УДК 517.925

АСИМПТОТИКА БЫСТРО МЕНЯЮЩИХСЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, АСИМПТОТИЧЕСКИ БЛИЗКИХ К УРАВНЕНИЯМ С ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В. М. Евтухов, А. В. Дрожжина

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
ул. Дворянская, 2, Одесса, 65026, Украина
e-mail: evmod@i.ua
Drozhzhina221b@gmail.com

We establish the existence conditions and asymptotic representations as $t \uparrow \omega$ $(\omega \le +\infty)$ for rapidly varying solutions of the differential equations of order n that are asymptotically close in a certain sense to the equations with regularly varying nonlinearities.

Встановлюються умови існування та асимптотичні при $t \uparrow \omega$ $(\omega \le +\infty)$ зображення швидко змінюваних розв'язків диференціальних рівнянь n-го порядку, що в деякому сенсі є асимптотично близькими до рівнянь із правильно змінними нелінійностями.

1. Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = f\Big(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\Big), \tag{1.1}$$

где $n \ge 2,$ $f\colon [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \times \ldots \times \Delta_{Y_{n-1}} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \le +\infty,$ Y_j равно либо нулю, либо $\pm\infty,$ Δ_{Y_j} — некоторая односторонняя окрестность $Y_j,$ $j = 0, 1, \dots, n-1.$

Определение 1.1. *Решение y уравнения (1.1), заданное на промежутке $[t_0, \omega[\ \subset [a, \omega[,$ называется $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-решением, $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty,$ если для него выполняются условия*

$$y^{(j)}(t) \in \Delta_{Y_j} \quad \textit{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(j)}(t) = Y_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \tag{1.2}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\big[y^{(n-1)}(t)\big]^2}{y^{(n-2)}(t) y^{(n)}(t)} = \lambda_0. \tag{1.3}$$

Асимптотическое поведение таких решений ранее исследовалось в работах В. М. Евтухова и А. М. Клопота [1 – 5] для дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{ij}(y^{(j)}),$$

в котором $n \ge 2,$ $\alpha_i \in \{-1; 1\},$ $p_i\colon [a, \omega[\to]0, +\infty[$ — непрерывная функция, $i = 1, \dots, m,$ $-\infty < a < \omega \le +\infty,$ $\varphi_{ij}\colon \Delta_{Y_j} \to]0, +\infty[$ — непрерывная и правильно меняющаяся при $y^{(j)} \to Y_j$ функция порядка $\sigma_j,$ $j = 0, 1, \dots, n-1,$ $i = 1, \dots, m.$

© В. М. Евтухов, А. В. Дрожжина, 2019

Определение 1.2. *Измеримая функция $\varphi\colon \Delta_Y \to]0,+\infty[$, где Y равно либо нулю, либо $\pm\infty$ и Δ_Y — некоторая односторонняя окрестность Y, называется правильно меняющейся при $y \to Y$, если существует число $\sigma \in \mathbb{R}$ такое, что*

$$\lim_{\substack{y\to Y\\ y\in\Delta_Y}} \frac{\varphi(\lambda y)}{\varphi(y)} = \lambda^\sigma \quad \text{при любом} \quad \lambda > 0.$$

При этом число σ называют порядком функции φ (или показателем), и в случае $\sigma = 0$, т. е. когда

$$\lim_{\substack{y\to Y\\ y\in\Delta_Y}} \frac{\varphi(\lambda y)}{\varphi(y)} = 1 \quad \text{при любом} \quad \lambda > 0, \tag{1.4}$$

функцию φ называют медленно меняющейся при $y \to Y$.

В силу этого определения каждая правильно меняющаяся при $y \to Y$ функция $\varphi\colon \Delta_Y \to$ $\to]0,+\infty[$ порядка σ представима в виде

$$\varphi(y) = |y|^\sigma L(y), \tag{1.5}$$

где $L\colon \Delta_Y \to]0,+\infty[$ — медленно меняющаяся функция при $y \to Y$.

Примерами медленно меняющихся функций при $y \to Y$ (Y равно либо нулю, либо $\pm\infty$) являются

$$|\ln|y||^{\gamma_1}, \qquad \ln^{\gamma_2}|\ln|y||, \quad \gamma_1,\gamma_2 \in \mathbb{R},$$

$$\exp\left(|\ln|y||^{\gamma_3}\right), \quad 0 < \gamma_3 < 1, \qquad \exp\left(\frac{\ln|y|}{\ln|\ln|y||}\right),$$

функции, имеющие отличный от нуля конечный предел при $y \to Y$ и многие другие.

Теория правильно меняющихся функций подробно изложена в монографиях [6, 7]. По поводу использования правильно меняющихся функций в теории дифференциальных уравнений см., например, монографию [8].

Среди свойств медленно меняющихся при $y \to Y$ функций $L\colon \Delta_Y \to]0,+\infty[$, где Y равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_Y — некоторая односторонняя окрестность Y, отметим следующие.

$\mathcal{M}_1$. Предельное соотношение (1.4) выполняется равномерно по λ на любом отрезке $[c,d] \subset]0,+\infty[$;

$\mathcal{M}_2$. $\lim_{\substack{y\to Y\\ y\in\Delta_Y}} \dfrac{\ln L(y)}{\ln|y|} = 0.$

$\mathcal{M}_3$. Существует непрерывно дифференцируемая функция $L_0\colon \Delta_Y \to]0,+\infty[$, называемая нормализованной медленно меняющейся функцией при $y \to Y$, такая, что

$$\lim_{\substack{y\to Y\\ y\in\Delta_Y}} \frac{L_0(y)}{L(y)} = 1, \qquad \lim_{\substack{y\to Y\\ y\in\Delta_Y}} \frac{yL_0'(y)}{L_0(y)} = 0.$$

Определение 1.3. *Будем говорить, что медленно меняющаяся при $y \to Y$ функция $L\colon \Delta_Y \to]0,+\infty[$, где Y равно либо нулю, либо $\pm\infty$, и Δ_Y — односторонняя окрестность Y, удовлетворяет условию S_0, если*

$$L\left(\nu e^{[1+o(1)]\ln|y|}\right) = L(y)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad y \to Y, \quad y \in \Delta_Y,$$

где $\nu = \operatorname{sign} y$.

Условию S_0 заведомо удовлетворяют первые две функции из приведенных выше примеров медленно меняющихся функций, а также функции, имеющие отличный от нуля конечный предел при $y \to Y$. Не удовлетворяют этому условию третья и четвертая функции из указанных примеров.

Для дифференциального уравнения (1.1) в случае $n = 2$ и функции $f\,(t, y, y')$ общего вида асимптотика $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений изучалась в работах [9–12]. При этом предполагалось, что для каждого из этих решений имеет место представление

$$f\left(t, y(t), y'(t)\right) = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y(t)) \varphi_1\left(y'(t)\right)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p\colon [t_0, \omega[\ \to\ ]0, +\infty[$ — непрерывная функция, $\varphi_k\colon \Delta_{Y_k} \to\ ]0, +\infty[$ — непрерывная правильно меняющаяся функция при $y^{(k)} \to Y_k$, $i = 0, 1$, причем α_0, p, и φ_k, $k = 0, 1$, зависят от выбранного параметра λ_0.

В настоящей статье некоторые из результатов, полученных в [9–12], а именно касающиеся $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-решений, распространяются на случай произвольного $n \geq 2$.

Каждое $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, 1)$-решение дифференциального уравнения (1.1) имееет (см., например, [13]) следующие априорные асимптотические свойства:

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{y''(t)}{y'(t)} \sim \ldots \sim \frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = \pm\infty, \tag{1.6}$$

где

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

В силу этих свойств такие решения и их производные до порядка $n - 1$ включительно являются быстро меняющимися функциями при $t \uparrow \omega$.

2. Основные результаты.

Определение 2.1. *Будем говорить, что функция f в дифференциальном уравнении (1.1) удовлетворяет условию $(RN)_1$, если существуют число $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, непрерывная функция $p\colon [a, \omega[\ \to\ ]0, +\infty[$ и непрерывные правильно меняющиеся при $z \to Y_j$, $j = \overline{0, n-1}$, функции $\varphi_j\colon \Delta_{Y_j} \to\ ]0, +\infty[$, $j = \overline{0, n-1}$, порядков σ_j, $j = \overline{0, n-1}$, такие, что для любых непрерывно дифференцируемых функций $z_j\colon [a, \omega[\ \to \Delta_{Y_j}$, $j = \overline{0, n-1}$, удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_j(t) = Y_j, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) z_j'(t)}{z_j(t)} = \pm\infty, \quad j = \overline{0, n-1}, \tag{2.1}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{z_{j-1}'(t) z_j(t)}{z_{j-1}(t) z_j'(t)} = 1, \quad j = \overline{1, n-1}. \tag{2.2}$$

имеет место представление

$$f(t, z_0(t), z_1(t), \ldots, z_{n-1}(t)) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(z_j(t))[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.3}$$

Кроме того, будем использовать обозначения

$$\gamma = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j, \qquad \mu_n = \sum_{j=0}^{n-2} \sigma_j (n - j - 1),$$

$$\nu_j = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad Y_j = +\infty, \quad \text{либо} \\ & Y_j = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_{Y_j} \text{ — правая окрестность нуля,} \\ -1, & \text{если} \quad Y_j = -\infty, \quad \text{либо} \\ & Y_j = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_{Y_j} \text{ — левая окрестность нуля} \end{cases} \qquad j = \overline{0, n-1},$$

$$J_0(t) = \int\limits_{A_0}^{t} p(s)\,ds, \qquad J_{00}(t) = \int\limits_{A_{00}}^{t} J_0(s)\,ds,$$

где

$$A_0 = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \int_a^\omega p(s)\,ds = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \int_a^\omega p(s)\,ds < +\infty, \end{cases} \qquad A_{00} = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \int_a^\omega |J_0(s)|\,ds = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \int_a^\omega |J_0(s)|\,ds < +\infty. \end{cases}$$

Теорема 2.1. *Пусть функция f удовлетворяет условию $(RN)_1$ и при этом $\gamma \neq 0$. Тогда для существования $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, 1)$-решений дифференциального уравнения (1.1) необходимо, а если алгебраическое относительно ρ уравнение*

$$(1+\rho)^n = \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j (1+\rho)^j \tag{2.4}$$

не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы

$$\frac{p(t)}{J_0(t)} \sim \frac{J_0(t)}{J_{00}(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) p(t)}{J_0(t)} = \pm\infty, \tag{2.5}$$

$$\nu_j \lim_{t \uparrow \omega} |J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}} = Y_j, \quad j = \overline{0, n-1}, \tag{2.6}$$

и при $t \in\,]a, \omega[$ выполнялись неравенства

$$\alpha_0 \nu_{n-1} \gamma J_0(t) > 0, \qquad \nu_j \nu_{n-1} \left(\gamma J_0(t)\right)^{n-j-1} > 0, \quad j = \overline{0, n-2}. \tag{2.7}$$

Более того, для каждого такого решения при $t \uparrow \omega$ имеют место асимптотические представления

$$y^{(j)}(t) = \left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)[1 + o(1)], \quad j = \overline{0, n-2}, \tag{2.8}$$

$$\frac{\left|y^{(n-1)}(t)\right|^\gamma}{\prod_{j=0}^{n-1} L_j \left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right)} = \alpha_0 \nu_{n-1} \gamma J_0(t) \left|\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right|^{\mu_n} [1 + o(1)], \tag{2.9}$$

где $L_j(y^{(j)}) = \left|y^{(j)}\right|^{-\sigma_j} \varphi_j(y^{(j)})$, $j = \overline{0, n-1}$, причем решений с такими представлениями существует целое m-параметрическое семейство, если среди корней алгебраического уравнения (2.4) имеется m-корней (с учетом кратных), действительные части которых имеют знак, противоположный знаку $\alpha_0 \nu_{n-1}$.

Замечание 2.1. Можно показать, что алгебраическое уравнение (2.4) заведомо не имеет корней с нулевой действительной частью, если $\sum_{j=0}^{n-2} |\sigma_j| < |1-\sigma_{n-1}|$.

Замечание 2.2. В силу первого из условий (2.5) и свойства $\mathcal{M}_1$ медленно меняющихся функций отношение $\dfrac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}$ в представлениях (2.8) и (2.9) может быть заменено на $\dfrac{\gamma J_0(t)}{p(t)}$.

Замечание 2.3. Из условий (2.5) также следует, что функции $J_0,\ J_{00}$ являются быстро меняющимися при $t \uparrow \omega$. Поэтому функция p в представлении (2.3) не может быть правильно меняющейся при $t \uparrow \omega$.

Доказательство теоремы 2.1. *Необходимость.* Пусть $y\colon [t_0,\omega[\ \to \Delta_{Y_0}$ — произвольное $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},1)$-решение уравнения (1.1). Тогда в силу определения 1.1 существует $t_1 \in [t_0,\omega[$ такое, что

$$\operatorname{sign} y^{(j)}(t) = \nu_j, \quad j=\overline{0,n-1}, \quad \text{при} \quad t\in[t_1,\omega[.$$

Кроме того, в силу свойств (1.6) для функций $z_j(t) = y^{(j)}(t),\ j=\overline{0,n-1}$, соблюдаются условия (2.1) и (2.2). Поэтому ввиду выполнения условия $(RN)_1$ для рассматриваемого решения y уравнения (1.1) имеет место асимптотическое соотношение

$$y^{(n)}(t) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j\left(y^{(j)}(t)\right)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{2.10}$$

Здесь $\varphi_j\colon \Delta_{Y_j} \to\ ]0,+\infty[,\ j=\overline{0,n-1}$, — правильно меняющиеся при $y^{(j)} \to Y_j,\ j=\overline{0,n-1}$, функции порядков $\sigma_j,\ j=\overline{0,n-1}$. Поэтому согласно (1.5) они представимы в виде

$$\varphi_j(y^{(j)}) = \left|y^{(j)}\right|^{\sigma_j} L_j(y^{(j)}), \quad j=\overline{0,n-1}, \tag{2.11}$$

где $L_j,\ j=\overline{0,n-1}$ — медленно меняющиеся функции при $y^{(j)}\to Y_j,\ j=\overline{0,n-1}$. Кроме того, в силу свойства $\mathcal{M}_3$ медленно меняющихся функций существуют нормализованные (непрерывно дифференцируемые) медленно меняющиеся функции $L_{0j}\colon \Delta_{Y_j} \to\ ]0,+\infty[$, $j=\overline{0,n-1}$, такие, что

$$\lim_{\substack{y^{(j)}\to Y_j\\ y^{(j)}\in\Delta_{Y_j}}} \frac{L_j(y^{(j)})}{L_{0j}(y^{(j)})} = 1, \qquad \lim_{\substack{y^{(j)}\to Y_j\\ y^{(j)}\in\Delta_{Y_j}}} \frac{y^{(j)} L_{0j}'(y^{(j)})}{L_{0j}(y^{(j)})} = 0, \quad j=\overline{0,n-1}. \tag{2.12}$$

Отсюда следует, что непрерывно дифференцируемые правильно меняющиеся функции

$$\varphi_{0j} = \left|y^{(j)}\right|^{\sigma_j} L_{0j}(y^{(j)}), \quad j=\overline{0,n-1}, \tag{2.13}$$

удовлетворяют условиям

$$\lim_{\substack{y^{(j)}\to Y_j\\ y^{(j)}\in\Delta_{Y_j}}} \frac{\varphi_j(y^{(j)})}{\varphi_{0j}(y^{(j)})} = 1, \qquad \lim_{\substack{y^{(j)}\to Y_j\\ y^{(j)}\in\Delta_{Y_j}}} \frac{y^{(j)}\varphi_{0j}'(y^{(j)})}{\varphi_{0j}(y^{(j)})} = \sigma_j, \quad j=\overline{0,n-1}. \tag{2.14}$$

В силу этих условий, справедливости соотношения (1.2) и первых из соотношений (1.6) имеем

$$\left(\frac{y^{(k-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{0j}\left(y^{(j)}(t)\right)}\right)' = \frac{y^{(k)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{0j}\left(y^{(j)}(t)\right)}\times$$

$$\times\left[1-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{y^{(k-1)}(t)y^{(j+1)}(t)}{y^{(k)}(t)y^{(j)}(t)}\,\frac{y^{(j)}(t)\varphi'_{0j}\left(y^{(j)}(t)\right)}{\varphi_{0j}\left(y^{(j)}(t)\right)}\right]=$$

$$=\frac{y^{(k)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{0j}\left(y^{(j)}(t)\right)}[\gamma+o(1)],\quad k=1,\ldots,n,\quad \text{при}\quad t\uparrow\omega. \tag{2.15}$$

Отсюда при $k=n$ следует, что (2.10) может быть переписано в виде

$$\left(\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{0j}\left(y^{(j)}(t)\right)}\right)' = \alpha_0\gamma p(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от t_1 до t, получаем

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{0j}\left(y^{(j)}(t)\right)} = C+\alpha_0\gamma J_0(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

где C — некоторая вещественная постоянная.

В случае, когда в функции J_0 предел интегрирования $A_0=a,$ $J_0(t)\to+\infty$ при $t\uparrow\omega,$ полученное соотношение представимо в виде

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{0j}\left(y^{(j)}(t)\right)} = \alpha_0\gamma J_0(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{2.16}$$

Покажем, что в случае $A_0=\omega,$ когда $J_0(t)\to 0$ при $t\uparrow\omega,$ постоянная C равна нулю. Предположим противное, т. е. что в этом случае $C\neq 0.$ Тогда

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{0j}\left(y^{(j)}(t)\right)} = C+o(1) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

и в силу (2.10), (2.14)

$$\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = p(t)\left(\frac{\alpha_0}{C}+o(1)\right) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

откуда следует, что

$$\ln\left|y^{(n-1)}(t)\right| = C_1+J_0(t)\left(\frac{\alpha_0}{C}+o(1)\right) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

где C_1 — некоторая вещественная постоянная. Однако этого быть не может, поскольку здесь левая часть в силу определения 1.1 стремится к бесконечности при $t \uparrow \omega$, а правая — к постоянной C_1. Значит, при $A_0 = \omega$ также имеет место представление (2.16).

Аналогично из (2.16) с использованием (2.15) при $k = n - 1$ получаем

$$\frac{y^{(n-2)}(t)}{\prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{0j}\left(y^{(j)}(t)\right)} = \alpha_0 \gamma^2 J_{00}(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.17}$$

Из (2.10), (2.16) и (2.17) с учетом первого из условий (2.14) имеем

$$\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \sim \frac{p(t)}{\gamma J_0(t)}, \quad \frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n-2)}(t)} \sim \frac{J_0(t)}{\gamma J_{00}(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поэтому в силу (1.6) выполняются условия (2.5) и ввиду тождеств

$$y^{(j)}(t) = \frac{y^{(j)}(t)}{y^{(j+1)}(t)} \cdots \frac{y^{(n-2)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}\, y^{(n-1)}(t), \quad j = \overline{0, n-2},$$

имеют место асимптотические представления (2.8). Кроме того, из (2.16) и (2.8) следует, что выполняются неравенства (2.7).

Справедливость условий (2.6) непосредственно следует из (1.2) и асимптотических соотношений

$$\frac{y^{(j+1)}(t)}{y^{(j)}(t)} \sim \frac{p(t)}{\gamma J_0(t)}, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.18}$$

Используя теперь представления (2.13), асимптотические соотношения (2.8) и свойство $\mathcal{M}_1$ медленно меняющихся функций, находим

$$\varphi_{0j}\left(y^{(j)}(t)\right) = \left|y^{(j)}(t)\right|^{\sigma_j} L_{0j}\left(y^{(j)}(t)\right) \sim \left|\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right|^{\sigma_j} \times$$

$$\times L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)[1 + o(1)]\right) \sim \left|\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right|^{(n-j-1)\sigma_j} \times$$

$$\times \left|y^{(n-1)}(t)\right|^{\sigma_j} L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right), \quad j = \overline{0, n-1} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Ввиду этих соотношений из (2.16) при $t \uparrow \omega$ получаем представление

$$\frac{\left|y^{n-1}(t)\right|^{\gamma} \left|\frac{J_0(t)}{\gamma J_{00}(t)}\right|^{\mu_n}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right)} = \alpha_0 \nu_{n-1} \gamma J_0(t)[1 + o(1)],$$

из которого с учетом первых из соотношений (2.12) вытекает представление (2.9).

Достаточность. Пусть выполняются условия (2.5) – (2.7) и алгебраическое уравнение (2.4) не имеет корней с нулевой действительной частью. Покажем, что в данном случае уравнение (1.1) имеет $P_\omega(Y_0,\dots,Y_{n-1},1)$-решения, допускающие при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (2.8), (2.9), и выясним вопрос о количестве таких решений.

Сначала рассмотрим соотношение

$$\frac{|Y|^\gamma}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} Y\right)} = Q(t)(1+v_n), \tag{2.19}$$

где $L_{0j}\colon \Delta_{Y_j}\to]0,+\infty[,\ j=\overline{0,n-1},$ — непрерывно дифференцируемые медленно меняющиеся при $y^{(j)}\to Y_j$ функции, удовлетворяющие условиям (2.12), существующие в силу свойства $\mathcal{M}_3$ медленно меняющихся функций, и

$$Q(t)=\alpha_0\nu_{n-1}\gamma J_0(t)\left|\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right|^{\mu_n}.$$

Положим

$$d=\frac{1}{2|\gamma|},\qquad \mathbb{R}_d=\{z\in\mathbb{R}\colon |z|\le d\},\qquad \mathbb{R}_{\frac12}=\left\{v_n\in\mathbb{R}\colon |v_n|\le\frac12\right\}$$

и покажем, что соотношение (2.19) однозначно определяет заданную на множестве $[t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{\frac12}$, где $t_0\in[a,\omega[$, непрерывно дифференцируемую неявную функцию $Y=Y(t,v_n)$ вида

$$Y(t,v_n)=\nu_{n-1}\,|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}+z(t,v_n)}, \tag{2.20}$$

где функция z такова, что

$$|z(t,v_n)|\le d \quad \text{при} \quad (t,v_n)\in[t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{\frac12} \tag{2.21}$$

и

$$\lim_{t\uparrow\omega} z(t,v_n)=0 \quad \text{равномерно по} \quad v_n\in\mathbb{R}_{\frac12}. \tag{2.22}$$

Полагая в (2.19)

$$Y=\nu_{n-1}\,|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}+z} \tag{2.23}$$

и затем логарифмируя полученное при этом соотношение, после элементарных преобразований находим, что

$$z=a(t)+b(t,v_n)+Z(t,z), \tag{2.24}$$

где

$$a(t)=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\ln Q(t)}{\ln|J_0(t)|}-1\right),\qquad b(t,v_n)=\frac{\ln(1+v_n)}{\gamma\ln|J_0(t)|},$$

$$Z(t,z)=\frac{1}{\gamma\ln|J_0(t)|}\sum_{j=0}^{n-1}\ln L_{0j}\left(\nu_{n-1}\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}+z}\right).$$

Так как согласно правилу Лопиталя и первому из условий (2.5)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\ln|\gamma J_{00}(t)|}{\ln|J_0(t)|}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{J_0^2(t)}{p(t)J_{00}(t)}=1, \tag{2.25}$$

то в силу неравенств (2.7), а также условия (2.6) имеем

$$\nu_{n-1}\lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}+z}=\nu_j\lim_{t\uparrow\omega}\left|\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right|^{n-j-1}|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}+z}=$$

$$=\nu_j\lim_{t\uparrow\omega}\exp\left(\ln|J_0(t)|\left[\frac{1}{\gamma}+z+(n-j-1)\left(\frac{\ln|\gamma J_{00}(t)|}{\ln|J_0(t)|}-1\right)\right]\right)=$$

$$=\nu_j\lim_{t\uparrow\omega}\exp\left(\ln|J_0(t)|\left[\frac{1}{\gamma}+z+o(1)\right]\right)=$$

$$=\nu_j\lim_{t\uparrow\omega}|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}}=Y_j,\quad j=\overline{0,n-1}\quad\text{при}\quad |z|\le d.$$

Поэтому правая часть в (2.24) непрерывно дифференцируема на множестве $[t_1,\omega[\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}\times\mathbb{R}_d$, где t_1 — некоторое число на промежутке $[a,\omega[$.

Замечаем также, что в (2.24)

$$\lim_{t\uparrow\omega}b(t,v_n)=0\quad\text{равномерно по}\quad v_n\in\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}, \tag{2.26}$$

и в силу вида функции a, первого из неравенств (2.7) и (2.25)

$$\lim_{t\uparrow\omega}a(t)=\frac{1}{\gamma}\lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{\ln Q(t)}{\ln|J_0(t)|}-1\right)=\frac{1}{\gamma}\lim_{t\uparrow\omega}\left[\frac{\ln|\gamma|}{\ln|J_0(t)|}+\mu_n\left(\frac{\ln|\gamma J_{00}(t)|}{\ln|J_0(t)|}-1\right)\right]=0. \tag{2.27}$$

Кроме того, учитывая, что

$$Z(t,z)=\frac{1}{\gamma}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\gamma}+z+(n-j-1)\left(\frac{\ln|\gamma J_{00}(t)|}{\ln|J_0(t)|}-1\right)\right]\times$$

$$\times\frac{\ln L_{0j}\left(\nu_{n-1}\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}+z}\right)}{\ln\left(\left|\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right|^{n-j-1}|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}+z}\right)}$$

и

$$\frac{\partial Z(t,z)}{\partial z}=\frac{1}{\gamma}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\nu_{n-1}\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}+z}L'_{0j}\left(\nu_{n-1}\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}+z}\right)}{L_{0j}\left(\nu_{n-1}\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}+z}\right)},$$

с использованием (2.12), свойства $\mathcal{M}_2$ медленно меняющихся функций и условия (2.25) получаем

$$\lim_{t\uparrow\omega} Z(t,z)=0, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\partial Z(t,z)}{\partial z}=0 \quad \text{равномерно по} \quad z\in\mathbb{R}_d. \tag{2.28}$$

Согласно условиям (2.26)–(2.28) существует число $t_2\in[t_1,\omega[$ такое, что на множестве $[t_2,\omega[\,\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}\times\mathbb{R}_d$ справедливо неравенство

$$|a(t)+b(t,v_1,v_2)+Z(t,z)|\le d \tag{2.29}$$

и выполняется условие Липшица

$$|Z(t,z_1)-Z(t,z_2)|\le\frac{1}{2}|z_1-z_2| \quad \text{при} \quad t\in[t_2,\omega[, \quad z_1,z_2\in\mathbb{R}_d. \tag{2.30}$$

Подобрав таким образом число t_2, обозначим через $\mathbf{B}$ банахово пространство непрерывных и ограниченных на множестве $\Omega=[t_2,\omega[\,\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$ функций $z\colon\Omega\to\mathbb{R}$ с нормой

$$\|z\|=\sup\left\{|z(t,v_n)|\colon (t,v_n)\in\Omega\right\}.$$

Выделим из него подпространство $\mathbf{B}_0$ тех функций из $\mathbf{B}$, для которых $\|z\|\le d$, и рассмотрим на $\mathbf{B}_0$, выбрав предварительно произвольным образом число $\nu\in(0,1)$, оператор

$$\Phi(z)(t,v_n)=z(t,v_n)-\nu\left[z(t,v_n)-a(t)-b(t,v_n)-Z(t,z(t,v_n))\right]. \tag{2.31}$$

Для любого $z\in\mathbf{B}_0$ в силу условия (2.29) имеем

$$|\Phi(z)(t,v_n)|\le(1-\nu)|z(t,v_n)|+\nu d\le d \quad \text{при} \quad (t,v_n)\in\Omega.$$

Следовательно, $\|\Phi(z)\|\le d$, т. е. $\Phi(\mathbf{B}_0)\subset\mathbf{B}_0$.

Пусть теперь $z_1,z_2\in\mathbf{B}_0$. Тогда в силу (2.30) при $(t,v_n)\in\Omega$

$$\begin{aligned}&|\Phi(z_1)(t,v_n)-\Phi(z_2)(t,v_n)|\le\\ &\quad\le(1-\nu)|z_1(t,v_n)-z_2(t,v_n)|+\nu|Z(t,z_1(t,v_n))-Z(t,z_2(t,v_n)|\le\\ &\quad\le(1-\nu)|z_1(t,v_n)-z_2(t,v_n)|+\frac{\nu}{2}\,|z_1(t,v_n)-z_2(t,v_n)|\le\left(1-\frac{\nu}{2}\right)\|z_1-z_2\|.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|\Phi(z_1)-\Phi(z_2)\|\le\left(1-\frac{\nu}{2}\right)\|z_1-z_2\|.$$

Тем самым показано, что оператор Φ отображает пространство $\mathbf{B}_0$ в себя и является на нем оператором сжатия. Тогда согласно принципу сжатых отображений существует единственная функция $z\in\mathbf{B}_0$ такая, что $z=\Phi(z)$. В силу (2.31) эта непрерывная на множестве Ω функция является единственным решением уравнения (2.24), удовлетворяющим условию $\|z\|\le d$. Из (2.24) с учетом этого условия и (2.26)–(2.28) следует, что данное решение стремится к нулю при $t\uparrow\omega$ равномерно по $v_n\in\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$. Непрерывная дифференцируемость этого решения на множестве $[t_0,\omega[\,\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$, где t_0 — некоторое число из промежутка $[t_2,\omega[$, непосредственно вытекает из известной локальной теоремы о существовании неявной функции, определяемой соотношением (2.24). В силу замены (2.23) полученной функции z соответствует непрерывно дифференцируемая на множестве $[t_0,\omega[\,\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$ функция Y вида (2.20), которая является решением уравнения (2.19) и удовлетворяет при $j=\overline{0,n-1}$ условиям

$$\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)\in\Delta_{Y_j}\quad\text{при}\quad (t,v_n)\in[t_0,\omega[\,\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}},\tag{2.32}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{\gamma_s J_{s00}(t)}{J_{s0}(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)=Y_j\quad\text{равномерно по}\quad v_n\in\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}.\tag{2.33}$$

Кроме того, для этой функции имеет место соотношение

$$\frac{\gamma\,(Y(t,v_n))'_t}{Y(t,v_n)}-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)L'_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)\right)}{L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)\right)}\times$$

$$\times\left[(n-j-1)\frac{\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)'}{\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}}+\frac{(Y(t,v_n))'_t}{Y(t,v_n)}\right]=\frac{\left(J_0(t)\left|\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right|^{\mu_n}\right)'}{J_0(t)\left|\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right|^{\mu_n}},$$

откуда следует, что

$$\frac{(Y(t,v_n))'_t}{Y(t,v_n)}\left[\gamma-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)L'_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)\right)}{L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)\right)}\right]=$$

$$=\frac{p(t)}{J_0(t)}\left[1+\frac{J_0^2(t)}{p(t)J_{00}(t)}\left(1-\frac{J_{00}(t)p(t)}{J_0^2(t)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\mu_n+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n-j-1)\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)L'_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)\right)}{L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)\right)}\right)\right].$$

Поэтому в силу условий (2.5), (2.12), (2.32) и (2.33)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{J_0(t)(Y(t,v_n))'_t}{p(t)Y(t,v_n)}=\frac{1}{\gamma},\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)(Y(t,v_n))'_t}{Y(t,v_n)}=\pm\infty\quad\text{равномерно по}\quad v_n\in\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}.\tag{2.34}$$

Теперь, с использованием замен

$$\frac{y^{(j)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}=\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}[1+v_{j+1}(t)],\quad j=\overline{0,n-2},\qquad y^{(n-1)}(t)=Y(t,v_n(t)),\tag{2.35}$$

и учетом того, что функция $y^{(n-1)}(t) = Y(t, v_n(t)$ при $t \in [t_0, \omega[$ и $v_n(t) \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\left|y^{(n-1)}(t)\right|^{\gamma}}{\prod_{j=0}^{n-1} L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)\right)} = Q(t)[1+v_n(t)],$$

сведем дифференциальное уравнение (1.1) к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v_i' = \dfrac{J_0(t)}{\gamma J_{00}(t)}\left[1+v_{i+1}-(1+v_i)g(t,v_1,\ldots,v_n)-(n-i)(1-h(t))(1+v_i)\right], \quad i=\overline{1,n-2}, \\ v_{n-1}' = \dfrac{J_0(t)}{\gamma J_{00}(t)}\left[1-(1+v_{n-1})g(t,v_1,\ldots,v_{n-1})-(1-h(t))(1+v_{n-1})\right], \\ v_n' = \dfrac{J_0(t)(1+v_n)}{\gamma J_{00}(t)}\Big[g(t,v_1,\ldots,v_n)\Big(\gamma-\sum_{j=0}^{n-1} H_j(t,v_n)\Big)- \\ \qquad -\gamma(1-h(t))\sum_{j=0}^{n-1}(n-j-1)H_j(t,v_n)-\gamma(h(t)+\mu_n(1-h(t)))\Big], \end{cases} \tag{2.36}$$

где

$$h(t) = \frac{p(t)J_{00}(t)}{J_0^2(t)},$$

$$H_j(t,v_n) = \frac{\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n) L_{0j}'\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)\right)}{L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)\right)}, \quad j=\overline{0,n-1},$$

$$g(t,v_1,\ldots,v_n) = \frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\,\frac{f(t,z_0(t,v_1,v_n),z_1(t,v_2,v_n),\ldots,z_{n-2}(t,v_{n-1},v_n),z_{n-1}(t,v_n))}{Y(t,v_n)},$$

$$z_j(t,v_{j+1},v_n) = \left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}(1+v_{j+1})Y(t,v_n), \quad j=\overline{0,n-2}, \quad z_{n-1}(t,v_n) = Y(t,v_n).$$

Ввиду условий (2.32), (2.33) правые части этой системы непрерывны на множестве $[t_*, \omega[\, \times \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$, где t_* — некоторое число из промежутка $[t_0, \omega[$, и

$$\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}} = \left\{(v_1,\ldots,v_n) \in \mathbb{R}^n \colon |v_i| \le \frac{1}{2},\ i=\overline{1,n}\right\}.$$

Кроме того, в силу первого из условий (2.5), а также (2.33) и второго из условий (2.12)

$$\lim_{t\uparrow\omega} h(t) = 1 \qquad \text{и} \qquad \lim_{t\uparrow\omega} H_j(t,v_n) = 0, \quad j=\overline{0,n-1}, \quad \text{равномерно по} \quad v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}. \tag{2.37}$$

Далее, получим представление для функции g. Поскольку

$$\frac{(z_j(t,v_{j+1},v_n))_t'}{z_j(t,v_{j+1},v_n)} = (n-j-1)(1-h(t))\frac{J_0(t)}{J_{00}(t)} + \frac{(Y(t,v_n))_t'}{Y(t,v_n)}, \quad j=\overline{0,n-2},$$

$$\frac{(z_{n-1}(t,v_n))'_t}{z_{n-1}(t,v_n)} = \frac{(Y(t,v_n))'_t}{Y(t,v_n)}$$

то согласно условиям (2.5), (2.33), (2.34) и первому из условий (2.37) равномерно по $(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$ имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega} z_{j-1}(t,v_j,v_n) = Y_{j-1}, \quad j=\overline{1,n-1}, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} z_{n-1}(t,v_n) = Y_{n-1},$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{(z_{j-1}(t,v_j,v_n))'_t z_j(t,v_{j+1},v_n)}{z_{j-1}(t,v_j,v_n)(z_j(t,v_{j+1},v_n))'_t} = 1, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)(z_j(t,v_{j+1},v_n)'_t}{z_j(t,v_{j+1},v_n)} = \pm\infty, \quad j=\overline{1,n-2},$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{(z_{n-2}(t,v_{n-1},v_n))'_t z_{n-1}(t,v_n)}{z_{n-2}(t,v_{n-1},v_n)(z_{n-1}(t,v_n))'_t} = 1, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)(z_{n-1}(t,v_n))'_t}{z_{n-1}(t,v_n)} = \pm\infty.$$

Тогда, учитывая, что функция f удовлетворяет условию $(RN)_1$, с использованием (2.11), свойства $\mathcal{M}_1$ медленно меняющихся функций, первого из условий (2.12), соотношения (2.19) и вида функции Q находим

$$\begin{aligned}
&f\left(t, z_0(t,v_1,v_n),\ldots,z_{n-2}(t,v_{n-1},v_n), z_{n-1}(t,v_n)\right) = \\
&\quad= \alpha_0 p(t)[1+r_1(t,v_1\ldots,v_n)]\varphi_{n-1}\times \\
&\quad\quad\times (Y(t,v_n))\prod_{j=0}^{n-2}\varphi_j\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)(1+v_{j+1})\right) = \\
&\quad= \alpha_0 p(t)[1+r_2(t,v_1,\ldots,v_n)]\left|\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right|^{\mu_n}|Y(t,v_n)|^{1-\gamma}\times \\
&\quad\quad\times \prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_j}\prod_{j=0}^{n-1}L_j\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)\right) = \\
&\quad= \frac{\nu_{n-1}\alpha_0 p(t)[1+r_3(t,v_1,\ldots,v_n)]Y(t,v_n)}{|Y(t,v_n)|^\gamma}\times \\
&\quad\quad\times \prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_j}\prod_{j=0}^{n-1}L_j\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1} Y(t,v_n)\right) = \\
&\quad= \frac{p(t)Y(t,v_n)}{\gamma J_0(t)}[1+r_3(t,v_1,\ldots,v_n)]\frac{\prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_j}}{1+v_n},
\end{aligned}$$

где

$$\lim_{\uparrow\omega} r_k(t,v_1,\ldots,v_n) = 0, \quad k=1,2,3, \quad \text{равномерно по} \quad (v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому функция g представима в виде

$$g(t,v_1,\ldots,v_n) = h(t)[1+r_3(t,v_1,\ldots,v_n)]\frac{\prod_{j=0}^{n-2}|1+v_{j+1}|^{\sigma_j}}{1+v_n}.$$

В силу этого представления и (2.37) система дифференциальных уравнений (2.36) может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} v_i' = \dfrac{J_0(t)}{\gamma J_{00}(t)} \left[F_i(t, v_1, \ldots, v_n) + 1 + v_{i+1} - \dfrac{(1+v_i)\prod_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_j}}{1+v_n} \right], \quad i = \overline{1, n-2}, \\ v_{n-1}' = \dfrac{J_0(t)}{\gamma J_{00}(t)} \left[F_{n-1}(t, v_1, \ldots, v_n) + 1 - \dfrac{(1+v_{n-1})\prod_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_j}}{1+v_n} \right], \\ v_n' = \dfrac{J_0(t)}{\gamma J_{00}(t)} \left[F_n(t, v_1, \ldots, v_n) - \gamma(1+v_n) + \gamma \prod_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_j} \right], \end{cases}$$

где

$$\lim_{t \uparrow \omega} F_i(t, v_1, \ldots, v_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}.$$

Выделяя теперь линейные части в слагаемых, стоящих в квадратных скобках после функций $F_i, \ i = \overline{1, n}$, получаем систему дифференциальных уравнений

$$v_i' = \frac{J_0(t)}{\gamma J_{00}(t)} \left(F_i(\tau, v_1, \ldots, v_n) + \sum_{k=1}^{n} p_{ik} v_k + V_i(v_1, \ldots, v_n) \right), \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.38}$$

в которой

$$p_{ii} = -1 - \sigma_{i-1}, \quad p_{ii+1} = 1 - \sigma_i, \quad p_{ik} = -\sigma_{k-1} \quad \text{при} \quad k \neq i, i+1, \quad i, k = \overline{1, n-1},$$

$$p_{in} = 1, \quad i = \overline{1, n-2}, \quad p_{n-1k} = -\sigma_{k-1}, \quad k = \overline{1, n-2},$$

$$p_{n-1n-1} = -1 - \sigma_{n-2}, \quad p_{n-1n} = 1, \quad p_{nk} = \gamma \sigma_{k-1}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad p_{nn} = -\gamma,$$

$$V_i(v_1, \ldots, v_n) = -\frac{(1+v_i)\prod_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_j}}{1+v_n} - v_n + (1+\sigma_{i-1})v_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n-1} \sigma_{k-1} v_k, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$V_n(v_1, \ldots, v_n) = \gamma \prod_{j=0}^{n-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_j} - \gamma \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_{k-1} v_k.$$

Здесь

$$V_i(0, \ldots, 0) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \qquad \lim_{|v_1| + \ldots + |v_n| \to 0} \frac{\partial V_i(v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_k} = 0, \quad i, k = \overline{1, n},$$

и в силу первого из условий (2.5), первого из неравенств (2.7), а также правила выбора пределов интегрирования в функциях $J_0, \ J_{00}$

$$\operatorname{sign} \left(\frac{J_0(t)}{\gamma J_{00}(t)} \right) = \alpha_0 \nu_{n-1}, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} \int_{t_*}^{t} \frac{J_0(\tau) d\tau}{\gamma J_{00}(\tau)} = \pm\infty.$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (2.38) принадлежит классу систем, которые исследовались во § 2 работы [14]. Нетрудно также убедиться в том, что для системы (2.38) характеристическое уравнение $\det[P-\rho E]=0$, где $P=(p_{ik})_{i,k=1}^{n}$ и E — единичная матрица размерности $(n\times n)$, имеет вид (2.4). В силу условий теоремы это уравнение не имеет корней с нулевой действительной частью. Поэтому согласно теореме 2.2 из [14] система (2.38) имеет по крайней мере одно решение $(v_i)_{i=1}^{n}\colon [t^*,\omega[\longrightarrow\mathbb{R}^n$, где $t^*\in[t_*,\omega[$, стремящееся к нулю при $t\uparrow\omega$, причем таких решений существует m-параметрическое семейство, если среди корней алгебраического уравнения (2.4) имеется m корней (с учетом кратных), действительные части которых имеют знак, противоположный знаку числа $\alpha_0\nu_{n-1}$.

Каждому такому решению в силу замен (2.35) соответствует решение $y\colon [t_2,\omega[\,\to\mathbb{R}$, $t_2\in[a,\omega[$, дифференциального уравнения (1.1), которое допускает при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (2.8) и

$$y^{(n-1)}(t)=\nu_{n-1}|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}+o(1)}, \tag{2.39}$$

причем $y^{(n-1)}$ удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$\frac{\left|y^{(n-1)}(t)\right|^{\gamma}}{\prod_{j=0}^{n-1}L_{0j}\left(\left(\dfrac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}y^{(n-1)}(t)\right)}=Q(t)[1+o(1)]\quad \text{при}\quad t\uparrow\omega,$$

которое в силу (2.33) и первых из условий (2.12) может быть записано в виде (2.9). Используя эти представления, а также условия (2.5) – (2.7), нетрудно проверить, что каждое такое решение дифференциального уравнения (1.1) является $P_\omega(Y_0,\dots,Y_{n-1},1)$-решением.

Теорема 2.1 доказана.

В теореме 2.1 асимптотическое представление для $(n-1)$-й производной $P_\omega(Y_0,\dots$ $\dots,Y_{n-1},1)$-решения уравнения (1.1) дается в неявном виде. Укажем условия, при выполнении которых асимптотические представления (2.8), (2.9) могут быть записаны в явном виде.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия теоремы 2.1 и медленно меняющиеся функции* L_j, $j=\overline{0,n-1}$, *удовлетворяют условию* S_0. *Тогда для каждого* $P_\omega(Y_0,\dots,Y_{n-1},1)$*-решения уравнения (1.1) имеют место при* $t\uparrow\omega$ *асимптотические представления*

$$y^{(j)}(t)=\nu_{n-1}\left(\frac{\gamma J_0(t)}{p(t)}\right)^{n-j-1}\times$$
$$\times\left|\gamma J_0(t)\left|\frac{\gamma J_0(t)}{p(t)}\right|^{\mu_n}\prod_{j=0}^{n-1}L_j\left(\nu_j|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma}}[1+o(1)],\quad j=\overline{0,n-1}. \tag{2.40}$$

Доказательство. Допустим, что дифференциальное уравнение (1.1) имеет $P_\omega(Y_0,\dots$ $\dots,Y_{n-1},1)$-решение $y\colon [t_0,\omega[\,\to\Delta_{Y_0}$. Тогда в силу теоремы 2.1 выполняются условия (2.5) – (2.7) и для данного решения при $t\uparrow\omega$ имеют место асимптотические соотношения (2.8), (2.9). Поскольку функции L_j, $j=0,1,\dots,n-1$, удовлетворяют условию S_0 и согласно правилу Лопиталя

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\ln\left|\dfrac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right|}{\ln|J_0(t)|}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{1-\dfrac{J_{00}(t)p(t)}{J_0^2(t)}}{\dfrac{J_{00}(t)p(t)}{J_0^2(t)}}=0,$$

то с учетом (2.5) – (2.7) и (2.39) находим, что

$$L_j\left(\left(\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right)^{n-j-1}y^{(n-1)}(t)\right)=$$
$$=L_j\left(\nu_j\exp\left[(n-j-1)\ln\left|\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right|+\left(\frac{1}{\gamma}+o(1)\right)\ln|J_0(t)|\right]\right)=$$
$$=L_j\left(\nu_j\exp\left[\left(\frac{1}{\gamma}+o(1)\right)\ln|J_0(t)|\right]\right)=L_j\left(\nu_j e^{[1+o(1)]\ln|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}}}\right)=$$
$$=L_j\left(\nu_j|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}}\right)[1+o(1)],\quad j=0,1,\ldots,n-1,\quad \text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Учитывая эти асимптотические соотношения, перепишем (2.9) в виде

$$\left|y^{(n-1)}(t)\right|^{\gamma}=\alpha_0\nu_{n-1}\gamma J_0(t)\left|\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right|^{\mu_n}\prod_{j=0}^{n-1}L_j\left(\nu_j|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}}\right)[1+o(1)]\quad \text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Отсюда следует, что

$$y^{(n-1)}(t)=\nu_{n-1}\left|\gamma J_0(t)\left|\frac{\gamma J_{00}(t)}{J_0(t)}\right|^{\mu_n}\prod_{j=0}^{n-1}L_j\left(\nu_j|J_0(t)|^{\frac{1}{\gamma}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma}}[1+o(1)]\quad \text{при}\quad t\uparrow\omega,$$

и поэтому в силу (2.8) имеют место асимптотические представления (2.40).

Замечание 2.4. При доказательстве теоремы 2.1 было показано, что при выполнении условия $(RN)_1$ и $\gamma\neq 0$ для каждого $P_\omega(Y_0,\ldots,Y_{n-1},1)$-решения дифференциального уравнения (1.1) имеют место асимптотические соотношения (2.18). Поэтому при проверке выполнения условия $(RN)_1$ можно ограничиться лишь рассмотрением таких функций $z_j\colon [a,\omega[\,\to\Delta_j,\ j=\overline{0,n-1}$, для которых наряду с (2.1), (2.2) выполняются условия

$$\frac{z_j'(t)}{z_j(t)}=\frac{p(t)}{\gamma J_0(t)}[1+o(1)],\quad j=\overline{0,n-1}\quad \text{при}\quad t\uparrow\omega. \tag{2.41}$$

3. Пример одного класса нелинейных дифференциальных уравнений. В качестве примера, иллюстрирующего полученные результаты, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}=\frac{\sum_{k=1}^{l}\alpha_k p_k(t)\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(y^{(j)})}{\sum_{k=l+1}^{m}\alpha_k p_k(t)\prod_{j=0}^{n-1}\varphi_{kj}(y^{(j)})}, \tag{3.1}$$

в котором $\alpha_k\in\{-1,1\}$, $p_k\colon [a,\omega[\,\to\,]0,+\infty[$ $(\omega\le+\infty)$ — непрерывная функция, $\varphi_{kj}\colon \Delta_{Y_j}\to\,]0,+\infty[$ — непрерывная и правильно меняющаяся при $y^j\to Y_j$ функция порядка

σ_{kj}, Y_j равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_j} — некоторая односторонняя окрестность Y_j, $k = 1, \ldots, m$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

При этом будем предполагать, что для некоторых $s \in \{1, \ldots, l\}$ и $r \in \{l+1, \ldots, m\}$ выполняются условия

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta_{sr} \ln |J_{0sr}(t)|} < \frac{\beta_{sr}(\gamma_k - \gamma_s)}{\gamma_{sr}} \quad \text{при} \quad k \in \{1, \ldots, l\} \setminus \{s\}, \tag{3.2}$$

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_r(t)}{\beta_{sr} \ln |J_{0sr}(t)|} < \frac{\beta_{sr}(\gamma_k - \gamma_r)}{\gamma_{sr}} \quad \text{при} \quad k \in \{l+1, \ldots, m\} \setminus \{r\}, \tag{3.3}$$

где

$$\gamma_k = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{kj}, \quad k = \overline{1, m}, \quad \gamma_{sr} = 1 - (\gamma_r - \gamma_s), \quad J_{0sr}(t) = \int\limits_{A_{sr}}^{t} \frac{p_s(\tau) d\tau}{p_r(\tau)},$$

$$A_{sr} = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \displaystyle\int_a^\omega \frac{p_s(\tau) d\tau}{p_r(\tau)} = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \displaystyle\int_a^\omega \frac{p_s(\tau) d\tau}{p_r(\tau)} < +\infty, \end{cases} \qquad \beta_{sr} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad A_{sr} = a, \\ -1, & \text{если} \quad A_{sr} = \omega. \end{cases}$$

Покажем, что при выполнении этих условий правая часть уравнения (3.1) удовлетворяет условию RN_1.

Пусть $z_j \colon [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_j}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, — произвольные непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям (2.1), (2.2). В силу замечания 2.4 (и полученного ниже представления (3.4)) можно ограничиться лишь рассмотрением таких из них, для которых имеют место асимптотические соотношения

$$\frac{z_j'(t)}{z_j(t)} \sim \frac{\frac{p_s(t)}{p_r(t)}}{\gamma_{sr} J_{0sr}(t)}, \quad j = \overline{0, n-1} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

откуда следует, что

$$\ln |z_j(t)| = \left(\frac{1}{\gamma_{sr}} + o(1) \right) \ln |J_{0sr}(t)| \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Учитывая эти асимптотические соотношения, а также представления

$$\varphi_{kj}(y^{(j)}) = \left| y^{(j)} \right|^{\sigma_{kj}} L_{kj}(y^{(j)}), \quad k = 1, \ldots, m, \quad j = 0, \ldots, n-1,$$

где $L_{kj}(y^{(j)}) \colon \Delta_{Y_j} \to]0, +\infty[$ — непрерывная медленно меняющаяся функция при $y^{(j)} \to \to Y_j$, а также свойство $\mathcal{M}_2$ медленно меняющихся функций (из введения), при $k \in \in \{1, \ldots, l\} \setminus \{s\}$ будем иметь

$$\ln \left(\frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(z_j(t))} \right) = \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \sum_{j=0}^{n-1} (\ln \varphi_{kj}(z_j(t)) - \ln \varphi_{sj}(z_j(t))) =$$

$$= \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \left((\sigma_{kj} - \sigma_{sj}) \ln |z_j(t)| + \ln L_{kj}(z_j(t)) - L_{sj}(z_j(t)) \right) =$$

$$= \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \ln |z_j(t)| \left(\sigma_{kj} - \sigma_{sj} + \frac{\ln L_{kj}(z_j(t))}{\ln |z_j(t)|} - \frac{\ln L_{sj}(z_j(t))}{\ln |z_j(t)|} \right) =$$

$$= \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \frac{\ln |J_{0sr}(t)|}{\gamma_{sr}} \sum_{j=0}^{n-1} (\sigma_{kj} - \sigma_{sj} + o(1)) =$$

$$= |\ln |J_{0sr}(t)|| \left(\frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta_{sr} \ln |J_{0sr}(t)|} - \frac{\beta sr}{\gamma_{sr}} (\gamma_k - \gamma_s + o(1)) \right) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда в силу выполнения условия (3.2) следует, что выражение, стоящее слева, стремится к $-\infty$ при $t \uparrow \omega$ и поэтому

$$\lim_{t \uparrow \omega} \left(\frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(z_j(t))} \right) = 0 \quad \text{при всех} \quad k \in \{1, \ldots, l\} \setminus \{s\}.$$

Аналогично, с использованием условия (3.3) устанавливаем, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} \left(\frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{p_r(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{rj}(z_j(t))} \right) = 0 \quad \text{при всех} \quad k \in \{l+1, \ldots, m\} \setminus \{r\}.$$

В силу этих предельных соотношений

$$\frac{\sum_{k=1}^{l} \alpha_k p_k \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{\sum_{k=l+1}^{m} \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))} = \frac{\alpha_s p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(z_j(t))}{\alpha_r p_r(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{rj}(z_j(t))} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \quad (3.4)$$

т. е. имеет место асимптотическое соотношение (2.3), в котором

$$\alpha_0 = \alpha_s \alpha_r, \quad p(t) = \frac{p_s(t)}{p_r(t)}, \quad \varphi_j(z_j(t)) = \frac{\varphi_{sj}(z_j(t))}{\varphi_{rj}(z_j(t)}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

причем здесь φ_j — непрерывная правильно меняющаяся при $z_j \to Y_j$ функция порядка $\sigma_j = \sigma_{sj} - \sigma_{rj}$ и ее медленно меняющаяся составляющая L_j равна отношению медленно меняющихся составляющих L_{sj} и L_{rj} функций φ_{sj} и φ_{rj}.

Следовательно, правая часть уравнения (3.1) удовлетворяет условию $(RN)_1$. Поэтому в случае, когда при некоторых $s \in \{1, \ldots, l\}$, $r \in \{l+1, \ldots, m\}$ выполняются условия (3.2), (3.3) и отлична от нуля постоянная $\gamma = \gamma_{sr}$, для уравнения (3.1) справедливы утверждения теорем 2.1 и 2.2 о существовании и асимптотике $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, 1)$-решений с заменой в этих утверждениях постоянных α_0, σ_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, и функций p, φ_j, L_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, на указанные выше постоянные и функции.

4. Выводы. В настоящей статье для дифференциального уравнения (1.1) при выполнении условия RN_1 получены необходимые и достаточные условия существования $P_\omega(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}, 1)$-решений, которые являются быстро меняющимися вместе с производными до порядка $n-1$ функциями при $t \uparrow \omega$, а также установлены асимптотические при $t \uparrow \omega$ представления для таких решений и их производных до порядка $n-1$ включительно. Полученные результаты проиллюстрированы на примере класса дифференциальных уравнений n-го порядка вида (3.1).

Литература

1. *Евтухов В. М., Клопот А. М.* Асимптотика некоторых классов решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 3. – С. 354 – 380.
2. *Клопот А. М.* Об асимптотике решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка // Нелин. колебания. – 2012. – **15**, № 4. – С. 447 – 465.
3. *Евтухов В. М., Клопот А. М.* Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2014. – **50**, № 5. – С. 584 – 600.
4. *Клопот А. М.* Об асимптотике решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка // Нелинейные колебания. – 2012. – **15**, № 4. – С. 447 – 465.
5. *Evtukhov V. M., Klopot A. M.* Asymptotic behavior of solutions of ordinary differential equations of n-th order with regularly varying nonlinearities // Mem. Differ. Equ. Math. Phys. – 2014. – **61**. – P. 37 – 61.
6. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
7. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. – 494 p.
8. *Marić V.* Regular variation and differential equations // Lecture Notes in Math. – 2000. – 128 p.
9. *Евтухов В. М., Кусик Л. И.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика і механіка. – 2009. – **14**, вип. 20. – С. 57 – 74.
10. *Евтухов В. М., Кусик Л. И.* Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 2013. – **49**, № 4. – С. 424 – 438.
11. *Кусик Л. И.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Нелин. колебания. – 2011. – **14**, № 3. – С. 333 – 349.
12. *Кусик Л. И.* Условия существования и асимптотика некоторого класса решений дифференциальных уравнений второго порядка // Мат. студії. – 2014. – **41**, № 2. – С. 184 – 197.
13. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук, 1997. – 295 с.
14. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 52 – 80.

Получено 16.06.19