, $\nu \in \mathbb{N}$, $(2N \times 2N)$*-мерная матрица* $Q_\nu(h, x)$ *обратима для всех* $x \in [0, \omega]$ *и выполняются условия 1, 2 теоремы 3.1.*

Тогда задача (2.3) – (2.5) имеет единственное решение.

Отметим, что при отсутствии разбиения $N = 1$ (2×2)-мерная матрица $Q_\nu(T, x)$ имеет вид

$$Q_\nu(T, x) = M_0(x) + \sum_{j=1}^{m} M_j(x) \left[I + D_{\nu,1}(t_j, x)\right].$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть при некотором* ν, $\nu \in \mathbb{N}$, (2×2)*-мерная матрица* $Q_\nu(T, x)$ *обратима для всех* $x \in [0, \omega]$ *и выполняются условия:*

1) $\left\|[Q_\nu(T, x)]^{-1}\right\| \le \gamma_\nu(T, x)$, *где* $\gamma_\nu(T, x)$ *— положительная непрерывная на* $[0, \omega]$ *функция;*

2) $q_\nu(T, x) = \gamma_\nu(T, x)\sum_{i=1}^{m}\|M_i(x)\| \max_{i=\overline{1,m}} \left[e^{\alpha(x)t_i} - 1 - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{[\alpha(x)t_i]^i}{i!}\right] \le \chi < 1$, *где* χ — const.

Тогда задача (2.3) – (2.5) имеет единственное решение.

Для $\nu = 1$ матрица $Q_\nu(T, x)$ приобретает вид

$$Q_1(T, x) = M_0(x) + \sum_{j=1}^{m} M_j(x) \left[I + \int_0^{t_j} A(\tau, x)d\tau + \int_0^{t_j}\int_\tau^{t_j} K_1(s, \tau, x)dsd\tau\right].$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.3. *Пусть* (2×2)*-мерная матрица* $Q_1(T, x)$ *обратима для всех* $x \in [0, \omega]$ *и выполняются условия:*

1) $\left\|[Q_1(T, x)]^{-1}\right\| \le \gamma_1(T, x)$, *где* $\gamma_1(T, x)$ *— положительная непрерывная на* $[0, \omega]$ *функция;*

2) $q_1(T, x) = \gamma_1(T, x)\sum_{i=1}^{m}\|M_i(x)\| \max_{i=\overline{1,m}} \left[e^{\alpha(x)t_i} - 1 - \alpha(x)t_i\right] \le \chi < 1$, *где* χ — const.

Тогда задача (2.3) – (2.5) имеет единственное решение.

Из эквивалентности задач (1.1) – (1.3) и (2.3) – (2.5) вытекают следующие утверждения.

Теорема 4.4. *Пусть:*

1) функции $A_s(t, x)$, $s = \overline{1, 5}$, $f(t, x)$ *непрерывны на* Ω, *функции* $Z_l(t, \tau, x)$ *непрерывны на* $[0, T] \times \Omega$, $l = 1, 2$;

2) функции $P_{i,j}(x)$, $S_{i,j}(x)$, $L_{i,j}(x)$, $i = \overline{1, 2}$, $j = \overline{0, m}$, $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2$, *непрерывны на* $[0, \omega]$, *функция* $\psi(t)$ *дважды непрерывно дифференцируема на* $[0, T]$;

3) при некотором ν, $\nu \in \mathbb{N}$, $(2N \times 2N)$*-мерная матрица* $Q_\nu(h, x)$ *обратима для всех* $x \in [0, \omega]$ *и выполняются условия 1, 2 теоремы 3.1.*

Тогда начально-краевая задача для интегро-дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка (1.1) – (1.3) имеет единственное классическое решение.

Теорема 4.5. *Пусть:*

1) функции $A_s(t,x),\ s=\overline{1,5},\ f(t,x)$ *непрерывны на* Ω, *функции* $Z_l(t,\tau,x)$ *непрерывны на* $[0,T]\times\Omega,\ l=1,2;$

2) функции $P_{i,j}(x),\ S_{i,j}(x),\ L_{i,j}(x),\ i=\overline{1,2},\ j=\overline{0,m},\ \varphi_i(x),\ i=1,2,$ *непрерывны на* $[0,\omega]$, *функция* $\psi(t)$ *дважды непрерывно дифференцируема на* $[0,T]$;

3) при некотором $\nu,\ \nu\in\mathbb{N},\ (2\times2)$*-мерная матрица* $Q_\nu(T,x)$ *обратима для всех* $x\in[0,\omega]$ *и выполняются условия 1, 2 теоремы 4.2.*

Тогда начально-краевая задача для интегро-дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка (1.1)–(1.3) имеет единственное классическое решение.

Теорема 4.6. *Пусть:*

1) функции $A_s(t,x),\ s=\overline{1,5},\ f(t,x)$ *непрерывны на* Ω, *функции* $Z_l(t,\tau,x)$ *непрерывны на* $[0,T]\times\Omega,\ l=1,2;$

2) функции $P_{i,j}(x),\ S_{i,j}(x),\ L_{i,j}(x),\ i=\overline{1,2},\ j=\overline{0,m},\ \varphi_i(x),\ i=1,2,$ *непрерывны на* $[0,\omega]$, *функция* $\psi(t)$ *дважды непрерывно дифференцируема на* $[0,T]$;

3) (2×2)*-мерная матрица* $Q_1(T,x)$ *обратима для всех* $x\in[0,\omega]$ *и выполняются условия 1, 2 теоремы 4.3.*

Тогда начально-краевая задача для интегро-дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка (1.1)–(1.3) имеет единственное классическое решение.

Литература

1. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1954. – **18**, вып. 1. – С. 3–50.
2. *Синиченков Ю. Б.* Численное моделирование гибридных систем. – Санкт-Петербург: Изд-во Политехн. ун-та, 2004.
3. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.
4. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применения. – М.: Наука, 2012. – 300 с.
5. *Guezane-Lakoud A., Belakroum D.* Time-discretization schema for an integrodifferential Sobolev type equation with integral conditions // Appl. Math. Comput. – 2012. – **218**. – P. 4695–4702.
6. *Lin Su-rong* The singular perturbation of boundary value problem for third-order nonlinear vector integro-differential equation and its application // Appl. Math. Comput. – 2012. – **218**, № 5. – P. 1746–1751.
7. *Grace S. R., Graef J. R.* On the asymptotic behavior of solutions of certain forced third order integro-differential equations with d-Laplacian // Appl. Math. Lett. – 2018. – **83**. – P. 40–45.
8. *Burton T. A.* Integral and differential equations. – New York: Acad. Press, 1983.
9. *Prüss J.* Evolutionary integral equations and applications. – Birkhäuser, Basel: Springer, 1993.
10. *Lakshmikantham V., Rao M. R. M.* Theory of integro-differential equations. – Lausanne: Gordon and Breach Sci. Publ., 1995.
11. *Wazwaz A.-M.* Linear and nonlinear integral equations. Methods and applications. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
12. *Искандаров С.* Об одной оценке решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка в критическом случае на полуоси // Дифференц. уравнения. – 2016. – **52**, № 8. – С. 1069–1074.
13. *Джумабаев Д. С., Бакирова Э. А.* Признаки корректной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2010. – **46**, № 4. – С. 550–564.
14. *Джумабаев Д. С.* Об одном методе решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2010. – **50**, № 7. – С. 1209–1221.
15. *Джумабаев Д. С.* Об одном алгоритме нахождения решения линейной двухточечной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2013. – **53**, № 6. – С. 75–98.

16. *Джумабаев Д. С., Бакирова Э. А.* О признаках однозначной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2013. – **49**, № 9. – С. 1125 – 1140.

17. *Джумабаев Д. С.* Необходимые и достаточные условия разрешимости линейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма // Укр. мат. журн. – 2014. – **65**, № 8. – С. 1074 – 1091.

18. *Джумабаев Д. С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1989. – **29**, № 1. – С. 50 – 66.

19. *Нестеренко О. Б.* Ітераційний метод розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь з обмеженнями // Нелін. коливання. – 2007. – **10**, № 3. – С. 336 – 347; ***English translation:*** Nonlinear Oscil. – 2007. – **10**, № 3. – P. 336 – 347.

20. *Лучка А. Ю., Нестеренко О. Б.* Проекційний метод розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь з обмеженнями і керуванням // Нелін. коливання. – 2008. – **11**, № 2. – С. 208 – 216; ***English translation:*** Nonlinear Oscil. – 2008. – **11**, № 2. – P. 219 – 228.

21. *Лучка А. Ю., Нестеренко О. Б.* Побудова розв'язків інтегро-диференціальних рівнянь з обмеженнями і керуванням проекційно-ітеративним методом // Нелін. коливання. – 2009. – **12**, № 1. – С. 83 – 91; ***English translation:*** Nonlinear Oscil. – 2009. – **12**, № 1. – С. 85 – 93.

22. *Нестеренко О. Б.* Модифікований проекційно-ітеративний метод для слабконелінійних інтегро-диференціальних рівнянь з параметрами // Нелін. коливання. – 2013. – **16**, № 2. – С. 238 – 245; ***English translation:*** J. Math. Sci. – 2014. – **198**, № 3. – P. 328 – 335.

23. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Berlin: De Gruyter, 2016.

24. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.

25. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Совр. проблемы математики. Новейшие достижения. – М.: Наука, 1987. – **30**. – С. 3 – 103.

26. *Agarwal R. P.* Focal boundary-value problems for differential and difference equations. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Acad. Publ., 1998.

27. *Самойленко А. М., Лаптинский В. Н., Кенжебаев К. К.* Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных краевых задач // Тр. Ин-та математики НАН Украины. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – **29**. – 220 с.

28. *Иманчиев А. Е.* Необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости линейной многоточечной краевой задачи // Изв. МОН РК, НАН РК. Сер. физ.-мат. – 2002. – № 3. – С. 79 – 84.

29. *Джумабаев Д. С., Иманчиев А. Е.* Корректная разрешимость линейной многоточечной краевой задачи // Мат. журн. – 2002. – **5**, № 1(15). – С. 30 – 38.

30. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.

31. *Kiguradze I., Kiguradze T.* On solvability of boundary-value problems for higher-order nonlinear hyperbolic equations // Nonlinear Anal. – 2008. – **69**. – P. 1914 – 1933.

32. *Assanova A. T., Imanchiev A. E.* On conditions of the solvability of nonlocal multi-point boundary value problems for quasi-linear systems of hyperbolic equations // Eurasian Math. J. – 2015. – **6**, № 4. – P. 19 – 28.

33. *Асанова А. Т., Иманчиев А. Е.* Об однозначной разрешимости семейства многоточечных задач для интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра // Мат. журн. – 2016. – **16**, № 3. – С. 20 – 34.

34. *Асанова А. Т.* Про багатоточкову задачу для системи гіперболічних рівнянь зі змішаною похідною // Нелін. коливання. – 2014. – **17**, № 3. – С. 295 – 313; ***English translation:*** J. Math. Sci. – 2016. – **212**, № 3. – P. 213 – 233.

Получено 26.03.19