УДК 531.21:211:211.3:22:221.1

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАВНОВЕСИЯ МАШИНЫ-АМФИБИИ (реализация принципа инвариантности)

Е.П. Задеев.
Кременчугский университет экономики, информационных технологий и управления.

There is developed the mathematical model (MM) of the transition to a new equilibrium position of the swimming car, which is partly rest upon the suspension when the cargo is taking off (unload). MM describes the system attributes, included rigid body, vertical spring linkage, hydrostatic forces. MM have no resistance for rigidity of linkages $(0 \le c_i \le \infty)$. *For the first time there is the centroid analytically defined in space to the vertical response of the spring linkages. This made it possible to embody all vectors in physical variants (polar), and moments can be moments of couple (axial vectors). The equilibrium equations are invariant. Independent from the choice of the reference system linear displacement of the arbitrary point under the vertical force is defined linear displacement of the shear center (SC) and the angular movement of the rigid body relative to the horizontal axis through the (SC). For the first time there is developed analytical equation define dip of the rigid body of the reference system with the arbitrary direction to the horizontal axis. These results show us the need of analyze about of the static and the dynamics of simple mechanical system. The system possesses the set of properties of the rigid body and of the potential field.*

Keywords: *equilibrium of amphibian, equalization of equilibrium, solid, potential field, point of application of resultant in space.*

История вопроса. В 80-е гг. прошлого столетия в СССР интенсивно велись работы по созданию паромно-мостовых машин (ПММ) большой единичной грузоподъёмности. Цель создания: обеспечить форсирование водных преград танковыми подразделениями. Направление работ: поиск возможностей переправы среднего танка на пароме из одной ПММ с минимальным временем подготовки к работе, а также использование ПММ как модулей сборного наплавного моста-ленты [1]. Отличительной особенностью создаваемых ПММ было использование жестких дополнительных понтонов с механизмами раскрытия, что значительно сокращало время подготовки к работе. Паром развертывался еще при входе в воду или на плаву. Высокая проходимость гусеничных ПММ создавала предпосылки преодоления мелководья в амфибийном режиме с опиранием и на ходовую часть. Для оценки безопасности движения на мелководье потребовалась математическая модель (ММ) статического равновесия амфибийного транспортного средства (ТС) на мелководье, основным аспектам разработки, которой посвящена данная статья.

1. Анализ ранее выполненных работ. Постановка задачи исследования

Известен ряд аналогов ММ равновесия плавающего тела с дополнительными упругими опорами. В теории корабля применяется ММ равновесия корабля на камне [2], описывающая равновесие корабля с опиранием на дополнительную абсолютно жесткую опору. В теории амфибийных ТС известны ММ статического равновесия гусеничной ПМ при входе в воду по незаливаемости (непотопляемости) [3], ММ выхода многозвенной ПМ из воды [4], которые позволяют поэтапно графоаналитически определить состояния равновесия ПМ на заданном профиле дна. Равновесие транспортной машины на суше, как правило, представлено частными ММ, привязанными к конкретным конструкциям системы подрессоривания (подвески) и продольной симметрией [5; 6]. Автором на основе обобщенного описания потенциальных свойств жидкости и упругих опор разработана ММ равновесия ПМ на мелководье [7], описывающая равновесие полупогруженного в жидкость твердого тела на упругих опорах. Предложено выделение в механике элементарной упругой системы, включающей твёрдое тело и пространственную систему упругих связей. ПМ рассматривается как частный случай – элементарная упругая система с вертикальными связями. Созданная ММ позволила аналитически описать свойства совокупности параллельных упругих связей как элемента сложной системы. Впервые равнодействующая реакции вертикальных (параллельных) упругих связей определена как физический вектор (величиной, направлением и координатами точки приложения к ПМ). Точка приложения равнодействующей упругих связей названа по физическому смыслу – центром жесткости параллельных упругих связей. В теории транспортных машин [6], теории колебаний твердых тел [8; 9; 10] проекции равнодействующей реакции параллельных упругих связей до настоящего времени определены скользящими векторами (осями жесткости), что для систем с упругими связями некорректно. При построении ММ выполнен переход к центральной системе координат жесткостей упругих связей. Как и переход к системе центра масс (ЦМ) твердого тела в задачах динамики [11], он преследует цель поиска удачной системы координат и является проявлением свободной воли исследователя [12]. В работе

[7] предложен алгоритм решения связанных уравнений наклонения методом последовательных приближений [7]. Применение метода последовательных приближений для данного случая не имеет строгого обоснования.

Постановка задачи исследования. В соответствии с принципом относительности Галилея все описания механических взаимодействий замкнутой системы (равнодействующая F = 0) равноценны по содержанию. Следовательно, должно существовать и одно-единственное, или собственное, описание равновесия системы, которое присутствует во всех описаниях как статического, так и динамического равновесия. Аналогия такого утверждения единственности присутствует в квантовой механике. Состояние произвольной частицы в статистическом ансамбле квантовой механики описывается смесью описаний состояний крайних точек с чистыми состояниями, которые нельзя представить в виде смеси других состояний [13]. Исходя из данного определения, описание динамической системы в нормальных координатах [9] не представляет чистое (собственное) описание. Работа [7] не представляет такого описания. Она представляет первый шаг исследований на новом уровне свойств элементарной механической системы, объединяющей твердое тело, параллельные (вертикальные) упругие и диссипативные связи. Такая система является основой моделей сухопутных и плавающих ТС [2; 6].

Галилеев принцип относительности выполним, если механическая система в произвольный момент времени замкнута (равновесна) [11], т.е. описание внутренне самодостаточно. Следовательно, выражаясь современной терминологией, описание равновесной системы должно включать описание сил полярными векторами и описание моментов аксиальными векторами [11]. Первые, включающие внешние силы, реакции связей, пропорциональные линейным перемещениям, вторые – моменты (пары сил), образованные действующими внешними силами и реакциями связей, а также реактивный момент упругих связей, пропорциональный наклонению. Реактивный момент обеспечивает совмещение линий действия равнодействующих внешних сил и реакций связей. Построение такого описания является задачей исследования.

Предметом исследования является процесс перехода в новое положение равновесия под действием вертикальной силы механической системы, включающей твёрдое тело и вертикальные упругие опоры.

Объектом исследования являются физическая модель ПМ в процессе изменения положения равновесия при снятии (приёме) груза на мелководье.

2. Разработка ММ перехода ПМ в новое положение равновесия

2.1 Установление однородности описания реакции на перемещение упругой связи и гидростатической силы

Физическая модель ПМ на мелководье представлена полупогруженным в воду твёрдым телом, поддерживаемым в равновесии гидростатическими силами воды и реакциями вертикальных упругих опор, имитирующих систему подрессоривания (подвеску). Упругие опоры всегда вертикальны, результирующая гидростатическая сила также вертикальна. Аббревиатурой «ПМ» обозначим «физическую модель ПМ». Твёрдое тело (корпус ПМ) обладает геометрическими размерами (объёмом), массой, силой плавучести [2], которую рассматривают как упругую силу воды [9]. Изменение реакции единичной упругой опоры и гидростатической силы, действующей на вертикальный элементарный цилиндр, в зависимости от вертикального перемещения представляют приращение реакции потенциального поля [11; 14]:

$$R_i = -c_i \cdot f_i \qquad \delta D = -\gamma \cdot \delta F \cdot f \tag{1}$$

где R_i, c_i, f_i – реакция, жёсткость, перемещение точки закрепления *i*-той упругой опоры; $\delta D, \gamma, \delta F, f$ – гидростатическая сила, удельный вес воды, площадь основания элементарного вертикального цилиндра, *f* – высота элементарного цилиндра.

Жёсткость упругой опоры $c = \frac{\Delta P}{\Delta f}\left[\frac{\text{Н}}{\text{м}}\right]$. Произведение $\gamma \cdot \delta F \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^3} \cdot \text{м}^2 = \frac{\text{Н}}{\text{м}}\right]$ имеет размерность жесткости и может представлять жёсткость элементарной гидростатической опоры площадью *δF*. Жесткости упругой опоры и гидростатической опоры представляют градиенты [15] параллельного потенциального поля. Сила потенциального поля противоположна по знаку градиенту. В зависимости от направления перемещения реакция может быть положительной или отрицательной. Представленные описания позволяют использовать их совместно в математических выражениях.

2.2. Выбор систем координат

Из практики, теории корабля [2], теории гусеничных машин [6] известно, что под действием вертикальной силы ПМ переместится по направлению действия силы и наклонится вокруг оси, перпендикулярной линии действия силы. Анализ взаимодействий показывает, что условия равновесия ПМ можно рассматривать в вертикальной плоскости перпендикулярной оси наклонения, исключив на начальных стадиях исследования сложности, возникающие при использовании системы связанных пространственных координат Эйлера-Крылова [14], сосредоточив внимание на анализе физических процессов. Основанием (телом отсчета), участвующем в обеспечении равновесия исследуемой механической системы, является Земля, обладающая в данной области однородным полем тяготения

[11]. С Землей связана инерциальная система отсчета $O_2X_2Y_2Z_2$.

Исследуемая механическая система снабжена вспомогательной системой отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$, в которой заданы неизменяемые геометрические характеристики системы. В начальный момент инерциальная и вспомогательная системы отсчета совпадают. В исследовании используется правая система координат (рис. 1) [8; 9]. Ось OZ направлена вверх, ось OX – вперёд, ось OY – влево. Система координат с осью OZ, направленной вверх, и реакцией упругой связи, направленной противоположно градиенту параллельного потенциального поля, позволяет исследовать задачу в привычной формулировке, в отличие от работ [2; 18], использующих противоположное направление оси OZ.

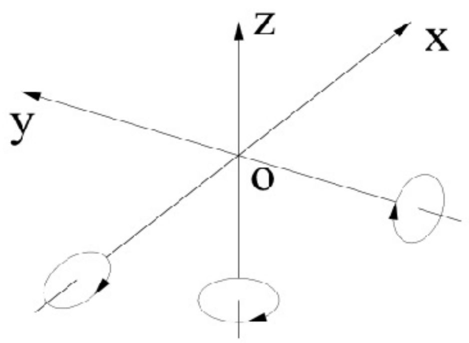


Рис. 1. Правая система координат

Принимаем ось наклонения горизонтальной, направление которой для плавающего тела определяется пересечением начальной и действительной ватерлиний [2]. Положительные направления угловых перемещений, активных и реактивных моментов, их сопровождающих, определяются правилом буравчика ввинчивание буравчика в положительном направлении оси координат выполняется вращением по часовой стрелке). В дальнейшем, при необходимости, можем использовать другие, удобные для нас пары связанных систем координат.

2.3. Условия равновесия механической системы под действием вертикальных сил

В статике рассматриваются замкнутые равновесные системы [11]. Состояние равновесия системы под воздействием только вертикальных сил ($X_i = 0;\ Y_i = 0;\ Z_i \neq 0;\ m_x \neq 0;\ m_y \neq 0;\ m_z = 0$) в правой абсолютной системе координат описывается следующими уравнениями [14]:

$$Z = \sum Z_i;\quad m_x = \sum y_i \cdot Z_i = 0;\quad m_y = \sum -x_i \cdot Z_i = 0, \tag{2}$$

где Z – проекция результирующей силы, действующей на механическую систему; Z_i – проекции активных и реактивных сил, действующих на механическую систему; x_i, y_i – координаты точек приложения сил к твердому телу; m_x, m_y – моменты сил относительно осей координат.

2.4. Обобщенная форма описания уравнений равновесия ПМ на мелководье до и после снятия груза P

Пусть в начальный момент времени ПМ находится в равновесии без крена и дифферента при известных весовых характеристиках ПМ, осадке корпуса и реакциях упругих опор. Уравнения равновесия ПМ в системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$ до снятия груза (с учётом направления действия известных сил веса G_0 и реакции основания D_0) имеют, в соответствии с (2), следующий вид:

$$Z_2 = D_0 - G_0 = 0;\quad M_{x_2} = D_0 \cdot y_{2d} - G_0 \cdot y_{2g} = 0;\quad M_{y_2} = -D_0 \cdot x_{2d} + G_0 \cdot x_{2g} = 0, \tag{3}$$

где $D_0(x_{2d} = x_{1d}, y_{2d} = y_{1d}, z_{2d} = z_{1d})$ – равнодействующая реакций всех типов упругих связей и её координаты в системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$ и $O_1X_1Y_1Z_1$; $G_0(x_{2g} = x_{1g}, y_{2g} = y_{1g}, z_{2d} = z_{1d})$ – вес ПМ, координаты ЦМ в системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$ и $O_1X_1Y_1Z_1$.

При равенстве сил веса и реакции связей плечи моментов сил и реакций связей равны, уравнения равновесия (3) не зависят от систем координат и являются инвариантами по условию.

Упростим анализ, рассматривая плоскую форму перемещения ПМ в новое положение равновесия. Линейные и угловые перемещения рассматриваются в координатной плоскости $Y_2O_2Z_2$, а угловые – относительно оси O_2X_2, перпендикулярной плоскости чертежа (рис. 2). Выбор начала системы координат определяется только возможной простотой и наглядностью описания процесса перехода системы в новое положение равновесия.

После снятия груза P измение положения ПМ в пространстве представим линейным перемещением Δz точки O_1 начала произвольно выбранной системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ и угловым перемещением (наклонением) φ относительно оси O_2X_2. Неизвестными являются точка, однозначно определяющая линейное перемещение твердого тела, и направление горизонтальной оси поворота (наклонения [2]) ПМ. Косвенно существование такой точки обосновывается постоянством суммы линейных перемещений различных точек твердого тела [14].

Замечание: Направления действия приращения реактивных сил (их знак) автоматически определяются знаком относительного перемещения. Следовательно, при составлении уравнений вертикальных сил и моментов относительно осей O_2X_2 и O_2Y_2 обобщенная форма представления реакций ΔD, моментов реакций ΔM_{x_2}, ΔM_{y_2} не содержит внешне информации о их направленности действия и сопровождается знаком в соответствии со структурой уравнения равновесия (2) в правой системе координат [14].

Уравнения равновесия ПМ после снятия груза в абсолютной системе $O_2X_2Y_2Z_2$ первоначально запишем в следующем виде:

$$\begin{gathered} Z_2 = D_0 + \Delta D - G_0 + P = 0; \\ M_{x_2} = D_0 \cdot y_{2d} + \Delta M_{x_2} - G_0 \cdot y_{2g} + P \cdot y_{2p} = 0; \\ M_{y_2} = -D_0 \cdot x_{1d} - \Delta M_{y_2} + G_0 \cdot x_{1g} - P \cdot x_{1p} = 0; \end{gathered} \tag{4}$$

где $D_0(x_{2d} = x_{1d}, y_{2d} = y_{1d} \cdot cos\varphi - z_{1d} \cdot sin\varphi)$ – равнодействующая реакций связей до снятия груза P и её координаты; $G_0(x_{2g} = x_{1g}, y_{2g} = y_{1g} \cdot cos\varphi - z_{1g} \cdot sin\varphi)$ – вес ПМ до снятия груза и его координаты; $P(x_{2p} = x_{1p}, y_{2p} = y_{1p} \cdot cos(\varphi) - z_{1p} \cdot sin(\varphi))$ – снятый груз P и его координаты в системах $O_2X_2Y_2Z_2$; $\Delta D, \Delta M_{x_2}, \Delta M_{y_2}$ – приращение реакции связей и моментов реакции связей в абсолютной системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$; φ – угол наклонения относительно оси O_2X_2 (положительное направление в правой системе координат в соответствии с правилом буравчика – по часовой стрелке от положительного направления оси O_2Y_2).

Исключим из (4) равновесные уравнения (3), заменим D_0 на $-G_0$ в уравнениях моментов. Уравнения равновесия ПМ после снятия груза P будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered} \Delta D + P = 0; \\ \Delta M_{x_2} + G_0 \cdot (z_{1g} - z_{1d}) \cdot sin\,\varphi + P \cdot (y_{1p} \cdot cos\,\varphi - z_{1p} \cdot sin\,\varphi) = 0; \\ -\Delta M_{y_2} - P \cdot x_{1p} = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

В уравнениях (5) приращения реакций и приращения моментов реакций гидростатических сил и упругих опор представлены в общем виде. Составим детальное описание приращения реакций и приращения моментов реакций в соответствии с расчетной схемой (рис. 2). На схеме представлено исходное равновесное состояние модели ПМ и новое положение равновесия после снятия груза. Осью наклонения является ось O_2X_2. Для облегчения контроля рассматриваем действие положительной силы P в первом квадранте системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$. Сила P вызовет положительное перемещение ПМ (начала координат $O_1X_1Y_1Z_1$) вверх, положительное наклонение относительно оси O_2X_2 по часовой стрелке.

2.5. Построение аналитического описания приращений реакций вертикальных связей

Приращение реакций будет определяться величиной и направлением перемещения корпуса ПМ в абсолютной системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$ (рис. 2) относительно исходного, зафиксированного в начале совмещением со вспомогательной системой координат $O_1X_1Y_1Z_1$.

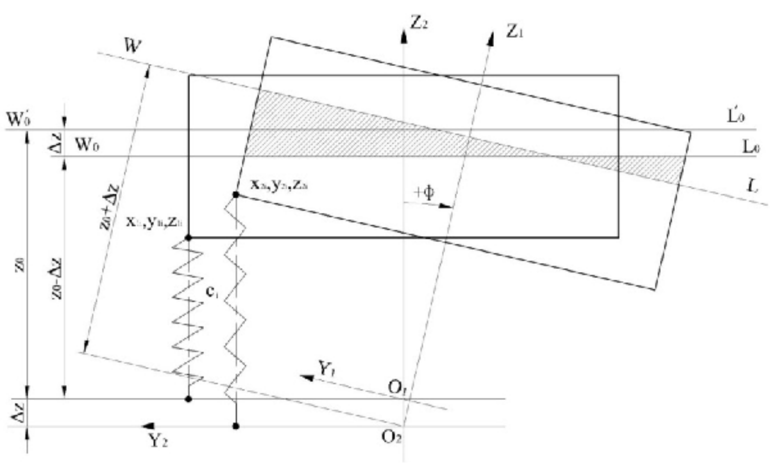


Рис. 2. Схема вертикальных перемещений ПМ, определяющих изменение реакции воды и упругих элементов подвески на мелководье

Приращение реакции гидростатических сил и упругих связей определяется изменением объёма воды между начальной ватерлинией WL и действующей ватерлинией W_0L_0 [2] и изменением высоты точки шарнирного соединения упругой опоры с корпусом после снятия груза P.

Приращение реакции гидростатических сил в абсолютной системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$ определяется алгебраической суммой веса воды, заключенной в объёме между начальной WL и действующей W_0L_0 ватерлиниями (рис. 2). Приращение реакции воды определяется выражением:

$$\Delta D^{\gamma} = -\gamma \int_F \int_{z_1}^{z_2} dz \cdot dF = -S^{\gamma}_{x_1 o_1 y_1}(1-\cos\varphi) + \Delta z \cdot F^{\gamma}_z \cdot \cos\varphi + S^{\gamma}_{x_1 o_1 z_1} \cdot \sin\varphi, \quad (6)$$

где ΔD^{γ} – приращение реакции гидростатических сил; γ – удельный вес воды; dF – площадь основания элементарного вертикального цилиндра, заключенного между начальной и действующей ватерлиниями; Δz – линейное перемещение начала координат O_1; $z_1 = z_0$ – нижний предел интегрирования; $z_2 = (z_0 + \Delta z) \cdot \cos\varphi + y_1 \cdot \sin\varphi$ – верхний предел интегрирования; φ – угол наклонения ПМ относительно оси O_2X_2; z_0 – аппликата начальной ватерлинии; y_1 – текущая ордината начальной ватерлинии; $F^{\gamma}_z = -\gamma \cdot \int_F dF = -\gamma \cdot F_{WL}$ – момент жесткости нулевого порядка (вертикальная жесткость) гидростатических сил; $F_{WL} = \int_F dF$ – площадь начальной ватерлинии WL; $S^{\gamma}_{x_1 o_1 y_1} = -\gamma \cdot \int_F z_0 \cdot dF = -\gamma \cdot z^{\gamma}_{1f} \cdot F_{WL}$ – статический момент «жесткости» (момент жесткостей первого порядка) гидростатических сил относительно координатной плоскости $X_1O_1Y_1$; $S^{\gamma}_{x_1 o_1 z_1} = -\gamma \cdot \int_F y_1 \cdot dF = -\gamma \cdot y^{\gamma}_{1f} \cdot F_{WL}$ – статический момент «жесткости» (момент жесткостей первого порядка) гидростатических сил относительно вертикальной координатной плоскости $X_1O_1Z_1$; y^{γ}_{1f}, $z^{\gamma}_{1f} = z_0$ – ордината и аппликата центра жёсткости гидростатических сил (центра тяжести площади начальной ватерлинии [2]).

Приращение реакции дискретных упругих опор в абсолютной системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$ определяется величиной вертикального перемещения точек закрепления при вертикальном перемещении начала O_1 вспомогательной системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ и вращении вспомогательной системы координат вокруг оси O_2X_2:

$$\Delta D^{r} = \sum_{i=1}^{n} -c_i \cdot f_i = -S^{r}_{x_1 o_1 y_1}(1-\cos\varphi) + \Delta z \cdot F^{r}_z \cdot \cos\varphi + S^{r}_{x_1 o_1 z_1} \cdot \sin\varphi, \quad (7)$$

где ΔD^{r} – приращение реакций упругих опор; c_i – жесткость i-той упругой опоры; $f_i = z_{2i} - z_{1i}$ – вертикальное перемещение точки закрепления (деформация) i-той упругой опоры; z_{1i} – начальная высота точки присоединения опоры к твердому телу; $z_{2i} = (z_{1i} + \Delta z) \cdot \cos\varphi + y_{1i} \cdot \sin\varphi$ – высота точки присоединения i-той опоры после приложения силы P; y_{1i}, z_{1i} – ордината и аппликата i-той точки присоединения упругой опоры к твердому телу; Δz – линейное перемещение начала координат O_1; $F^{r}_z = -\sum_{i=1}^{n} c_i$ – вертикальная жесткость упругих связей (момент жесткостей нулевого порядка); $S^{r}_{x_1 o_1 y_1} = -\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot z_{1i} = z^{r}_{1f} \cdot F^{r}_z$ – статический момент жесткости упругих связей (момент жесткостей первого порядка) относительно координатной плоскости $X_1O_1Y_1$; $S^{r}_{x_1 o_1 z_1} = -\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot y_{1i} = y^{r}_{1f} \cdot F^{r}_z$ – статический момент жесткостей упругих связей (момент жесткостей первого порядка) относительно координатной плоскости $X_1O_1Z_1$; y^{r}_{1f}, z^{r}_{1f} – ордината и аппликата центра жесткости упругих связей.

Совместная реакция гидростатических сил и дискретных упругих опор описывается выражением:

$$\Delta D = -S_{x_1 o_1 y_1} \cdot (1-\cos\varphi) + \Delta z \cdot F_z \cdot \cos\varphi + S_{x_1 o_1 z_1} \cdot \sin\varphi, \quad (8)$$

где ΔD, F_z, $S_{x_1 o_1 z_1}$, $S_{x_1 o_1 y_1}$– приращение реакции основания и обобщенные физические характеристики гидростатических сил и упругих связей.

Замечания: Во всех описаниях физических свойств параллельного потенциального поля элементарной механической системы (моментах нулевого порядка F_z, первого порядка $S_{x_1 o_1 y_1}$, $S_{x_1 o_1 z_1}$, $S_{y_1 o_1 z_1}$, второго порядка $I_{x_1 o_1 y_1}$, $I_{x_1 o_1 z_1}$, $I_{y_1 o_1 z_1}$, $I_{y_1 z_1}$, $I_{x_1 y_1}$) учтено знаком «-« направление сил, противоположное направлению градиента поля.

2.6. Построение аналитического описания приращений моментов реакций вертикальных связей

2.6.1. Построение математического описания приращений моментов реакций связей относительно оси O_2X_2

Приращение момента реакции гидростатических сил относительно оси O_2X_2**.** Приращение момента реакции гидростатических сил в абсолютной системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$ определяется суммарным моментом веса воды, перемещаемой в объёме заключенном между начальной WL и действующей W_0L_0 ватерлиниями (рис. 2). Приращение момента реакции воды определяется выражением:

$$\Delta M^{\gamma}_{x_2} = -\gamma \cdot \int_F \int_{z_1}^{z_2} y_2 \cdot dz \cdot dF = -I^{\gamma}_{y_1 z_1} \cdot (1 - \cos\varphi + \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi) + \frac{1}{2} \cdot I^{\gamma}_{x_1 o_1 y_1} \cdot \sin^3\varphi + I^{\gamma}_{x_1 o_1 z_1} \cdot \left(\sin\varphi - \frac{1}{2} \cdot \sin^3\varphi\right) + \Delta z \cdot S^{\gamma}_{x_1 o_1 z_1} \cdot \cos\varphi - \frac{1}{2}\Delta z^2 \cdot F^{\gamma}_z \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi - \Delta z \cdot S^{\gamma}_{x_1 o_1 y_1} \cdot \sin\varphi \cdot \cos^2\varphi \quad (9)$$

где γ – удельный вес воды; $z_1 = z_0$ – нижний предел интегрирования (действующая ватерлиния W_0L_0 в системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$); $z_2 = (z_0 + \Delta z) \cdot \cos\varphi + y_1 \cdot \sin\varphi$ – верхний предел интегрирования, исходная ватерлиния WL после наклонения на угол $+\varphi$ в системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$; Δz – вертикальное перемещение O_1 (начала системы отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$) в системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$; $y_2 = y_1 \cdot \cos\varphi - (z + \Delta z)\sin\varphi$ – ордината центра элементарного объёма (плечо момента гидростатической силы, создаваемой погруженным элементарным объёмом); $I^{\gamma}_{y_1 z_1} = -\gamma \cdot \int_F y_1 \cdot z_0 \cdot dF$ – центробежный момент (момент второго порядка) жесткостей начальной ватерлинии WL; $I^{\gamma}_{x_1 O_1 y_1} = -\gamma \cdot \int_F z_0^2 \cdot dF$ - момент второго порядка жёсткостей начальной ватерлинии относительно координатной плоскости $X_1 O_1 Y_1$; $I^{\gamma}_{x_1 O_1 z_1} = -\gamma \cdot \int_F y^2 \cdot dF$ – момент второго порядка жесткостей площади ватерлинии относительно координатной плоскости $X_1 O_1 Z_1$.

Приращение момента реакции упругих опор относительно оси $\boldsymbol{O_2 X_2}$ в абсолютной системе координат $O_2 X_2 Y_2 Z_2$ (рис. 2) определяется изменением моментов реакции вертикальных упругих опор вследствие перемещения начала системы координат O_1 и поворота точек закрепления упругих опор вокруг оси $O_2 X_2$ на угол φ. Приращение момента реакции упругих опор определяется выражением:

$$\Delta M^{r}_{x_2} = -\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot f_i \cdot y_{i2} = -I^{r}_{y_1 z_1} \cdot [\cos\varphi \cdot (1-\cos\varphi) + (\sin\varphi)^2] + I^{r}_{x_1 O_1 y_1} \cdot \sin\varphi \cdot (1-\cos\varphi) + \Delta z \cdot S^{r}_{x_1 O_1 y_1} \cdot [\sin\varphi \cdot (1-\cos\varphi) - \sin\varphi \cdot \cos\varphi] + \Delta z \cdot S^{r}_{x_1 O_1 z_1} \cdot [(\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2] - \Delta z^2 \cdot F^{r}_z \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + I^{r}_{x_1 O_1 z_1} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \tag{10}$$

где: c_i – жесткость *i*-той упругой опоры; $f_i = z_{2i} - z_{1i}$ – перемещение точки закрепления (деформация) *i*-той упругой опоры; z_{1i} – начальная высота точки присоединения опоры к твердому телу; $z_{2i} = (z_{1i} + \Delta z) \cdot \cos\varphi + y_{1i} \cdot \sin\varphi$ – высота точки присоединения *i*-той опоры после приложения силы P; $y_{2i} = y_{1i} \cdot \cos\varphi - (z_{1i} + \Delta z) \sin\varphi$ – ордината *i*-той точки присоединения упругой опоры к твердому телу в абсолютной системе координат $O_2 X_2 Y_2 Z_2$; y_{1i}, z_{1i} – ордината и аппликата *i*-той точки присоединения упругой опоры к твердому телу во вспомогательной системе координат $O_1 X_1 Y_1 Z_1$; Δz – вертикальное перемещение начала координат O_1; $F^{r}_z = -\sum_{i=1}^{n} c_i$ – суммарная жесткость (момент жесткостей нулевого порядка) упругих опор; $S^{r}_{x_1 O_1 y_1} = -\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot z_{1i}$ – момент жесткостей первого порядка упругих опор относительно координатной плоскости $X_1 O_1 Y_1$; $S^{r}_{x_1 O_1 z_1} = -\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot y_{1i}$ – момент жесткостей первого порядка упругих опор относительно координатной плоскости $X_1 O_1 Z_1$; $I^{r}_{y_1 z_1} = -\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot y_{1i} \cdot z_{1i}$ – момент жесткостей второго порядка относительно координатных плоскостей $X_1 O_1 Z_1$ и $X_1 O_1 Y_1$ (центробежный момент жесткостей); $I^{r}_{x_1 O_1 y_1} = -\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot z_{1i}^2$ – момент жесткостей второго порядка относительно координатной плоскости $X_1 O_1 Y_1$; $I^{r}_{x_1 O_1 z_1} = -\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot y_{1i}^2$ – момент жесткостей второго порядка относительно координатной плоскости $X_1 O_1 Z_1$.

Объединим аналоги в описаниях приращения моментов гидростатических сил (9) и реакций упругих опор (10), исключив несущественные, с нашей точки зрения, отдельные элементы описаний:

$$-I^{\gamma}_{y_1 z_1} \cdot [(1-\cos\varphi) + (\sin\varphi)^2 \cdot \cos\varphi] - I^{r}_{y_1 z_1} \cdot [\cos\varphi \cdot (1-\cos\varphi) + (\sin\varphi)^2] \cong -I_{y_1 z_1} \cdot [(1-\cos\varphi) + (\sin\varphi)^2] \cdot \cos\varphi;$$

$$\Delta z \cdot S^{\gamma}_{x_1 O_1 z_1} \cdot \cos\varphi + \Delta z \cdot S^{r}_{x_1 O_1 z_1} \cdot [(\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2] \cong \Delta z \cdot S_{x_1 O_1 z_1} \cdot \cos\varphi;$$

$$I^{\gamma}_{x_1 O_1 z_1} \cdot \left(\sin\varphi - \frac{1}{2} \cdot \sin^3\varphi\right) + I^{r}_{x_1 O_1 z_1} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cong I_{x_1 O_1 z_1} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi;$$

$$\frac{1}{2} \cdot I^{\gamma}_{x_1 O_1 y_1} \cdot (\sin\varphi)^3 + I^{r}_{x_1 O_1 y_1} \cdot \sin\varphi \cdot (1-\cos\varphi) \cong I_{x_1 O_1 y_1} \cdot \sin\varphi \cdot (1-\cos\varphi);$$

$$-\Delta z \cdot S^{\gamma}_{x_1 O_1 y_1} \cdot \sin\varphi \cdot \cos^2\varphi + \Delta z \cdot S^{r}_{x_1 O_1 y_1} \cdot [\sin\varphi \cdot (1-\cos\varphi) - \sin\varphi \cdot \cos\varphi] \cong -\Delta z \cdot S_{x_1 O_1 y_1} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi;$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \Delta z^2 \cdot F^{\gamma}_z \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi - \Delta z^2 \cdot F^{r}_z \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cong -\Delta z^2 \cdot F_z \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi.$$

Обобщённое описание приращения момента реакций гидростатических сил и упругих опор относительно оси $O_2 X_2$:

$$\Delta M_{x_2} = \Delta M^{\gamma}_{x_2} + \Delta M^{r}_{x_2} = -I_{y_1 z_1} \cdot [(1-\cos\varphi) + (\sin\varphi)^2] \cdot \cos\varphi + \Delta z \cdot S_{x_1 O_1 z_1} \cdot \cos\varphi + I_{x_1 O_1 z_1} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + I_{x_1 O_1 y_1} \cdot \sin\varphi \cdot (1-\cos\varphi) - \Delta z \cdot S_{x_1 O_1 y_1} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi - \Delta z^2 \cdot F_z \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi, \tag{11}$$

где: $F_z = F^{\gamma}_z + F^{r}_z$, $S_{x_1 O_1 y_1} = S^{\gamma}_{x_1 O_1 y_1} + S^{r}_{x_1 O_1 y_1}$, $S_{x_1 O_1 z_1} = S^{\gamma}_{x_1 O_1 z_1} + S^{r}_{x_1 O_1 z_1}$, $I_{y_1 z_1} = I^{\gamma}_{y_1 z_1} + I^{r}_{y_1 z_1}$, , $I_{x_1 O_1 z_1} = I^{\gamma}_{x_1 O_1 z_1} + I^{r}_{x_1 O_1 z_1}$, $I_{x_1 O_1 y_1} = I^{\gamma}_{x_1 O_1 y_1} + I^{r}_{x_1 O_1 y_1}$ – системные моменты нулевого, первого, второго порядка; Δz – вертикальное перемещение начала системы координат O_1, φ – угол наклонения относительно оси $O_2 X_2$.

2.6.2. Построение аналитического описания приращений моментов реакций связей относительно оси $O_2 Y_2$

Приращение момента гидростатических сил относительно оси $O_2 Y_2$ определяется изменением момента гидростатических сил вследствие вертикального перемещения и наклонения ПМ относительно оси O_2X_2:

$$\Delta M^{\gamma}_{y_2} = -\gamma \int_F \int_{z_1}^{z_2} x_2 \cdot dz \cdot dF = -I^{\gamma}_{x_1 z_1} \cdot (1-\cos\varphi) + \Delta z \cdot S^{\gamma}_{y_1 o_1 z_1} \cdot \cos\varphi + \mathrm{I}^{\gamma}_{x_1 y_1} \cdot \sin\varphi \quad (12)$$

где γ – удельный вес воды; $x_2 = x_1$ – текущая абсцисса элементарного объёма в системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$ и $O_1X_1Y_1Z_1$; y_1 – текущая ордината элементарного объёма в системе координат $O_1X_1Y_1Z_1$; $z_1 = z_0$ – нижний предел интегрирования (действующая ватерлиния W_0L_0 в системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$); $z_2 = (z_0 + \Delta z) \cdot \cos\varphi + y_1 \cdot \sin\varphi$ – верхний предел интегрирования, исходная ватерлиния WL после наклонения на угол $+\varphi$ в системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$; Δz – вертикальное перемещение начала системы отсчета ПМ $O_1X_1Y_1Z_1$ после снятия груза в системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$; $I^{\gamma}_{y_1 z_1} = -\gamma \cdot \int_F y_1 \cdot z_0 \cdot dF$ – центробежный момент жесткостей начальной ватерлинии WL относительно координатных плоскостей $X_1O_1Z_1$ и $X_1O_1Y_1$; $I^{\gamma}_{x_1 o_1 y_1} = -\gamma \cdot \int_F z_0^2 \cdot dFF_{WL}$ – момент второго порядка жёсткости начальной ватерлинии относительно координатной плоскости $X_1O_1Y_1$; $I^{\gamma}_{x_1 o_1 z_1} = -\gamma \cdot \int_F y^2 \cdot dF$ – момент второго порядка площади ватерлинии относительно координатной плоскости $X_1O_1Z_1$.

Приращение момента дискретных опор относительно оси O_2Y_2 при вертикальном перемещении и наклонении относительно ортогональной оси O_2X_2 определяется выражением:

$$\Delta M^{r}_{y_2} = -\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_{i1} \cdot f_i = -I^{r}_{x_1 z_1} \cdot (1-\cos\varphi) + \Delta z \cdot S^{r}_{y_1 o_1 z_1} \cdot \cos\varphi + \mathrm{I}^{r}_{x_1 y_1} \cdot \sin\varphi, \quad (13)$$

где $c_i, x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}$ – жесткость, координаты точки присоединения *i*-той упругой опоры к твёрдому телу в системе координат $O_1X_1Y_1Z_1$; $x_{2i} = x_{1i}$, $z_{2i} = (z_{1i} + \Delta z) \cdot \cos\varphi + y_{1i} \cdot \sin\varphi$ – координаты точки соединения *i*-той упругой опоры к твердому телу после снятия груза в абсолютной системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$; $f_i = z_{2i} - z_{1i} = -z_{1i} \cdot (1-\cos\varphi) + \Delta z \cdot \cos\varphi + y_{1i} \cdot \sin\varphi$ – вертикальное перемещение (деформация) *i*-той упругой опоры после снятия груза в абсолютной системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$; Δz – вертикальное перемещение начала системы координат O_1 в абсолютной системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$; φ – угол наклонения относительно оси O_2X_2, $S^{r}_{y_1 o_1 z_1} = -\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_{1i}$, $I^{r}_{x_1 z_1} = -\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_{i1} \cdot z_{i1}$, $\mathrm{I}^{r}_{x_1 y_1} = -\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_{1i} \cdot y_{1i}$ – моменты жесткостей упругих связей первого и второго порядка.

Обобщённое описание приращения моментов гидростатических сил и дискретных упругих опор относительно оси O_2Y_2.

$$\Delta M_{y_2} = \Delta M^{\gamma}_{y_2} + \Delta M^{r}_{y_2} = -I_{x_1 z_1} \cdot (1-\cos\varphi) + \Delta z \cdot S_{y_1 o_1 z_1} \cdot \cos\varphi + \mathrm{I}_{x_1 y_1} \cdot \sin\varphi \quad (14)$$

где $S_{y_1 o_1 z_1} = S^{\gamma}_{y_1 o_1 z_1} + S^{r}_{y_1 o_1 z_1}$, $I_{x_1 z_1} = I^{\gamma}_{x_1 z_1} + I^{r}_{x_1 z_1}$, $\mathrm{I}_{x_1 y_1} = \mathrm{I}^{\gamma}_{x_1 y_1} + \mathrm{I}^{r}_{x_1 y_1}$,

– системные моменты жесткостей первого и второго порядка.

2.6.3. Общий вид уравнений равновесия ПМ после снятия груза в абсолютной системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$.

Дополним уравнения равновесия (5), подставив приращения реакций, моментов реакций (8,11,14). Уравнения равновесия ПМ после снятия груза P будут иметь следующий вид:

$$-S_{x_1 o_1 y_1} \cdot (1-\cos\varphi) + \Delta z \cdot F_z \cdot \cos\varphi + S_{x_1 o_1 z_1} \cdot \sin\varphi + P = 0; \quad (15)$$

$$-I_{y_1 z_1} \cdot [(1-\cos\varphi) + (\sin\varphi)^2] \cdot \cos\varphi + \Delta z \cdot S_{x_1 o_1 z_1} \cdot \cos\varphi + I_{x_1 o_1 z_1} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + I_{x_1 o_1 y_1} \cdot \sin\varphi \cdot (1-\cos\varphi) - \Delta z \cdot S_{x_1 o_1 y_1} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi - \Delta z^2 \cdot F_z \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + G_0 \cdot (z_{1g} - z_{1d}) \cdot \sin\varphi + P \cdot (y_{1p} \cdot \cos\varphi - z_{1p} \cdot \sin\varphi) = 0; \quad (16)$$

$$I_{x_1 z_1} \cdot (1-\cos\varphi) - \Delta z \cdot S_{y_1 o_1 z_1} \cdot \cos\varphi - \mathrm{I}_{x_1 y_1} \cdot \sin\varphi - P \cdot x_{1p} = 0. \quad (17)$$

Равновесие системы при принятом условии совмещения оси координат и оси наклонения описывается тремя уравнениями, включающих два неизвестных параметра: вертикальное перемещение начала системы отсчёта O_1 и угла наклонения φ. Третий неизвестный параметр – направление оси наклонения находится за пределами поставленной задачи и не препятствует поиску аналитического решения задачи равновесия.

2.7. Анализ уравнений равновесия ПМ после снятия груза P

2.7.1. Анализ уравнения равновесия сил. Уравнение сил содержит постоянную составляющую – внешнюю силу P, которая в данном описании – инвариант (не зависит от выбора системы координат). Следовательно, и реакция физической системы на силу P также должна быть инвариантом и не зависеть от выбора системы координат.

Суммарное перемещение начала координат O_1 вспомогательной системы координат является величиной постоянной и, в конечном итоге, является описанием перемещения фиксированной точки – ЦЖ вертикальных упругих связей:

$$\Delta z \cdot \cos\varphi - \frac{S_{x_1o_1z_1}}{F_z} \cdot \sin\varphi - \frac{S_{x_1o_1y_1}}{F_z} \cdot (1-\cos\varphi) = -\frac{P}{F_z} \cong \Delta z_f \,, \tag{18}$$

где $F_z < 0$ – градиент [15] параллельного потенциального поля, образованного гидростатическими силаFми и упругими опорами; Δz_f – перемещение ЦЖ.

ЦЖ и есть точка, перемещение которой равно алгебраической сумме линейных перемещений точек твердого тела при произвольном выборе полюса [14].

Координаты центра жесткости – точки, отвечающей условиям инвариантности свойств параллельных упругих связей, во вспомогательной системе координат $O_1X_1Y_1Z_1$ определяются выражениями: (19)

$$x_{1f} = \frac{S_{y_1o_1z_1}}{F_z}\ ;\ y_{1f} = \frac{S_{x_1o_1z_1}}{F_z}\ ;\ z_{1f} = \frac{S_{x_1o_1y_1}}{F_z}.$$

Учитывая отрицательное значение F_z, определим перемещение центра жесткости системы при положительной силе P, а также изменение осадки ПМ.

При снятии груза P>0 ПМ всплывает. ЦЖ в абсолютной системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$ переместится вверх на величину $\Delta z_f = -\frac{P}{-|F_z|} > 0$.

При неизменном уровне воды Z_0 в абсолютной системе координат после перемещения ПМ вверх на величину Δz_f осадка ПМ в собственной (вспомогательной) системе уменьшится и будет равна

$$z_0 - \Delta z_f$$

2.7.2. Анализ уравнений равновесия моментов сил

В уравнениях равновесия моментов (16, 17) присутствует неизвестное Δz – вертикальное перемещение начала вспомогательной системы $O_1X_1Y_1Z_1$ и его квадрат Δz^2. Исключим их из уравнений моментов, подставив их выражения из уравнения сил (15). Из уравнения равновесия сил (15) линейное перемещение и его квадрат имеют следующее описание:

$$\Delta z = -\frac{P}{F_z \cdot \cos\varphi} - \frac{S_{x_1o_1z_1}}{F_z \cdot \cos\varphi} \cdot \sin\varphi + \frac{S_{x_1o_1y_1}}{F_z \cdot \cos\varphi} \cdot (1-\cos\varphi); \tag{20}$$

$$\Delta z^2 = \left(-\frac{P}{F_z \cdot \cos\varphi}\right)^2 + \left(-\frac{S_{x_1o_1z_1}}{F_z} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)^2 + \left(+\frac{S_{x_1o_1y_1}}{F_z} \cdot \frac{(1-\cos\varphi)}{\cos\varphi}\right)^2 + 2\left(-\frac{P}{F_z \cdot \cos\varphi}\right)\left(-\frac{S_{x_1o_1z_1}}{F_z} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) + 2\left(-\frac{P}{F_z \cdot \cos\varphi}\right)\left(+\frac{S_{x_1o_1y_1}}{F_z} \cdot \frac{(1-\cos\varphi)}{\cos\varphi}\right) + 2\left(-\frac{S_{x_1o_1z_1}}{F_z} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)\left(+\frac{S_{x_1o_1y_1}}{F_z} \cdot \frac{(1-\cos\varphi)}{\cos\varphi}\right) \tag{21}$$

Проведем анализ содержания произведений с участием Δz и Δz^2 в уравнениях (16, 17):

$$\Delta z \cdot S_{x_1o_1z_1} = \left[-\frac{P}{F_z \cdot \cos\varphi} - \frac{S_{x_1o_1z_1}}{F_z \cdot \cos\varphi} \cdot \sin\varphi + \frac{S_{x_1o_1y_1}}{F_z \cdot \cos\varphi} \cdot (1-\cos\varphi)\right] \cdot S_{x_1o_1z_1} = \frac{1}{\cos\varphi}\left[-P \cdot y_{1f} - F_z \cdot y_{1f}^2 \cdot \sin\varphi + F_z \cdot y_{1f} \cdot z_{1f}(1-\cos\varphi)\right]; \tag{a}$$

$$-\Delta z \cdot S_{x_1o_1y_1} = \left[\frac{P}{F_z \cdot \cos\varphi} + \frac{S_{x_1o_1z_1}}{F_z \cdot \cos\varphi} \cdot \sin\varphi - \frac{S_{x_1o_1y_1}}{F_z \cdot \cos\varphi} \cdot (1-\cos\varphi)\right] \cdot S_{x_1o_1y_1} = \frac{1}{\cos\varphi} \cdot \left[P \cdot z_{1f} + F_z \cdot y_{1f} \cdot z_{1f} \cdot \sin\varphi - F_z \cdot z_{1f}^2 \cdot (1-\cos\varphi)\right] \tag{b}$$

$$\Delta z^2 \cdot F_z = \left[\left(-\frac{P}{F_z \cdot \cos\varphi}\right)^2 + \left(-\frac{S_{x_1o_1z_1}}{F_z} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)^2 + \left(+\frac{S_{x_1o_1y_1}}{F_z} \cdot \frac{(1-\cos\varphi)}{\cos\varphi}\right)^2 + 2\left(-\frac{P}{F_z \cdot \cos\varphi}\right)\left(-\frac{S_{x_1o_1z_1}}{F_z} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) + 2\left(-\frac{P}{F_z \cdot \cos\varphi}\right)\left(+\frac{S_{x_1o_1y_1}}{F_z} \cdot \frac{(1-\cos\varphi)}{\cos\varphi}\right) + 2\left(-\frac{S_{x_1o_1z_1}}{F_z} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)\left(+\frac{S_{x_1o_1y_1}}{F_z} \cdot \frac{(1-\cos\varphi)}{\cos\varphi}\right)\right] \cdot F_z = \frac{F_z}{(\cos\varphi)^2} \cdot \left[\Delta z_f^2 + y_{1f}^2 \cdot (\sin\varphi)^2 + z_{1f}^2 \cdot (1-\cos\varphi)^2 - 2 \cdot \Delta z_f \cdot y_{1f} \cdot \sin\varphi + 2 \cdot \Delta z_f \cdot z_{1f} \cdot (1-\cos\varphi) - 2 \cdot y_{1f} \cdot z_{1f} \cdot \sin\varphi \cdot (1-\cos\varphi)\right] \tag{c}$$

$$\Delta z \cdot S_{y_1o_1z_1} = \left[-\frac{P}{F_z \cdot \cos\varphi} - \frac{S_{x_1o_1z_1}}{F_z} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{S_{x_1o_1y_1}}{F_z} \cdot \frac{(1-\cos\varphi)}{\cos\varphi}\right] \cdot S_{y_1o_1z_1} = \frac{1}{\cos\varphi}\left[-P \cdot x_{1f} - F_z \cdot x_{1f} \cdot y_{1f} \cdot \sin\varphi + F_z \cdot x_{1f} \cdot z_{1f} \cdot (1-\cos\varphi)\right] \tag{d}$$

Подставим выражения (a, b, c) в уравнение (16), а выражение (d) в уравнение (17). Уравнения моментов будут иметь следующий вид:

$$M_{x_2} = -I_{y_1z_1} \cdot [(1-\cos\varphi) + (\sin\varphi)^2] \cdot \cos\varphi + \frac{1}{\cos\varphi}[-P \cdot y_{1f} - F_z \cdot y_{1f}^2 \cdot \sin\varphi + F_z \cdot y_{1f} \cdot z_{1f}(1 - \cos\varphi)] + I_{x_1o_1z_1} \cdot sin\varphi \cdot \cos\varphi + I_{x_1o_1y_1} \cdot sin\varphi \cdot (1-\cos\varphi) - \frac{1}{\cos\varphi}[-P \cdot z_{1f} - F_z \cdot y_{1f} \cdot z_{1f} \cdot \sin\varphi + F_z \cdot {z_{1f}}^2 \cdot (1-\cos\varphi)] \cdot sin\varphi \cdot \cos\varphi - \frac{F_z}{(\cos\varphi)^2} \cdot [\Delta z_f^2 + y_{1f}^2 \cdot (\sin\varphi)^2 + z_{1f}^2 \cdot (1-\cos\varphi)^2 - 2 \cdot \Delta z_f \cdot y_{1f} \cdot \sin\varphi + 2 \cdot \Delta z_f \cdot z_{1f} \cdot (1-\cos\varphi) - 2 \cdot y_{1f} \cdot z_{1f} \cdot \sin\varphi \cdot (1-\cos\varphi)] \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + G_0 \cdot (z_{g1} - z_{d1}) \cdot \sin\varphi + P \cdot (y_{p1} \cdot \cos\varphi - z_{p1} \cdot \sin\varphi) \quad (22)$$

$$M_{y_2} = I_{x_1z_1} \cdot (1-\cos\varphi) - \frac{1}{\cos\varphi}[-P \cdot x_{1f} - F_z \cdot x_{1f} \cdot y_{1f} \cdot \sin\varphi + F_z \cdot x_{1f} \cdot z_{1f} \cdot (1-\cos\varphi)] \cdot \cos\varphi - I_{x_1y_1} \cdot \sin\varphi - P \cdot x_{1p} \quad (23)$$

В уравнении (22) выделим функциональные блоки и выполним необходимые преобразования, упрощающие описание их функциональных свойств:

$$-I_{y_1z_1} \cdot [(1-\cos\varphi) + (\sin\varphi)^2] \cdot \cos\varphi + \frac{1}{\cos\varphi} F_z \cdot y_{1f} \cdot z_{1f} [(1-\cos\varphi) + \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi] \cong -(I_{y_1z_1} - F_z \cdot y_{1f} \cdot z_{1f}) \cdot (1-\cos\varphi) = -I_{fy_1z_1}(1-\cos\varphi); \quad (e)$$

$$I_{x_1o_1z_1} \cdot sin\varphi \cdot \cos\varphi - \frac{1}{\cos\varphi} \cdot F_z \cdot y_{1f}^2 \cdot \sin\varphi\,(1 + \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi) \cong (I_{x_1o_1z_1} - F_z \cdot y_{1f}^2) \cdot sin\varphi \cdot \cos\varphi = I_{fx_1o_1z_1} \cdot sin\varphi \cdot \cos\varphi; \quad (f)$$

$$(I_{x_1o_1y_1} - F_z \cdot {z_{1f}}^2)\, sin\varphi \cdot (1-\cos\varphi) - F_z \cdot z_{1f}^2 \cdot \frac{\sin^3\varphi}{\cos\varphi} \cong I_{fx_1o_1y_1} \cdot sin\varphi \cdot (1-\cos\varphi); \quad (g)$$

$$P \cdot \left(y_{p1} \cdot \cos\varphi - \frac{1}{\cos\varphi} y_{1f}\right) \cong P \cdot (y_{p1} - y_{1f}); \quad (h)$$

$$-P \cdot z_{p1} \cdot \sin\varphi + P \cdot z_{1f} \cdot \sin\varphi - \frac{F_z}{(\cos\varphi)^2} \cdot \Delta z_f^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = -P \cdot (z_{p1} - z_{1f}) \cdot \sin\varphi + P \cdot \Delta z_f \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \cong -P \cdot (z_{p1} - z_{1f} - \Delta z_f) \cdot \sin\varphi \quad (i)$$

После подстановки выражений (e, f, g, h, i) уравнение моментов (22) будет иметь вид:

$$M_{x_2} = -I_{fy_1z_1} \cdot (1-\cos\varphi) + I_{fx_1o_1z_1} \cdot sin\varphi \cdot \cos\varphi + I_{fx_1o_1y_1} \cdot sin\varphi \cdot (1-\cos\varphi) + P \cdot (y_{1p} - y_{1f}) - P \cdot (z_{1p} - z_{1f} - \Delta z_f) \cdot sin\varphi + G_0 \cdot (z_{1g} - z_{1d}) \cdot \sin\varphi. \quad (24)$$

После подстановки выражения (d) уравнение моментов (23) будет иметь следующий вид:

$$M_{y_2} = I_{fx_1z_1} \cdot (1-\cos\varphi) - I_{fx_1y_1} \cdot \sin\varphi - P(x_{1p} - x_{1f}) = 0. \quad (25)$$

После системных преобразований, исключения высоких степеней *sin φ* уравнения равновесия в системе $O_2X_2Y_2Z_2$ будут иметь следующий вид:

$$\Delta z_{1f} \cdot F_z + P = 0; \quad (26)$$

$$I_{fx_1o_1z_1} \cdot \sin\varphi + P \cdot (y_{1p} - y_{1f}) + G \cdot (z_g - z_d) \cdot \sin\varphi = 0; \quad (27)$$

$$-I_{fx_1y_1} \cdot \sin\varphi - P \cdot (x_{1p} - x_{1f}) = 0, \quad (28)$$

где Δz_{1f} – вертикальное перемещение ЦЖ; $I_{fx_1o_1z_1} = I_{x_1o_1z_1} - F_z \cdot y_{1f}^2$, $I_{fx_1y_1} = I_{x_1y_1} - F_z \cdot x_{1f} \cdot y_{1f}$ – центральные моменты второго порядка жесткостей связей; z_g, z_d – аппликаты ЦМ и ЦВ (центра величины – точки приложения равнодействующей реакции связей [4]) после снятия груза; $G = G_0 - P$, $D = D_0 - P$ – вес ПМ, равнодействующая реакции связей после снятия груза Р; x_{1f}, y_{1f}, z_{1f} – координаты ЦЖ упругих связей.

Аппликаты ЦМ и ЦВ после снятия груза Р определяются выражениями:

$$z_g = \frac{G_0 \cdot z_{1g} - P \cdot z_{1p}}{G},\ z_d = \frac{D_0 \cdot z_{1d} - P \cdot (z_{1f} - \Delta z_{1f})}{D}, \quad (29)$$

где G_0, z_{1g}, D_0, z_{1d} – вес ПМ и аппликата ЦМ, равнодействующая реакций связей и аппликата ЦВ до снятия груза Р.

Полученные уравнения равновесия (26, 27, 28) являются инвариантами и указывают на особенности процесса перехода механической системы в новое положение равновесия в зависимости от свойств системы упругих связей. Приращение равнодействующей реакции упругих связей приложено в ЦЖ и пропорционально вертикальному перемещению ЦЖ независимо от выбора системы отсчета. Угловые перемещения создают реактивный момент, переносящий силу Р в ЦЖ связей. Реактивный момент связей пропорционален углу наклонения φ. Коэффициентами пропорциональности являются центральные моменты второго порядка упругих связей относительно координатных плоскостей, проходящих через ЦЖ системы упругих связей).

Уравнение равновесия моментов (27) приведём к стандартной форме, принятой в теории корабля [2]:

$$G \cdot H \cdot \sin\varphi + P \cdot (y_{1p} - y_{1f}) = 0 \quad (30)$$

откуда определим

$$\sin\varphi = \frac{-P \cdot (y_{1p} - y_{1f})}{G \cdot H}, \quad (31),$$

где: Р – вертикальная сила; y_{1p}, y_{1f} – ординаты точки приложения силы Р и ЦЖ связей; $G = G_0 + P$ – новый вес ПМ; $H = \frac{I_{fx_1 o_1 z_1}}{G} + a$ – метацентрическая высота [2]; $I_{fx_1 o_1 z_1} < 0$ – центральный момент инерции жесткостей связей второго порядка относительно плоскости $X_1 O_1 Z_1$; $a = z_g - z_d$ – возвышение ЦМ над ЦВ после снятия груза Р.

Формула (31), как частный случай, известна в теории корабля применительно к свободно плавающему кораблю [16].

Все перемещения системы инвариантны и осуществляются относительно точки приложения равнодействующей приращения реакции упругих связей. Силовые взаимодействия ПМ с окружающей средой описываются физическими (полярными) векторами, представляющими силы и реакции, и аксиальными векторами, образованными парами приложенной силы и равнодействующей реакций, а также центральными моментами второго порядка реакций вертикальных упругих связей (относительно ЦЖ) и не зависят от выбора системы координат. Математическая модель описывает условия равновесия в системе координат, положение которой относительно механической системы определяется физическими свойствами упругих связей как самостоятельной системы. Изотропность инерциального пространства не позволяет выявить изменения свойств от изменения положения механической системы в нём. Можно изменить только положение наблюдателя для наиболее ясного и удобного наблюдения за механическими процессами. Обычно, в процессе проектирования будущее изделие уже имеет свою рабочую (проектную) систему координат, выбранную по каким-то правилам. Следовательно, о изделии необходимо знать следующее:

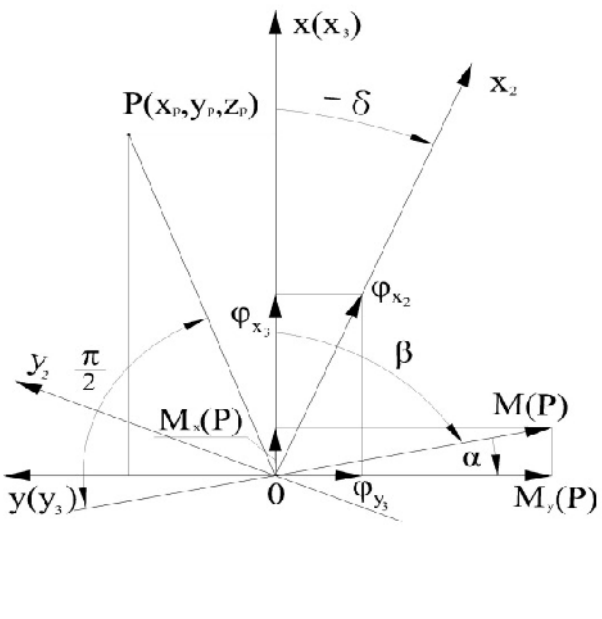
1) направление оси наклонения в абсолютной системе координат $O_3X_3Y_3Z_3$, совмещенной с рабочей системой координат *OXYZ*.

2) величину наклонений в абсолютной системе координат $O_3X_3Y_3Z_3$, совмещенной с рабочей системой координат *OXYZ*.

Моменты жесткостей второго порядка относительно главных центральных осей имеют собственное описание [17] ($I_{fxoz} \neq 0, I_{fyoz} \neq 0, I_{fxy} = 0$). При этом уравнения моментов (27, 28) будут независимыми (несвязанными). Следовательно, существует и одно единственное или собственное описание равновесия в системе главных центральных осей жесткости связей. Аналогия такого утверждения единственности присутствует в квантовой механике. Состояние частицы в статистическом ансамбле квантовой механики описывается смесью описаний состояний крайних точек с чистыми состояниями, которые нельзя представить в виде смеси других состояний [13].

2.7.3. Определение положения равновесия ПМ в инерциальной системе координат $O_3X_3Y_3Z_3$, совмещенной с рабочей системой координат $OXYZ$

Построенное описание равновесия является инвариантом (в смысле независимости от выбора системы отсчета физических свойств конкретной механической системы). Как и исходные уравнения Лагранжа, оно пригодно для качественного анализа свойств системы, но не обеспечивает численного решения задачи равновесия.



Для получения реального, пригодного для практических целей описания равновесия ПМ, необходимо установить связь описания наклонения в особенной системе отсчета с заданным направлением оси O_2X_2, и в системе координат с произвольным направлением горизонтальных осей. Эту процедуру можно выполнить в паре сопряженных систем координат (рис. 3): абсолютной системе $O_3X_3Y_3Z_3$ и рабочей системе $OXYZ$ ПМ, смещенных относительно ранее использовавшихся систем координат на угол δ.

Для представления описания наклонения в абсолютной системе координат $O_3X_3Y_3Z_3$, выполним последовательно ряд угловых преобразований исходного описания ПМ:

а) представим описания исходных уравнений моментов равновесия до приложения силы Р (наклонение $\varphi = 0$) в системе $O_1X_1Y_1Z_1$ посредством их описаний в системе $OXYZ$ (выполнив переход к системе координат $O_1X_1Y_1Z_1$ повернутой относительно системы $OXYZ$ на угол «$-\delta$»);

b) представим описания моментов равновесия в системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$ после наклонения ПМ (системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$) на угол φ относительно оси O_2X_2 совокупностью исходных описаний свойств в рабочей системе координат $OXYZ$;

c) представим описания моментов равновесия в инерциальной системе координат $O_3X_3Y_3Z_3$, совпадающей в начальный момент с рабочей системой координат $OXYZ$, поворотом системы координат $O_2X_2Y_2Z_2$ на угол «$+\delta$» до совпадения с $O_3X_3Y_3Z_3$.

В данной части исследования используются стандартные формулы преобразования проекций отрезков, моментов второго порядка на координатные оси [17].

После выполнения приведенного выше алгоритма преобразований описание наклонения на угол φ относительно одной горизонтальной оси неизвестного направления будет представлено совокупностью наклонений относительно двух ортогональных горизонтальных осей рабочей системы координат $OXYZ$ ПМ:

$$\Delta z_f \cdot F_z + P = 0; \tag{32}$$

$$M_{x_3} = \left[I_{fxoz} + G \cdot (z_g - z_d)\right] \cdot \cos\delta \cdot \sin\varphi + I_{fxy} \cdot \sin\delta \cdot \sin\varphi + P \cdot (y_p - y_f) = 0; \tag{33}$$

$$M_{y_3} = -\left[I_{fyoz} + G \cdot (z_g - z_d)\right] \cdot \sin\delta \cdot \sin\varphi - I_{fxy} \cdot \cos\delta \cdot \sin\varphi - P \cdot (x_{1p} - x_{1f}) = 0, \tag{34}$$

где Δz_f – линейное перемещение ЦЖ упругих связей; F_z, x_f, y_f – линейная жёсткость и координаты ЦЖ упругих связей; $I_{fxoz}, I_{fyoz}, I_{fxy}$ – центральные моменты второго порядка упругих связей; P, x_p, y_p – снятый груз и его координаты; G, z_g, z_d – вес ПМ, аппликаты ЦМ и ЦВ с учётом снятия груза Р; δ – угол поворота от системы координат $O_2X_2Y_2Z_2$ к системе координат $O_3X_3Y_3Z_3$ (положительный); φ – угол наклонения от момента силы Р в системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$.

Уравнения равновесия моментов (33, 34) включают два взаимосвязанных неизвестных угловых параметра. Это угол наклонения φ относительно оси O_2X_2 в системе координат $O_2X_2Y_2Z_2$ и угол δ, определяющий взаимную ориентацию в пространстве систем координат $O_2X_2Y_2Z_2$ и $O_3X_3Y_3Z_3$. В теории корабля [2, 10] рассматриваются наклонения относительно главных центральных осей жесткости ввиду отсутствия решения в неглавной центральной системе координат связей. В главной центральной системе координат упругих связей ($I_{fxy} = 0$) уравнения моментов становятся независимыми (не связанными). В этом случае внешний момент и малый угол наклонения, представленные векторами, разлагают по осям координат и наклонения рассматривают независимо. В данном случае наклонение уже описано в абсолютной системе координат $O_3X_3Y_3Z_3$. Вопрос сводится к получению аналитических описаний углов наклонений и определению направления оси наклонения O_2X_2.

С целью предохранения от случайных ошибок со знаками представим проекции моментов внешней силы Р в общем виде:

$$M_{x_3}(\mathrm{P}) = P \cdot (y_p - y_f); \quad M_{y_3}(\mathrm{P}) = -P \cdot (x_p - x_f). \tag{35}$$

Уравнения равновесия моментов будут иметь следующий вид:

$$M_{x_3} = \left[I_{fxoz} + G \cdot (z_g - z_d)\right] \cdot \cos\delta \cdot \sin\varphi + I_{fxy} \cdot \sin\delta \cdot \sin\varphi + M_{x_3}(\mathrm{P}) = 0, \tag{36}$$

$$M_{y_3} = -\left[I_{fyoz} + G \cdot (z_g - z_d)\right] \cdot \sin\delta \cdot \sin\varphi - I_{fxy} \cdot \cos\delta \cdot \sin\varphi + M_{y_3}(\mathrm{P}) = 0. \tag{37}$$

Из (36) определим произведение

$$\cos\delta \cdot \sin\varphi = \frac{-I_{fxy} \cdot \sin\delta \cdot \sin\varphi - M_{x_3}(\mathrm{P})}{G \cdot h}. \tag{38}$$

Подставив (38) в (37), определим значение второго произведения тригонометрических функций:

$$\sin\delta \cdot \sin\varphi = \frac{1}{G \cdot H - \frac{I_{fxy}^2}{G \cdot h}} \cdot \left[M_{y_3}(\mathrm{P}) + \frac{I_{fxy}}{G \cdot h} \cdot M_{x_3}(\mathrm{P})\right]. \tag{39}$$

Подставив (39) в (38), и получим:

$$\cos\delta \cdot \sin\varphi = -\frac{M_{x_3}(\mathrm{P})}{G \cdot h} \cdot \left(1 + \frac{I_{fxy}^2}{G^2 \cdot H \cdot h - I_{fxy}^2}\right) - M_{y_3}(\mathrm{P}) \cdot \frac{I_{fxy}}{G^2 \cdot H \cdot h - I_{fxy}^2}. \tag{40}$$

где $H = \frac{I_{fyoz}}{G} + (z_g - z_d)$, $h = \frac{I_{fxoz}}{G} + (z_g - z_d)$ – большая и малая метацентрическая высота [2], соответственно.

Переход к описанию наклонений в абсолютной системе координат $\boldsymbol{O_3X_3Y_3Z_3}$. Из анализа схемы векторного представления действующих в системе моментов и сопутствующего им углового перемещения $\varphi = \sin\varphi$ (рис. 3) следует, что наклонение ПМ в системе $O_2X_2Y_2Z_2$ удобно представить как псевдовектор углового перемещения (вращения) с проекциями:

$$\varphi_{x_2} = \sin\varphi, \quad \varphi_{y_2} = 0,$$

где $\varphi_{x_2}, \varphi_{y_2}$ – проекции псевдовектора вращения φ на оси O_2X_2 и O_2Y_2.

Тогда в системе координат $O_3X_3Y_3Z_3$ проекции псевдовектора вращения будут иметь следующий вид:

$$\varphi_{x_3} = \sin\theta = \varphi_{x_2}\cdot\cos\delta + \varphi_{y_2}\cdot\sin\delta = \cos\delta\cdot\sin\varphi; \quad (41)$$

$$\varphi_{y_3} = \sin\psi = \varphi_{y_2}\cdot\cos\delta - \varphi_{x_2}\cdot\sin\delta = -\sin\delta\cdot\sin\varphi, \quad (42)$$

где $\varphi_{x_3}, \varphi_{y_3}$ – проекции псевдовектора вращения на оси O_3X_3, O_3Y_3; θ – угол крена (угол вращения вокруг оси O_3X_3); ψ – угол дифферента (угол вращения вокруг оси O_3Y_3.

Уравнения равновесия (36, 37) и формулы определения углов наклонения (39, 40) с учетом выражений (41, 42) в абсолютной системе координат с горизонтальными осями произвольного направления будут иметь следующий вид:

$$M_{x_3} = G\cdot h\cdot\sin\theta - I_{fxy}\cdot\sin\psi + M_{x_3}(\mathrm{P}) = 0; \quad (43)$$

$$M_{y_3} = G\cdot H\cdot\sin\psi - I_{fxy}\cdot\sin\theta + M_{y_3}(\mathrm{P}) = 0; \quad (44)$$

$$\sin\psi = -\frac{1}{G\cdot H - \frac{I_{fxy}^2}{G\cdot h}}\cdot\left[M_{y_3}(\mathrm{P}) + \frac{I_{fxy}}{G\cdot h}\cdot M_{x_3}(\mathrm{P})\right]; \quad (45)$$

$$\sin\theta = -\frac{M_{x_3}(\mathrm{P})}{G\cdot h}\cdot\left(1 + \frac{I_{fxy}^2}{G^2\cdot H\cdot h - I_{fxy}^2}\right) - M_{y_3}(\mathrm{P})\cdot\frac{I_{fxy}}{G^2\cdot H\cdot h - I_{fxy}^2} \quad (46)$$

где G – вес ПМ с учетом груза P; h, H – малая и большая метацентрические высоты [2]; I_{fxy} – момент жесткостей второго порядка (центробежный); $M_{x_3}(\mathrm{P}), M_{y_3}(\mathrm{P})$ – проекции возмущающего момента в системе координат $O_3X_3Y_3Z_3$; θ, ψ – угол крена и угол дифферента в системе координат $O_3X_3Y_3Z_3$.

В случае совпадения направления осей инерциальной системы координат $O_3X_3Y_3Z_3$ и главной центральной системы координат упругих связей ПМ ($I_{fxy} = 0$) уравнения не содержат связей между координатами и представляют, в соответствии с [13], собственное независимое описание наклонения.

Наклонения относительно главных центральных осей ($I_{fxy} = 0$) определяются выражениями:

$$\sin\psi = -\frac{M_{y_3}(\mathrm{P})}{G\cdot H}; \quad \sin\theta = -\frac{M_{x_3}(\mathrm{P})}{G\cdot h}. \quad (47)$$

Необходимо помнить, что в физических характеристиках упругих связей учтено знаком «-« противоположное градиенту направление реакции связей ($\gamma\cdot dF < 0, c_i < 0$, следовательно, $G\cdot H < 0, G\cdot h < 0$).

Определим для контроля направление наклонения (знак) при нашем стандартном условии – снятии груза в первом квадранте (P>0; $x_p > x_f$, $y_p > y_f$):

$$\sin\psi = -\frac{M_{y_3}(\mathrm{P})}{G\cdot H} = -\frac{-P\cdot(x_p - x_f)}{G\cdot H} < 0; \quad \sin\theta = -\frac{M_{x_3}(\mathrm{P})}{G\cdot h} = -\frac{P\cdot(y_p - y_f)}{G\cdot h} > 0. \quad (48)$$

В соответствии с правилом буравчика, в данном случае дифферент отрицателен (на корму), крен положителен (на правый борт).

2.7.4. Определение направления оси наклонения

Для анализа используем схему моментов сил, действующих на ПМ (рис. 3), и выполним следующие действия над уравнениями:

- упростим описание уравнений, использовав метацентрические характеристики остойчивости [2] уравнений (43, 44);
- перенесём проекции аксиального момента пары силы P и реакции связи на него в правую часть уравнений;
- разделим почленно уравнение (43) на уравнение (44);
- разделим числитель и знаменатель на $\cos\delta$.

Полученное уравнение будет иметь следующий вид:

$$\frac{G \cdot h + I_{fxy} \cdot \operatorname{tg}\delta}{-G \cdot H \cdot \operatorname{tg}\delta - I_{fxy}} = \frac{M_{x_3}(P)}{M_{y_3}(P)} = ctg\beta = tg\alpha, \quad (49)$$

Направление оси наклонения определяется из (49) выражением:

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{G \cdot h + I_{fxy} \cdot \operatorname{tg}\alpha}{G \cdot H \cdot \operatorname{tg}\alpha + I_{fxy}} \quad (50)$$

Если абсолютная система координат $O_3X_3Y_3Z_3$ совпадает с главной центральной системой координат $OXYZ$ жесткостей упругих связей ПМ ($I_{fxy} = 0$), то направление оси наклонения определяется известным выражением [2]:

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{h}{H \cdot \operatorname{tg}\alpha}, \quad (51),$$

где α, β – углы, определяющие направление вектора момента $M(P)$ в системе координат в системе координат $O_3X_3Y_3Z_3$; δ – угол, определяющий направление оси наклонения O_2X_2 в абсолютной системе координат $O_3X_3Y_3Z_3$.

3. Анализ результатов исследований

В исследовании рассмотрена задача равновесия механической системы, моделирующей в достаточной степени ПМ на мелководье. Механической системой, обладающей интегративными свойствами, является твердое тело с пространственной системой упругих связей [8; 9]. Для моделирования ТС использована частная модель механической системы, включающая твердое тело на упругих опорах, частично погруженное в воду. Выбор абсолютной системы координат ограничен условием совпадения оси наклонения с горизонтальной осью системы координат. Упругие опоры, имитирующие подвеску, шарнирно соединены с корпусом. Расположение воображаемых шарниров по высоте принималось в разное время различным: на уровне заделки в корпус торсионов гусеничной ПМ [19], на уровне статического положения оси колеса. В данном случае выбор высоты точек приложения вертикальных связей не влияет на корректность постановки задачи. Произвольный выбор положения оси O_2X_2 как прогнозируемой оси наклонения на уровне опорной поверхности (на рис. 2), был исключен самими математическими преобразованиями без привлечения дополнительных условий или предположений. Полученное инвариантное описание сил полярными векторами, а моментов аксиальными векторами дает конкретное содержание прогнозу Л. Ландау о форме уравнений равновесия замкнутой системы [11]. Уравнения моментов равновесия, в общем случае, являются связанными, ранее не имевшими аналитического решения. В данной работе получено аналитическое решение уравнений равновесия моментов в системе координат с произвольным направлением осей, которые включают и решение распавшихся уравнений в системе главных центральных осей координат.

Достоверность результатов можно прогнозировать отсутствием сбоев при выполнении длинной цепи математических преобразований, заканчивающихся известными ранее математическими выражениями, имеющими расширенный смысл.

Выводы

В данном исследовании новым является:

– установление однородности описания реакций гидростатических сил и сил упругости пружины;
– построение обобщенной ММ описания статического равновесия ПМ, моделью которой является твердое тело на вертикальных упругих опорах, полупогруженное в воду;
– аналитическое определение координат точки приложения равнодействующей вертикальных реакций упругих связей и гидростатических сил воды;
– аналитическое определение инвариантности линейных и угловых перемещений;
– нахождение аналитических описаний перехода в новое положение равновесия под действием вертикальной силы в системе координат с произвольной ориентацией горизонтальных осей;
– разработанная ММ пригодна для определения статического равновесия сухопутных, плавучих транспортных средств и сооружений;
– определенные конкретные проявления принципов инвариантности содержат предпосылки для определения ограничений на использование ЦМ как преимущественной системы отсчета в задачах динамики твердого тела.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Жабров, В. И. Инженерные переправочно-десантные средства СССР и России / В. И. Жабров, А. П. Степанов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://vadimvswar.narod.ru/ALL_OUT/TiVOut9801/AmfRS/AmfRS001.htm

2. Семенов-Тян-Шанский, В. В. Статика и динамика корабля. Теория плавучести, остойчивости и спуска / В. В. Семенов-Тян-Шанский. – Л. : Судпромгиз, 1960. – 576 с.

3. Егоров Д. Г., Ходонович Л. Е. Самоходные переправочные средства и средства моторизации переправ : ч. 1 / Д. Г. Егоров, Л. Е. Ходонович. – М. : ВИА, 1963. – 250 с.

4. Степанов А. П. Конструирование и расчет плавающих машин / А. П. Степанов. – М. : Машиностроение, 1983. – 200 с., ил.

5. Аксенов П. В. Многоосные автомобили. – 2-е изд., перераб. и доп. / П. В. Аксенов. – М. : Машиностроение, 1989. – 280 с. :ил.

6. Забавников Н. А. Основы теории транспортных гусеничных машин / Н. А. Забавников. – М., «Машиностроение», 1975. – 448 с.

7. Задеев Е. П. Определение равновесия плавающей машины на мелководье после приема груза / Е. П. Задеев // Исследование и расчет вездеходных транспортных средств и автопоездов : сборник научных трудов МАДИ. – М. : МАДИ, 1982. – С. 105-113.

8. Найденко, О. К. Амортизация судовых двигателей и механизмов / О. К. Найденко, П. П. Петров. – Л. : Судпромгиз, 1962. – 288 с.

9. Ганиев, Р. Ф. Колебания твердых тел / Р. Ф. Ганиев, В. О. Кононенко. – М. : Наука, 1976. – 432 с.

10. Фролов, К. В. Методы совершенствования машин и современные проблемы машиностроения / К. В. Фролов. – М. : Машиностроение, 1984. – 223 с.

11. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Теоретическая физика : учебн. пособ. в 10 т. ; т. I. : Механика : 4-е изд., испр. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – 216 с.

12. Матвеев, А. Н. Механика и теория относительности : учебн. для вузов (3-е изд.) / А. Н. Матвеев. – М. : «Издательство «Мир и Образование», 2003. – 432 с: ил.

13. Холево, А. С. Статистическая структура квантовой механики и скрытые параметры / А. С. Холево. – М. : Знание, 1985. – 32 с.

14. Лойцянский, Л. Г. Курс теоретической механики : в 2-х т., т. I.: Статика и кинематика / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М. : Физматгиз, 1982. – 352 с.

15. Лойцянский, Л. Г. Курс теоретической механики : в 2-х т., т. II: Динамика / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М. : Физматгиз, 1983. – 640 с.

16. Власов, В. Г. Статика корабля / В. Г. Власов. – Воениздат, 1948. – 732 с.

17. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов : изд. 2 / В. И. Феодосьев. – М. : Физматгиз, 1962. – 536 с.

18. Крылов, А. Н. Избранные труды / А. Н. Крылов. – Л. : Изд. АН СССР, 1958. – 803 с.

19. Задеев, Е. П. Пространственные колебания транспортного средства / Е. П. Задеев // Механіка та машинобудування. – 2000. – № 1. – С. 261-270.

Отримано редакцією 28.09.2012 р.

Задєєв Євгеній Павлович, к.т.н., проф. Кременчуцький університет економіки, інформаційних технологій і управління.