УДК 517.929

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

Г. П. Пелюх, Д. В. Бельский

Ин-т математики НАН Украины
ул. Терещенковская, 3, Киев, 01601, Украина
e-mail: grygor@imath.kiev.ua,
oiop120@gmail.com

We find new properties of solutions of the functional-differential equation with a linearly transformed argument.

Встановлено нові властивості розв'язків диференціально-функціонального рівняння з лінійно перетвореним аргументом.

В данной работе рассматривается обобщенное уравнение пантографа

$$x'(t) = ax(t) + bx(qt) + cx'(qt) + f(t), \tag{1}$$

где $\operatorname{Re} a = 0,\ a \neq 0,\ \{b, c\} \subset \mathrm{C},\ 0 < q < 1$. При $c = 0,\ f(t) \equiv 0$ это уравнение исследовалось в [1 – 8], в случае $c \neq 0,\ f(t) \equiv 0$ — в [9 – 11]. Нелинейное дифференциальное уравнение с линейным запаздыванием нейтрального типа впервые рассмотрено в работе [12], где описан класс автомодельных потенциалов в уравнении Шредингера и частично изучены собственные функции операторов симметрии, называемые когерентными состояниями. Некоторые из этих когерентных состояний (например, состояния Юрке – Столера) имеют практическое применение. Это нелинейное уравнение в окрестности постоянных решений изучено в [10]. Дифференциально-функциональные уравнения нейтрального типа с линейным отклонением аргумента и особенностью при производной рассмотрены в большом цикле работ (см. [13 – 17] и цитированную в них литературу). Неоднородное уравнение (1) изучалось при $c = 0$ в [18, 19], при $c \neq 0$ — в [20]. Несмотря на то, что такие уравнения имеют широкие приложения в различных областях науки и техники, многие вопросы теории дифференциально-функционального уравнения (1) изучены мало. Это прежде всего касается асимптотического поведения решений этого уравнения в окрестности особой точки $t = +\infty$. В силу этого основной целью настоящей статьи является дополнение результатов [20] для случая $\operatorname{Re} a = 0,\ a \neq 0$.

В дальнейшем числа M_j — неотрицательные постоянные, а символы $O(\ldots)$ нужно понимать при $t \to +\infty$.

В дальнейшем понадобится следующая лемма.

Лемма 1 [19]. *Пусть:*

1) $\mu < 0,\ \gamma > 0$ *и* l *— комплексное число такое, что* $|l| = e^{\gamma\mu}$;

2) $W(s)$ *— решение разностного уравнения*

$$W(s) - lW(s + \mu) = G(s),$$

где $G(s)$ — непрерывная функция такая, что

$$|G(s)| \leq M_1 e^{-\beta s}, \quad s \geq s_0,$$

для некоторых положительных величин $\beta,\ s_0,$ и $|W(s)| \leq M_2$ для $s \in [s_0 + \mu, s_0]$.

Тогда:

I) $|W(s)| \leq M_3 e^{-\gamma s},\ s \geq s_0,$ *если* $\gamma < \beta$;

II) $|W(s)| \leq M_3 s e^{-\gamma s},\ s \geq s_0,$ *если* $\gamma = \beta$;

III) $|W(s)| \leq M_3 e^{-\beta s},\ s \geq s_0,$ *если* $\gamma > \beta$.

Фундаментальное решение $G(t, t_0)$ является единственным непрерывным решением начальной задачи

$$x'(t) = ax(t) + bx(qt) + cx'(qt), \tag{2}$$

$$x(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < t_0, \\ 1, & t = t_0. \end{cases} \tag{3}$$

Основываясь на представлении решений уравнения (2) рядами Дирихле в [21], будем искать решение задачи (2), (3) в форме

$$G(t, t_0) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} D_{k,l} e^{q^{-l} a \left(q^k t - t_0 \right)}, \quad t \in \left[q^{-n} t_0, q^{-n-1} t_0 \right], \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{4}$$

Так как $G(t, t_0) = e^{a(t - t_0)}$ для $t \in \left[t_0, q^{-1} t_0 \right]$, имеем $D_{0,0} = 1$. Применяя метод шагов к начальной задаче (2), (3), для коэффициентов в формуле (4) получаем рекуррентные соотношения

$$aD_{k,k} - D_{k,k} a = 0,$$

$$aD_{k,l} - q^{k-l} aD_{k,l} = -bD_{k-1,l} - q^{k-l-1} acD_{k-1,l}, \quad l = 0, 1, \ldots, k-1,$$

и условие непрерывности функции $G(t, t_0)$ в точках $t = q^{-k} t_0$:

$$D_{k,k} = -\sum_{l=0}^{k-1} D_{k,l}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Теорема 1 [18]. *Если $a \neq 0$, то фундаментальное решение имеет представление*

$$G(t, t_0) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \left(\prod_{j=1}^{k-l} \frac{a^{-1} b + q^{k-l-j} c}{1 - q^j} \right) \left(\prod_{j=1}^{l} \frac{c + q^{l-j} a^{-1} b}{1 - q^j} \right) e^{q^{-l} a \left(q^k t - t_0 \right)},$$
$$t \in \left[q^{-n} t_0, q^{-n-1} t_0 \right], \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{5}$$

Пример. Пусть $a^{-1} b = -1,\ c = 1$. Тогда для $t \in \left[q^{-n} t_0, q^{-n-1} t_0 \right]$, $n = 0, 1, \ldots,$ получаем фундаментальное решение уравнения

$$x'(t) = ax(t) - ax(qt) + x'(qt)$$

в виде

$$G(t, t_0) = e^{a(t - t_0)}.$$

Это уравнение имеет частное решение $x_1(t) \equiv 1$. Данный пример показывает сложности, возникающие при выводе аналога формулы вариации произвольных постоянных на основе непрерывного фундаментального решения $G\,(t, t_0)$.

Формула вариации произвольных постоянных для уравнения (1), где $f \in C(0, +\infty)$, имеет вид

$$x(t; t_0, \varphi, f) = \varphi(t_0)Y(t, t_0) + \int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0} \big(b\varphi(qs) + c\varphi'(qs)\big) \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{c}{q}\right)^l Y\left(q^l t, s\right) ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \left(f(s) - \varphi(t_0)c\left(q^{-1} - 1\right) Y'(qs, t_0)\right) \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{c}{q}\right)^l Y\left(q^l t, s\right) ds, \qquad (6)$$

где $Y(t, t_0)$ — непрерывное фундаментальное решение начальной задачи (3) и

$$x'(t) = ax(t) + bx(qt) + \frac{c}{q}x'(qt), \quad t \ge t_0 > 0.$$

Чтобы в этом убедиться, необходимо учесть тождества

$$Y'(t, t_0) = a\sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{c}{q}\right)^l Y\left(q^l t, t_0\right) + b\sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{c}{q}\right)^l Y\left(q^{l+1} t, t_0\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(Y\,(t, t_0) - \frac{c}{q^2}Y(qt, t_0)\right) = Y'(t, t_0) - \frac{c}{q}Y'(qt, t_0) = aY(t, t_0) + bY(qt, t_0).$$

Тогда, дифференцируя равенство

$$x(t) - \frac{c}{q}\,x(qt) = \varphi(t_0)\left(Y(t, t_0) - \frac{c}{q^2}\,Y(qt, t_0)\right) + \varphi(t_0)\frac{c}{q}\left(\frac{1}{q} - 1\right) Y(qt, t_0) +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0} \big(b\varphi(qs) + c\varphi'(qs)\big)\, Y(t, s) ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \left(f(s) - \varphi(t_0)c\left(q^{-1} - 1\right) Y'(qs, t_0)\right) Y(t, s) ds$$

при $t \ge q^{-1}t_0,\ t \ne q^{-k}t_0,\ k = 1, 2, \ldots,$ получаем

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) - \frac{c}{q}\,x(qt)\right) = ax(t) + bx(qt) + f(t).$$

На отрезке $t \in \left[t_0, q^{-1}t_0\right]$ выполняется равенство

$$x(t) = \varphi(t_0)e^{a(t-t_0)} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{a(t-s)} \big(b\varphi(qs) + c\varphi'(qs) + f(s)\big)\, ds,$$

т. е. функция $x(t;t_0,\varphi,f)$ является непрерывным решением уравнения (1) для $t\geq q^{-1}t_0$, $t\neq q^{-k}t_0$, $k=1,2,\ldots$, и совпадает с решением начальной задачи (1), $x(t)=\varphi(t)$, $t\in\in[qt_0,t_0]$, $\varphi\in C^1[qt_0,t_0]$ на отрезке $t\in\left[t_0,q^{-1}t_0\right]$, а значит, и на всей полуоси $t\geq t_0$.

В случае $q>1$ формула (6) выполняется со следующими изменениями: функция $Y\left(t,t_0\right)$ — это непрерывное фундаментальное решение начальной задачи

$$x'(t)=ax(t)+bx(qt)+\frac{c}{q}\,x'(qt),\quad 0<t\leq t_0,$$

$$x(t)=\begin{cases}0, & t>t_0,\\ 1, & t=t_0,\end{cases}$$

в равенстве (5) независимая переменная t принадлежит отрезку $\left[q^{-n-1}t_0,q^{-n}t_0\right]$.

При условии $\varphi(t_0)=0$ формула вариации произвольных постоянных (6) приобретает более упрощенный вид. Это условие можно выполнить, если построить решение уравнения (2), которое в точке $t=t_0$ будет принимать значение 1; обозначим его символом $x_0(t)$. Тогда разность $y(t)\overset{\mathrm{df}}{=}x(t;t_0,\varphi,f)-\varphi(t_0)x_0(t)$ будет решением неоднородного уравнения, которое обнуляется в точке $t=t_0$. Поэтому для него выполняется тождество

$$y(t)=x(t;t_0,y,f)=\int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0}\big(by(qs)+cy'(qs)\big)\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{c}{q}\right)^l Y\left(q^lt,s\right)ds+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}f(s)\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{c}{q}\right)^l Y\left(q^lt,s\right)ds. \tag{7}$$

Производная $x^{(p)}(t)$ решения уравнения (2) является в свою очередь решением уравнения

$$z'(t)=az(t)+bq^pz(qt)+cq^pz'(qt), \tag{8}$$

которое также имеет почти периодическое решение

$$h_p(t)=e^{at}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(b+ac)(b+acq)\ldots\left(b+acq^{n-1}\right)}{a^n(1-q)\left(1-q^2\right)\ldots\left(1-q^n\right)}\,q^{pn}\,e^{aq^nt},$$

если $|b|q^p<|a|$. Процесс интегрирования решений уравнения (2) и, в частности, решения $h_p(t)$ в случае $c=0$ детально изучен в [5]. Свойства функции $h(x)$ из [5] сохраняются и в случае $c\neq0$. Как и в работе [5], для всех значений параметра $p\geq0$ решение $h_p(t)$, полученное, возможно, в результате интегрирования решения (ряда) $h_{p_1}(t)$, где p_1 — достаточно большое целое число, будем обозначать одним и тем же символом.

Теорема 2. *Если выполняются условия:*

1) *коэффициенты уравнения (1) такие, что* $\operatorname{Re}a=0$, $abc\neq0$;

2) *величина* $v_1\in\mathrm{C}$ *определяется из равенства* $a+bq^{v_1}=0$, $v_0\overset{\mathrm{df}}{=}\operatorname{Re}v_1$;

3) *функция* $f(t)\in C^j[1,+\infty)$ *и* $f^{(m)}(t)=O\left(t^{\alpha-m}\right)$, $t\to+\infty$, $\alpha\in\mathrm{R}$, $m=\overline{0,j}$, *где параметр* $j\in\mathrm{N}\bigcup\{0\}$ *полагаем достаточно большим, чтобы удовлетворять дальнейшим рассуждениям в доказательстве теоремы*;

4) *выполняется неравенство* $\max\{v_0, \alpha\} \geq 1$.

Тогда для каждого достаточно гладкого решения $x(t)$ *уравнения (1) существует постоянная* L *такая, что выполняются оценки:*

I) *если* $\alpha < v_0$, *то* $x(t) - Lh_0(t) = O\left(t^{v_0}\right)$;

II) *если* $\alpha = v_0$, *то* $x(t) - Lh_0(t) = O\left(t^{v_0} \ln t\right)$;

III) *если* $\alpha > v_0$, *то* $x(t) - Lh_0(t) = O\left(t^{\alpha}\right)$.

Доказательство. Формула вариации произвольных постоянных (6) для уравнения

$$z'(t) = az(t) + bq^p z(qt) + cq^p z'(qt) + f^{(p)}(t) \tag{9}$$

имеет вид

$$z\left(t; t_0, \varphi, f^{(p)}\right) = \varphi(t_0) Y_p(t, t_0) + \int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0} \left(bq^p \varphi(qs) + cq^p \varphi'(qs)\right) \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{cq^p}{q}\right)^l Y_p\left(q^l t, s\right) ds +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \left(f^{(p)}(s) - \varphi(t_0) cq^p \left(q^{-1} - 1\right) Y_p'(qs, t_0)\right) \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{cq^p}{q}\right)^l Y_p\left(q^l t, s\right) ds, \tag{10}$$

где $Y_p\left(t, t_0\right)$ — непрерывное фундаментальное решение начальной задачи

$$\begin{gathered} z'(t) = az(t) + bq^p z(qt) + \frac{cq^p}{q} z'(qt), \quad t \geq t_0 > 0, \\ z(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < t_0, \\ 1, & t = t_0. \end{cases} \end{gathered} \tag{11}$$

С помощью тождества (5) на основе формулы непрерывного фундаментального решения $Y_p(t, t_0)$ определим функцию

$$Y_{p,\infty}(t, t_0) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \left(\prod_{j=1}^{k-l} \frac{a^{-1} bq^p + q^{k-l-j} cq^{p-1}}{1 - q^j}\right) \times$$
$$\times \left(\prod_{j=1}^{l} \frac{cq^{p-1} + q^{l-j} a^{-1} bq^p}{1 - q^j}\right) e^{q^{-l} a \left(q^k t - t_0\right)}. \tag{12}$$

Если $M_1 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \max\left\{\left|a^{-1} bq^p\right|, \left|cq^{p-1}\right|\right\} < 1$, то для достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполняется оценка

$$\left|Y_{p,\infty}(t, t_0)\right| \leq \left(\prod_{j=1}^{+\infty} \frac{1 + q^{j-1}}{1 - q^j}\right)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} M_1^k (k+1) \leq \left(\prod_{j=1}^{+\infty} \frac{1 + q^{j-1}}{1 - q^j}\right)^2 M_2 \sum_{k=0}^{+\infty} e^{k(\ln M_1 + \varepsilon)}. \tag{13}$$

Аналогичная оценка имеет место для производной $Y'_{p,\infty}(t,t_0)$, поэтому функция $Y_{p,\infty}(t,t_0)$ является решением уравнения (11). Отсюда с учетом ограниченности почти периодической функции в пределе получаем равенство

$$Y'_{p,\infty}(t,t_0) = a\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{cq^p}{q}\right)^l Y_{p,\infty}\left(q^l t, t_0\right) + bq^p\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{cq^p}{q}\right)^l Y_{p,\infty}\left(q^{l+1}t, t_0\right). \qquad (14)$$

Определим функцию

$$g(t;t_0,\varphi) \stackrel{\text{df}}{=} \int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0}\left(bq^p\varphi(qs) + cq^p\varphi'(qs)\right)\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{cq^p}{q}\right)^l Y_{p,\infty}\left(q^l t, s\right)ds.$$

Тогда

$$g\left(t;t_0,\varphi\right) - \frac{cq^p}{q}\,g(qt;t_0,\varphi) = \int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0}\left(bq^p\varphi(qs) + cq^p\varphi'(qs)\right)Y_{p,\infty}(t,s)ds,$$

и, принимая во внимание (14), получаем

$$\frac{d}{dt}\left(g(t;t_0,\varphi) - \frac{cq^p}{q}\,g(qt;t_0,\varphi)\right) = \int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0}\left(bq^p\varphi(qs) + cq^p\varphi'(qs)\right)Y'_{p,\infty}(t,s)ds =$$

$$= ag(t;t_0,\varphi) + bq^p g(qt;t_0,\varphi),$$

т. е. функция $g(t;t_0,\varphi)$ является решением уравнения (8). Учитывая абсолютную и равномерную сходимость соответствующих рядов, с помощью формулы (12) для решения $g(t;t_0,\varphi)$ получаем тождество

$$g(t;t_0,\varphi) = \sum_{w=0}^{+\infty}\left(\frac{cq^p}{q}\right)^w\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\left(\prod_{j=1}^{k-l}\frac{a^{-1}bq^p + q^{k-l-j}cq^{p-1}}{1-q^j}\right)\times$$

$$\times\left(\prod_{j=1}^{l}\frac{cq^{p-1} + q^{l-j}a^{-1}bq^p}{1-q^j}\right)e^{aq^{k+w-l}t}\int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0}\left(bq^p\varphi(qs) + cq^p\varphi'(qs)\right)e^{-aq^{-l}s}ds.$$

Поэтому решение $g(t;t_0,\varphi)$ уравнения (8) является абсолютно и равномерно сходящимся рядом из экспонент $e^{aq^n t},\ n \geq 0,$ с некоторыми коэффициентами, однозначно определяющимися подстановкой ряда в уравнение. Следовательно, выполняется тождество

$$g(t;t_0,\varphi) = L_p(t_0,\varphi)h_p(t) \qquad (15)$$

для некоторой постоянной $L_p(t_0,\varphi)$.

Предположим, что t_0 выбрано таким, что $h_p(t_0) \neq 0$. Тогда разность

$$y(t) \stackrel{\text{df}}{=} z\left(t;t_0,\varphi,f^{(p)}\right) - \varphi(t_0)\,\frac{h_p(t)}{h_p(t_0)}$$

будет решением уравнения (9), которое обнуляется в точке $t = t_0$. Поэтому согласно формуле (10) для него выполняется следующее тождество, аналогичное равенству (7):

$$y(t) = z\left(t; t_0, y, f^{(p)}\right) = \int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0} \left(bq^p y(qs) + cq^p y'(qs)\right) \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{cq^p}{q}\right)^l Y_p\left(q^l t, s\right) ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} f^{(p)}(s) \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{cq^p}{q}\right)^l Y_p\left(q^l t, s\right) ds.$$

Оценим разность двух решений уравнения (8):

$$\int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0} \left(bq^p y(qs) + cq^p y'(qs)\right) \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{cq^p}{q}\right)^l Y_p\left(q^l t, s\right) ds - g\left(t; t_0, y\right) =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0} \left(bq^p y(qs) + cq^p y'(qs)\right) \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{cq^p}{q}\right)^l \left(Y_p\left(q^l t, s\right) - Y_{p,\infty}\left(q^l t, s\right)\right) ds.$$

Предположим, что $t \geq q^{-1}t_0$ и $t \in \left[q^{-n}s, q^{-n-1}s\right]$, $n = 0, 1, \ldots$. Тогда для $0 \leq l \leq n$ получаем

$$Y_p\left(q^l t, s\right) - Y_{p,\infty}\left(q^l t, s\right) = - \sum_{k=n-l+1}^{+\infty} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \left(\prod_{j=1}^{k-l} \frac{a^{-1}bq^p + q^{k-l-j}cq^{p-1}}{1-q^j}\right) \times$$

$$\times \left(\prod_{j=1}^{l} \frac{cq^{p-1} + q^{l-j}a^{-1}bq^p}{1-q^j}\right) e^{q^{-l}a\left(q^k t - s\right)}.$$

Отсюда так же, как и при выводе оценки (13), получаем неравенство

$$\left|Y_p\left(q^l t, s\right) - Y_{p,\infty}\left(q^l t, s\right)\right| \leq \left(\prod_{j=1}^{+\infty} \frac{1+q^{j-1}}{1-q^j}\right)^2 M_2 \sum_{k=n-l+1}^{+\infty} e^{k(\ln M_1 + \varepsilon)} = M_3 e^{(n-l+1)(\ln M_1 + \varepsilon)}.$$

Поэтому ряд под знаком интеграла можно оценить следующим образом:

$$\left|\sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{cq^p}{q}\right)^l \left(Y_p\left(q^l t, s\right) - Y_{p,\infty}\left(q^l t, s\right)\right)\right|$$

$$\leq \sum_{l=0}^{n} M_1^l M_3 e^{(n-l+1)(\ln M_1 + \varepsilon)} + \sum_{l=n+1}^{+\infty} M_1^l M_4 \leq$$

$$\leq M_3 e^{(n+1)(\ln M_1 + \varepsilon)} \frac{1}{1 - e^{-\varepsilon}} + M_4 e^{(n+1)\ln M_1} \frac{1}{1 - M_1}.$$

Так как $\left(\ln q^{-1}\right)^{-1}\ln\left(\dfrac{t}{q^{-1}\,t_0}\right)\le\left(\ln q^{-1}\right)^{-1}\ln\left(\dfrac{t}{s}\right)\le n+1,$ то оценку ряда можно продолжить:

$$\left|\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{cq^p}{q}\right)^l\left(Y_p\left(q^lt,s\right)-Y_{p,\infty}\left(q^lt,s\right)\right)\right|\le M_5t^{\frac{\ln M_1+\varepsilon}{\ln q^{-1}}}.$$

Тогда

$$\left|\int\limits_{t_0}^{q^{-1}t_0}\left(bq^py(qs)+cq^py'(qs)\right)\sum_{l=0}^{+\infty}\left(\frac{cq^p}{q}\right)^lY_p\left(q^lt,s\right)ds-g(t;t_0,y)\right|\le M_6t^{\frac{\ln M_1+\varepsilon}{\ln q^{-1}}},\quad t\ge t_0.$$

Пусть $x^{(p)}(t)=z\left(t;t_0,\varphi,f^{(p)}\right)$. Отсюда, принимая во внимание определение функции $y(t)$ и равенство (15), получаем, что разность решений

$$\mu_p(t)\stackrel{\mathrm{df}}{=}y(t)-g(t;t_0,y)=z\left(t;t_0,\varphi,f^{(p)}\right)-\varphi(t_0)\frac{h_p(t)}{h_p(t_0)}-L_p(t_0,y)h_p(t)=$$

$$=x^{(p)}(t)-L_{p,h}h_p(t),$$

где $L_{p,h}$ — некоторая константа, будет решением уравнения (9), которое имеет в качестве первообразной решение

$$\mu_{p-1}(t)=x^{(p-1)}(t)-L_{p,h}h_{p-1}(t)$$

уравнения

$$z'(t)=az(t)+bq^{p-1}z(qt)+cq^{p-1}z'(qt)+f^{(p-1)}(t).\tag{16}$$

Этот процесс можно продолжить и получить зависимость

$$\mu_0^{(j)}(t)=\mu_j(t)=x^{(j)}(t)-L_{p,h}h_j(t)$$

для $0\le j\le p$. Таким образом,

$$\mu_0^{(p)}(t)=\mu_p(t)=O\left(t^{\max\left\{\frac{\ln M_1+\varepsilon}{\ln q^{-1}},\alpha-p+1,0\right\}}\right).$$

При этом функция $\mu_0^{(p-1)}(t)=\mu_{p-1}(t)$ является решением уравнения (16):

$$\mu_0^{(p-1)}(t)=-a^{-1}bq^{p-1}\mu_0^{(p-1)}(qt)+a^{-1}\mu_0^{(p)}(t)-a^{-1}cq^{p-1}\mu_0^{(p)}(qt)-a^{-1}f^{(p-1)}(t)\stackrel{\mathrm{df}}{=}$$

$$\stackrel{\mathrm{df}}{=}-a^{-1}bq^{p-1}\mu_0^{(p-1)}(qt)+g(t).$$

Сделаем замену переменных $\mu_0^{(p-1)}(t)=t^{v_*}\eta(t),$ где $v_*\ge\max\left\{\dfrac{\ln M_1+\varepsilon}{\ln q^{-1}},\alpha-p+1,0\right\}$ и $v_*>\left(\ln q^{-1}\right)^{-1}\ln\left(\left|a^{-1}bq^{p-1}\right|\right)=v_0-(p-1)$:

$$\eta(t)=-a^{-1}bq^{p-1}q^{v_*}\eta(qt)+t^{-v_*}g(t).$$

Так как $\left|a^{-1}bq^{p-1}q^{v_*}\right| < 1$ и неоднородность $t^{-v_*}f(t)$ ограничена, то функция $\eta(t)$ тоже ограничена. Поэтому

$$\mu_0^{(p-1)}(t) = O\left(t^{v_*}\right) = O\left(t^{\max\left\{v_0-(p-1)+\varepsilon,\frac{\ln M_1+\varepsilon}{\ln q^{-1}},\alpha-p+1,0\right\}}\right).$$

Повторяя этот процесс, убеждаемся, что

$$\mu_0^{(p-2)}(t) = O\left(t^{\max\left\{v_0-(p-2)+\varepsilon;\max\left\{v_0-(p-1)+\varepsilon,\frac{\ln M_1+\varepsilon}{\ln q^{-1}},\alpha-p+1,0\right\};\alpha-p+2\right\}}\right) =$$

$$= O\left(t^{\max\left\{v_0-(p-2)+\varepsilon,\frac{\ln M_1+\varepsilon}{\ln q^{-1}},\alpha-p+2,0\right\}}\right).$$

Действуя таким образом несколько раз, получаем

$$\mu_0^{(j)}(t) = O\left(t^{\max\left\{v_0-j+\varepsilon,\frac{\ln M_1+\varepsilon}{\ln q^{-1}},\alpha-j,0\right\}}\right), \quad 0 \le j \le p-1.$$

Предположим, что выполняется неравенство $\max\{v_0-1,\alpha-1,0\} > \dfrac{\ln M_1}{\ln q^{-1}}$. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ получаем оценки

$$\mu_0(t) = O\left(t^{\max\{v_0+\varepsilon,\alpha,0\}}\right) = O\left(t^{\max\{v_0-1,\alpha-1,0\}+\varepsilon+1}\right),$$

$$\mu_0^{(1)}(t) = O\left(t^{\max\{v_0-1+\varepsilon,\alpha-1,0\}}\right) = O\left(t^{\max\{v_0-1,\alpha-1,0\}+\varepsilon}\right).$$

По условию теоремы $\max\{v_0,\alpha\} \ge 1$, а значит,

$$\mu_0(t) = O\left(t^{\max\{v_0,\alpha\}+\varepsilon}\right), \qquad \mu_0^{(1)}(t) = O\left(t^{\max\{v_0,\alpha\}+\varepsilon-1}\right).$$

Определим для краткости $h \overset{\mathrm{df}}{=} \max\{v_0,\alpha\}+\varepsilon$, $\mu = \ln q$ и сделаем в уравнении (1) замену переменных $t = e^s$, $W(s) = t^{-h}\mu_0(t)$. Тогда $\mu_0(t) = e^{hs}W(s)$ и

$$W(s) - \left(\frac{bq^h}{-a}\right)W(s+\mu) =$$

$$= a^{-1}\left(hW(s) + W'(s) - c\left\{he^{h\mu}W(s+\mu) + e^{h\mu}W'(s+\mu)\right\}e^{-\mu}\right)e^{-s} - a^{-1}e^{-hs}f\left(e^s\right).$$

Поскольку $W(s) = t^{-h}\mu_0(t) = e^{-hs}\mu_0\left(e^s\right) = O\ (1)$, $s \to +\infty$, то $W'(s) = -he^{-hs}\mu_0\left(e^s\right) + e^{-hs}\mu_0'\left(e^s\right)e^s = O\ (1)$, $s \to +\infty$. Пусть $l \overset{\mathrm{df}}{=} \dfrac{bq^h}{-a}$ и

$$G(s) \overset{\mathrm{df}}{=} a^{-1}\left(hW(s) + W'(s) - c\left\{he^{h\mu}W(s+\mu) + e^{h\mu}W'(s+\mu)\right\}e^{-\mu}\right)e^{-s} - a^{-1}e^{-hs}f\left(e^s\right).$$

Тогда имеем равенство

$$W(s) - lW(s+\mu) = G(s),$$

где

$$|l| = \left|\frac{bq^h}{-a}\right| = \left|\frac{bq^h}{bq^{v_0}}\right| = q^{h-v_0} = e^{(h-v_0)\mu}, \qquad |G(s)| \le M_8e^{-s} + M_9e^{(\alpha-h)s}, \quad s \ge s_0 > 0.$$

Дальнейшие рассуждения доказательства теоремы дословно повторяют результаты из [19].

Случай I: $\alpha < v_0$. Если $v_0 < \alpha + 1$, то выберем h таким, что $v_0 < h < \alpha + 1$. Тогда $|G(s)| \leq (M_8 + M_9)e^{(\alpha - h)s},\ s \geq s_0$. Определим $\gamma \overset{\mathrm{df}}{=} h - v_0,\ \beta \overset{\mathrm{df}}{=} h - \alpha$. Тогда $\gamma < \beta$. Из леммы получаем $|W(s)| \leq M_{10}e^{(v_0 - h)s},\ s \geq s_0$, т. е. $\mu_0(t) = e^{hs}W(s) = O\left(t^{v_0}\right)$.

Если $v_0 \geq \alpha + 1$, то выберем $h = v_0 + \dfrac{1}{2}$. Тогда $|G(s)| \leq (M_8 + M_9)e^{-s},\ s \geq s_0$. Определим $\gamma \overset{\mathrm{df}}{=} h - v_0,\ \beta \overset{\mathrm{df}}{=} 1$. Тогда $\gamma < \beta$. Из леммы получаем $|W(s)| \leq M_{11}e^{(v_0 - h)s}$, $s \geq s_0$, т. е. $\mu_0(t) = O\left(t^{v_0}\right)$.

Случай II: $\alpha = v_0$. Выберем $h = v_0 + \dfrac{1}{2}$. Тогда $|G(s)| \leq (M_8 + M_9)e^{(\alpha - h)s},\ s \geq s_0$. Из леммы получаем $|W(s)| \leq M_{12}se^{(v_0 - h)s},\ s \geq s_0$, т. е. $\mu_0(t) = O\left(t^{v_0}\ln t\right)$.

Случай III: $\alpha > v_0$. Выберем $h = \alpha + \dfrac{1}{2}$. Тогда $|G(s)| \leq (M_8 + M_9)e^{(\alpha - h)s},\ s \geq s_0$, и $\gamma \overset{\mathrm{df}}{=} h - v_0 > \beta \overset{\mathrm{df}}{=} h - \alpha$. Из леммы получаем $|W(s)| \leq M_{13}e^{(\alpha - h)s},\ s \geq s_0$, т. е. $\mu_0(t) = O\left(t^{\alpha}\right)$.

Теорема 2 доказана.

Примененный в данной статье метод для исследования дифференциальных уравнений с линейным отклонением аргумента через фундаментальное решение с небольшими неточностями был впервые предложен в работе [18]. К сожалению, его нельзя обобщить на системы таких уравнений без дополнительных, весьма ограничивающих, условий коммутируемости матриц.

Литература

1. *Kato T., McLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. – 1971. – **77**. – P. 891 – 937.
2. *Tosio Kato.* Asymptotic behaviour of solutions of the functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Proc. Conf. “In Delay and functional differential equations and their applications”. – New York: Acad. Press, 1972.
3. *de Bruijn N. G.* The difference-differential equation $F'(x) = e^{\alpha x + \beta}F(x-1)$. I, II // Indag. Math. (N.S.). – 1953. – **15**. – P. 449 – 464.
4. *Frederickson P. O.* Series solutions for certain functional-differential equations // Lect. Notes Math. – 1971. – **243**. – P. 249 – 254.
5. *Carr J., Dyson J.* The functional differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. – 1976. – **74**. – P. 165 – 174.
6. *Mahler K.* On a special functional equation // J. Lond. Math. Soc. (2). – 1940. – **15**. – P. 115 – 123.
7. *de Bruijn N. G.* The asymptotically periodic behavior of the solutions of some linear functional equations // Amer. J. Math. – 1949. – **71**, № 2. – P. 313 – 330.
8. *de Bruijn N. G.* On some linear functional equations // Publ. Math. Debrecen. – 1950. – **1**. – P. 129 – 134.
9. *Liu Y.* Asymptotic behaviour of functional-differential equations with proportional time delays // European J. Appl. Math. – 1996. – **7**, № 1. – P. 11 – 30.
10. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений некоторых дифференциально-функциональных уравнений // Нелін. коливання. – 2016. – **19**, № 3. – С. 311 – 348.
11. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений линейного дифференциально-функционального уравнения нейтрального типа с постоянными коэффициентами и линейно преобразованным аргументом // Нелін. коливання. – 2012. – **15**, № 4. – С. 466 – 493.
12. *Spiridonov V.* Universal superpositions of coherent states and self-similar potentials // Phys. Rev. A. – 1995. – **52**. – P. 1909 – 1935.
13. *Романенко Е. Ю.* Асимптотика решений одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 11. – С. 1526 – 1532.

14. *Романенко Е. Ю., Фещенко Т. С.* Об асимптотическом поведении решений дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа в окрестности критической точки // Исследование диф. и диф.-разност. уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 107 – 121.

15. *Романенко Е. Ю., Фещенко Т. С.* Оценка роста в окрестности критической точки решений одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Динам. системы и дифференц. уравнения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 69 – 74.

16. *Романенко Е. Ю.* Представление локального общего решения одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 206 – 210.

17. *Романенко Е. Ю., Шарковский А. Н.* Асимптотика решений линейных дифференциально-функциональных уравнений // Асимптот. поведение решений дифференц.-функцион. уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. – С. 5 – 39.

18. *Lehninger H., Liu Y.* The functional-differential equation $y'(t) = Ay(t) + By(qt) + Cy'(qt) + f(t)$ // European J. Appl. Math. – 1998. – **9**. – P. 81 – 91.

19. *Eng-Bin Lim.* Asymptotic bounds of solutions of the functional differential equation // SIAM J. Math. Anal. – 1978. – **9**, № 5. – P. 915 – 920.

20. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Асимптотические границы решений дифференциально-функционального уравнения с линейно преобразованным аргументом // Нелін. коливання. – 2017. – **20**, № 4. – С. 458 – 464.

21. *Iserles A.* On the generalized pantograph functional-differential equation // European J. Appl. Math. – 1993. – **4**. – P. 1 – 38.

Получено 14.03.19