УДК 681.518

МЕТОДЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В.А.Ткач. Херсонский национальный технический университет.

In article questions of structure and the image analysis in a problem of recognition and construction of scenes are considered. It is offered to use a problem of geometrical programming for the description of complex object, as sets of more simple geometrical objects.

***Keywords**: synthesis, stage, informative design, geometrical programming.*

Введение

Методы геометрического моделирования, используемые при представлении эталонов образа, основываются на знании структуры объекта и математического описания его элементов [1]. Геометрическое согласование объектов в процедуре распознавания позволяет использовать задачу геометрического моделирования, при этом выдвигаемая гипотеза – это описание сложной, с точки зрения геометрии объекта, совокупности более простых геометрических объектов.

Постановка задачи

Оценка максимальной информативности изображения (интерфейса) при использовании методов геометрического программирования.

Основная часть

При построении изображения набор типовых сцен S представляет собой ограниченное множество [2]. Постановку задачи определения ограничений можно рассматривать как задачу идентификации. Если ограничения известны, то они могут быть выражены в виде пространства состояний и пространства управления:

$$s \in S, \quad u \in U. \tag{1}$$

Выход за пределы этих пространств, в течении ограниченного времени, не ведет к аварийной ситуации, так как эти пространства "вложены" в пространства предельных режимов

$$S \subset S_{пр}, \quad U \subset U_{пр}. \tag{2}$$

Обычно эти пространства ограничены поверхностями, которые могут быть представленными уравнениями в неявном виде: $C_{ог}(s, u) = const$.

Так как функция штрафа $C_{шт}(s, u)$ мала или равна нулю внутри областей (1) и (2) и быстро нарастает при выходе за пределы ограничений, то можно показать, что при построении изображения функции штрафа зависят от количества информации, т.е. от предъявляемого изображения. Следовательно, значение среднего риска должно быть минимальным: $\overline{C} \to \min$.

По методу правдоподобия [2] предполагается наиболее вероятной выборка, полученная в эксперименте. Если предположить прямую зависимость определяемого количества измеряемой информации от значения среднего риска как:

$$\frac{d\overline{C}}{dI} = \sim = const, \quad d\overline{C} = \sim dI, \tag{3}$$

то получаем, что количество информации прямо пропорционально значению среднего риска:

$$I = \frac{1}{\sim}\overline{C}. \tag{4}$$

При нулевом значении среднего риска количество поступившей информации так же равно нулю. И напротив, чем больше значение среднего риска, тем больше информативность полученного изображения.

Изображение должно отображать реальную действительность, т.к. элементы его связаны [4]. Поэтому основой изображения будет граф связности G такой, чтобы: $G^* \to min\overline{C}$.

Необходимо учитывать, что решение будет приниматься с учетом текстур изображения, а его границы всегда неопределенны. Поэтому ребрам графа целесообразно соотнести нечеткое множество, формируемое функцией принадлежности $F(x,y)$. Таким образом, получаем задачу оптимального синтеза изображения в смысле наименьшего штрафа, где пара $F,\, G \to \min \overline{C}$.

Исходя из принятой гипотезы – зависимости функции штрафа и информативности, получаем утверждение, что генерируемое изображение должно нести $\min I$.

С другой стороны, в случае распознавании изображения оператором, происходит сравнение генерируемого, ожидаемого и предъявленного изображений. Учитывая, что расстояние между образами в информационном пространстве оценивается условной вероятностью [2]

$$I(x \mid y) = -\log_a P(x \mid y), \qquad (5)$$

что ведет к минимизации взаимных штрафов.

Основываясь на анализе устройства объекта (логическое и текстуальное описание), формируем алгоритм построения изображения как гипотезу об узнавании, что при минимальном описании дает четкую узнаваемость объекта.

Изображение в конечном итоге предназначено для того, чтобы донести до наблюдателя информацию, которая воздействует на механизм понимания и анализа данной сцены [4; 5].

Предполагаемая сцена-замысел (задуманная оператором сцена, которую предстоит синтезировать) должна пройти несколько промежуточных этапов перед тем, как достигнуть стадии изображения, а затем снова превратиться в сцену, но уже в сознании наблюдателя, как показано на рис. 1.

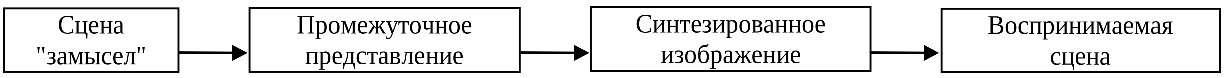

Рис. 1. Этапы представления информации

Множество изображений можно классифицировать в зависимости от методов их создания, т.е. от типов базовых элементов, из которых они состоят: точки, линии, многоугольники и т.п. При построении изображения оператор располагает элементарными объектами (параллелепипеды, цилиндры, конусы), которые он комбинирует для описания требуемого объекта. Элементарные объекты могут примыкать один к другому или проникать друг в друга. Можно также использовать их "негативы" для получения отверстий разной формы [4; 5].

Если процедура распознавания применяется к некоторому изображению и обеспечивает его преобразование в изображение, состоящее из отдельных геометрических объектов, то тогда мы имеем дело с описаниями трехмерных объектов, спроецированных на плоскость для получения воспроизводимого изображения. Затем определяется соответствие этих объектов эталонным изображениям.

Для анализа изображения можно использовать проекции простых объектов, поскольку построение проекций эквивалентно отображению некоторой двухмерной области в некоторый сигнал. При совмещении проекций объекты могут перекрывать друг друга, а проекции исходных объектов представляют собой новые подмножества, представляющие собой пересечение проекций основных множеств.

Наблюдаемое изображение представляет собой сложный объект, который может быть описан множеством точек изображения V. Для простоты считывания этот объект можно разложить на простые объекты, которые в свою очередь можно представить в виде подмножеств точек V_i .

Если рассматривать описание сложного объекта как совокупность более простых геометрических объектов, то геометрическое согласование объектов в процедуре распознавания позволяет использовать задачу геометрического программирования [2; 3].

В задаче оптимизации процедуры распознавания:

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{x}^* \to \min f(\mathbf{x}) \\ y = const\end{array}\right\} \qquad (6)$$

с функцией цели в виде позинома и неотрицательными весовыми коэффициентами:

$$\left.\begin{array}{l} f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} C_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{ij}} \\ C_j \ge 0 \qquad j = \overline{1...n} \end{array}\right\}. \qquad (7)$$

Условие оптимальности имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0} \\ f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} C_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{ij}} \\ C_j \ge 0 \qquad j = \overline{1...n} \end{array}\right\}. \qquad (8)$$

Тогда в минимуме производные будут:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{m} C_i a_{i1} (x_1)^{a_{i1}-1} \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{ij}} = 0 \\ \qquad \dots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{m} C_i a_{in} (x_n)^{a_{in}-1} \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{ij}} = 0 \end{array}\right\}. \qquad (9)$$

Обозначив функцию произведения как $\prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{ij}} = P_i$, запишем (9) в виде:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{1}{x_j} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} C_i P_i(\mathbf{x}) = 0, \qquad j = \overline{1...n} \cdot \qquad (10)$$

Определяем оптимальные веса, обозначив $f(\mathbf{x}^*) = f^*$:

$$W_i = \frac{C_i P_i(\mathbf{x}^*)}{f^*}, \qquad i = \overline{1...m}\ . \qquad (11)$$

Очевидно, что в оптимуме сумма весов равна 1:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{C_i P_i(\mathbf{x}^*)}{f^*} = \sum_{i=1}^{m} W_i = 1 \cdot \qquad (12)$$

И из (10) следует, что:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} C_i P_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{C_i P_i(\mathbf{x}^*)}{f^*} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} W_i = 0, \qquad j = \overline{1...n} \cdot \qquad (13)$$

С учетом (12) можем записать систему из $n+1$ уравнения для m переменных:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} W_i &= 1\\ \sum_{i=1}^{m} a_{i1} W_i &= 0\\ &\vdots\\ \sum_{i=1}^{m} a_{in} W_i &= 0\end{aligned}\right\} . \tag{14}$$

Однако данная система уравнений позволяет найти только связь между весами. Для определения значения функции цели в точке оптимума при оптимальном распределении весов используем известное неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим [3]:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i \ge \prod_{i=1}^{n} W_i^{\frac{1}{n}}, \tag{15}$$

при этом:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i = \prod_{i=1}^{n} W_i^{\frac{1}{n}} \quad \text{если} \quad W_1 = W_2 = \ldots = W_n . \tag{16}$$

Приняв $¢_i = \frac{1}{n}$, а $¢_i W = y_i$ неравенство для взвешенных средних геометрического и арифметического можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \ge \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{¢_i}\right)^{¢_i}; \qquad \sum_{i=1}^{n} ¢_i = 1 . \tag{17}$$

При этом следует учитывать, что $f^* = f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} C_i P_i^*$, тогда для минимума функции цели можем записать $f^* = f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{C_i}{W_i}\right)^{W_i}$.

Оценивая сложность фрагмента изображения по количеству вершин [5] скелетного графа k_i изображения и по связанным с вершиной количеством точек s_i и учитывая взаимные связи между точками, связанными с различными вершинами, получаем вид функции цели. Таким образом, находим минимально сложное изображение при заданных информативностях фрагментов:

$$\left.\begin{aligned} f(\mathbf{s}) &= \sum_{i=1}^{m} I_i \prod_{j=1}^{n} s_j^{k_{ij}}\\ I_j &\ge 0 \qquad j = \overline{1 \ldots n}\end{aligned}\right\} . \tag{18}$$

Тогда:

$$\prod_{j=1}^{n} s_j^{k_{ij}} = P_i , \tag{19}$$

$$W_i = \frac{I_i P_i\left(\mathbf{x}^*\right)}{f^*} \quad j = \overline{1 \ldots m}, \quad \sum_{i=1}^{m}\frac{I_i P_i\left(\mathbf{x}^*\right)}{f^*} = \sum_{i=1}^{m} W_i = 1 . \tag{20}$$

Необходимые условия оптимума можно показать в виде:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} W_i &= 1\\ \sum_{i=1}^{m} k_{i1} W_i &= 0\\ &\vdots\\ \sum_{i=1}^{m} k_{in} W_i &= 0\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

$$f^* = \min f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{I_i}{W_i}\right)^{W_i}.$$

Вместо задачи поиска точки оптимума здесь важнее найти распределение весов фрагментов кадра изображения (интерфейса):

$$W_1, \cdots \quad W_m\ , \qquad i = \overline{1...m}\ , \quad (22)$$

что позволяет распределить ресурс управления системы при генерации кадра изображения или интерфейса.

Выводы

1. Оценить информативность кадра изображения можно достаточно легко, если построение выполнено как совокупность простых геометрических объектов используя методы геометрического программирования.
2. Задача максимальной информативности кадра при использовании позиномиальных оценок информативности фрагментов или соответствующих рисков решается как оптимальное распределение весов, что позволяет построить алгоритм синтеза изображений для изображения интерфейса.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Мартинес, Ф. Синтез изображений. Принципы, аппаратное и программное обеспечение / Ф. Мартинес – М. : Радио и связь, 1990. – 192 с.
2. Красовский, А. А. Справочник по теории автоматического управления : под. ред. А. А. Красовского. – М. : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 712 с.
3. Аттетков, А. В. Методы оптимизации : учебн. для вузов (2-е изд., стереотип.) / А. В. Аттетков, С. В. Галкин, В. С. Зарубин : под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 440 с.
4. Порев, В. Н. Компьютерная графика / В. Н. Порев. – СПб. : БХВ-Петербург, 2002. – 432 с.
5. Местецкий, Л. М. Скелетизация многосвязной многоугольной фигуры на основе дерева смежности ее границы / Л. М. Местецкий // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2006. – Т. 9, № 3. – С. 201-216.

Отримано редакцією 29.082013 р.

Ткач Вера Алексеевна, ст. преп. кафедры основ конструирования. Херсонский национальный технический университет.
E-mail: tkachver@yandex.ru