УДК 629.75

С.Н. Власик, С.В. Герасимов, А.А. Журавльов

Харьковский университет Воздушных Сил имени Ивана Кожедуба, Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ И АППАРАТУРЫ ПОТРЕБИТЕЛЯ СПУТНИКОВОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ АЭРОБАЛЛИСТИЧЕСКОГО АППАРАТА

Разработаны математические модели бесплатформенной инерциальной навигационной системы и аппаратуры потребителя спутниковой радионавигационной системы, модель комплексирования навигационной системы и аппаратуры потребителя. Сделаны предложения по использованию математических моделей в качестве основы для дальнейшего совершенствования метода коррекции матрицы ориентации в инерциально-спутниковой навигационной системе аэробаллистических аппаратов.

Ключевые слова: *аэробаллистический аппарат, навигационная система, математическая модель.*

Введение

Постановка проблемы. Точность достижения заданных концевых условий (целей) наведения автоматически управляемыми аэробаллистическими аппаратами (АБА), оснащённых инерциально-спутниковой навигационной системой (ИС НС), в основном определяют погрешности предстартовой выставки бортовых инерциальных измерителей [1, 2].

Для автоматического управления высокоскоростным полётом манёвренного АБА необходимо получать с требуемой точностью и с требуемым тактом обновления навигационную информацию. При этом отмечается, что АБА должен располагать такой степенью манёвренности, чтобы в процессе последующего целенаправленного управляемого полёта компенсировать величины текущих рассогласований фактических и программных значений управляемых параметров движения и обеспечить заданные концевые условия автономного наведения [3]. Для корректного автоматического управления высокоскоростным полётом манёвренного АБА необходимо получать с требуемой точностью и с требуемым тактом T обновления информацию в реальном масштабе времени о значениях составляющих векторов действительных ускорений $\bar{a}[nT]$, скорости $\bar{v}[nT]$, радиус-вектора $\bar{r}[nT]$ центра масс, а также вектора угловой скорости $\bar{\omega}[nT]$ и углов тангажа $\vartheta[nT]$, рысканья $\psi[nT]$ и крена $\phi[nT]$, где n = 1, 2, 3, … – номер такта обновления информации.

Анализ литературы. Проведенный анализ работ [1 – 5], направленных на решение проблем обеспечения высокоточной навигации высокоскоростного маневренного аппарата, позволил сформулировать научные задачи, которые необходимо решить для повышения точности наведения АБА на конечные условия (цели). Так, наиболее перспективным методом повышения точности наведения является усовершенствование метода коррекции матрицы ориентации в инерциально-спутниковой навигационной системе аэробаллистических аппаратов, что предполагает разработку математических моделей бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС) и аппаратуры потребителя (АП) спутниковой радионавигационной системы (СРНС).

Целью данной статьи является разработка математических моделей бесплатформенной инерциальной навигационной системы и аппаратуры потребителя спутниковой радионавигационной системы, модели их комплексирования с целью дальнейшего усовершенствования метода коррекции матрицы ориентации в ИС НС АБА.

Основная часть

Разработка *модели бесплатформенной инерциальной навигационной системы.* БИНС структурно состоит из двух информационно-вычислительных каналов (ИВК).

Один ИВК составляют три равноточных ньютономеров, оси чувствительности которых образуют косоугольную систему координат $\{O_k;\ e_1,\ e_2,\ e_3\}$. В полете АБА бортовые ньютономеры измеряют соответствующие проекции вектора кажущегося ускорения точки O_k. Второй ИВК составляют три датчика угловой скорости (ДУС), закреплённые на корпусе АБА. Оси чувствительности ДУС образуют декартову систему координат, соответствующие оси которой параллельны осям связанной (Св) системы координат (СК). Датчики угловой скорости измеряют текущие значения проекций вектора абсолютной угловой скорости $\bar{\omega}$ на оси Св СК.

Матрица ориентации $A_{I,E}$ определяется соотношением:

$$A_{I,E} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Элементы матрицы ориентации $A_{I,E}$, выраженные через параметры Родрига-Гамильтона, вычисляются по соотношениям [3, 4]:

$$A_{11} = \lambda_0{}^2 + \lambda_1{}^2 - \lambda_2{}^2 - \lambda_3{}^2; \; A_{12} = 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3);$$
$$A_{13} = 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2); \; A_{21} = 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3);$$
$$A_{22} = \lambda_0{}^2 - \lambda_1{}^2 + \lambda_2{}^2 - \lambda_3{}^2; \; A_{23} = 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1);$$
$$A_{31} = 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2); \; A_{32} = 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1);$$
$$A_{33} = \lambda_0{}^2 - \lambda_1{}^2 - \lambda_2{}^2 + \lambda_3{}^2.$$

Параметры Родрига-Гамильтона подчинены условию связи, определяемому свойством нормированности кватерниона вращения:

$$\lambda_0{}^2 + \lambda_1{}^2 + \lambda_2{}^2 + \lambda_3{}^2 = 1. \quad (2)$$

Запишем значения параметров Родрига-Гамильтона, выражая их через углы тангажа ϑ, рысканья ψ, крена γ:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}; \\ \lambda_1 &= \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}; \\ \lambda_2 &= \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}; \\ \lambda_3 &= \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Кинематические уравнения вращательного движения твёрдого тела являются автономными уравнениями, не зависящими от основного уравнения навигации. Эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1\,\omega_x - \lambda_2\,\omega_y - \lambda_3\,\omega_z; \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0\,\omega_x + \lambda_2\,\omega_z - \lambda_3\,\omega_y; \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_0\,\omega_y + \lambda_3\,\omega_x - \lambda_1\,\omega_z; \\ 2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0\,\omega_z + \lambda_1\,\omega_y - \lambda_2\,\omega_x. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение этих уравнений реализуется независимо от основного уравнения навигации, если известно угловое движение Св СК относительно НС СК, на основе измерений датчиков угловой скорости БИНС. Начальные значения $\lambda_i(t_0)$, $i = \overline{0...3}$, параметров Родрига-Гамильтона определяются по начальным значениям $\vartheta(t_0), \psi(t_0), \gamma(t_0)$ углов тангажа, рысканья и крена:

$$\begin{aligned} \vartheta(t_0) &= \vartheta_0 = \vartheta_0^* + \Delta\vartheta_0; \\ \psi(t_0) &= \psi_0 = \psi_0^* + \Delta\psi_0; \\ \gamma(t_0) &= \gamma_0 = \gamma_0^* + \Delta\gamma_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\vartheta_0^*, \psi_0^*, \gamma_0^*$ – программные значения соответствующих углов; $\Delta\vartheta_0, \Delta\psi_0, \Delta\gamma_0$ – погрешности предстартовой ориентации БИНС, обусловленные погрешностями систем прицеливания по направлению и горизонтированию.

При интегрировании кинематических уравнений проводится контроль нормы кватерниона и при значимом отклонении нормы от единицы, $\|\Lambda\| - 1 \geq \varepsilon$, осуществляется коррекция кватерниона по формуле его нормирования:

$$\Lambda^{(n)} = \frac{\Lambda}{\sqrt{\|\Lambda\|}}, \quad \|\Lambda\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2,$$

где $\Lambda^{(n)}$ – нормированный кватернион.

Погрешность δe_I вычисления местоположения r_I, скорости v_I и ускорения a_I в проекциях на оси НС СК зависит от погрешности $\delta A_{I,E}$ вычисления значений составляющих матрицы ориентации и погрешностей δe_E решения основного уравнения навигации:

$$\begin{aligned} &\delta e_I = \delta A_{I,E}\, e_E + A_{I,E}\, \delta e_E; \\ &e_I := \{ r_I, v_I, a_I \}; \quad e_E := \{ r_E, v_E, a_E \}. \end{aligned} \quad (6)$$

Погрешность $\delta A_{I,E}$ зависит от погрешности $\delta\Lambda(t)$ решения кинематических уравнений и определяет точность математического моделирования НС СК на борту АБА и преобразования навигационных параметров в инерциальную СК. Уравнение погрешностей $\delta\Lambda(t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} &\delta\Lambda(t) = \delta\Lambda_0 \circ \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda(t) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\int_{t_0}^{t} \Lambda(\tau) \circ \delta\omega_E \circ \tilde{\Lambda}(\tau)\, d\tau \right) \circ \tilde{\Lambda}_0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\delta\omega_E$ – погрешность измерения вектора угловой скорости, представленная в операторном виде, которая определяется тремя компонентами погрешностей ДУС, оси чувствительности которых расположены в Св СК.

Основное влияние на промах в боковом направлении оказывают погрешности системы прицеливания. Поэтому, значение $\Delta\psi_0^{д}$ максимально допустимой погрешности угла рысканья, характеризующего погрешность выставки измерителей БИНС, можно оценить по формуле сферического прямоугольного треугольника:

$$\Delta\psi_0^{д} = \arcsin\left[\frac{\sin b}{\sin \bar{L}}\right]; \quad b = \frac{3\sigma_{A_0}^{д}}{R_з}; \quad \bar{L} = \frac{L}{R_з}, \quad (8)$$

где $R_з$ – радиус сферической Земли; L – дальность от точки, в которой проводилась выставка измерителей БИНС, и до точки прицеливания.

Таким образом, полученные соотношения (1)–(8) составляют математическую модель БИНС.

Разработка *модели спутниковой навигационной системы*. Невозмущённое кеплерово движение центров масс навигационных космических аппаратов

(НКА) НКА по орбите в геоцентрической (ГЦ) СК описывается системой шести дифференциальных уравнений, аналитическое решение которых представлено в обширной литературе, например в [2, 5]. В аппаратуре потребителя СРНС координаты АБА в ГЦ СК определяются численным расчётом по значениям псевдодальностей (ПД) D_i до НКА. Псевдодальности D_i рассчитываются по временным задержкам T_i сигнала по трассе "i-й НКА – АП" и известной скорости с распространения радиоволн:

$$D_i^1(L_1) = cT_i; \quad D_i^2(L_2) = cT_i, \qquad (9)$$

где D_i^1, D_i^2 – ПД, определённые на частотах L_1, L_2 соответственно.

Проводится компенсация погрешностей, вызванных влиянием тропосферы и ионосферы на распространение радиосигналов вдоль трассы i-й НКА – АП". Тропосферная поправка $\Delta D_{Tr\ i}$ рассчитывается по информации об угле E_i возвышения i-го НКА по соотношению:

$$\Delta D_{Tr\ i} = 8,8 \operatorname{cosec} E_i. \qquad (10)$$

В двухчастотной АП погрешности $\Delta D_{Ion\ i}$ ПД, обусловленные особенностями распространения радиосигналов в ионосфере, вычисляются по формуле $\Delta D_{Ion\ i} = k/f^2$, где f – несущая частота. В одночастотной аппаратуре эти погрешности вычисляются по модели Клобучара: $\Delta D_{Ion\ i} = cT_{Ion\ i}$.

Для получения наилучшей оценки ПД используется соотношения:

$$\tilde{D}_i = \frac{\tilde{D}_i^1 - \gamma \tilde{D}_i^2}{1-\gamma}; \ \gamma = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 = \left(\frac{7}{9}\right)^2; \ \tilde{D}_i^1 = D_i^1 + \Delta D_{Tri}, \qquad (11)$$

где f_1, f_2 – частоты сигналов диапазонов L_1, L_2 соответственно.

Связь между ПД и декартовыми координатами АП устанавливается в виде:

$$\tilde{D}_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2} + c\,\delta T + \delta D_i, \qquad (12)$$

где i = 1, 2, …, $N_{НКА}$, x, y, z – декартовы координаты АП в ГЦ СК; x_i, y_i, z_i – декартовы координаты i-го НКА, которые определяются в ГЦ СК из навигационного сообщения; δT – расхождение шкал времени НКА и АП, одинаковое для всех НКА; δD_i – погрешность определения ПД; $N_{НКА}$ – количество НКА, по сигналам которых определены ПД.

Решается переопределённая система уравнений, число которых больше 4-х. При этом используется итеративный метод взвешенных наименьших квадратов, когда ищется решение на основе :

$$\eta_k = \eta_{k-1} + \left(H_{ГМ}^T R_D^{-1} H_{ГМ}\right)^{-1} H_{ГМ}^T R_D^{-1}\left(D_u - D_{k-1}\right); \qquad (13)$$

$$\eta^T = [x,\ y, z, \delta T];\ D_u = \left[D_{1\,u}, ..., D_{i\,u}, D_{N\,u}\right]^T; \qquad (14)$$

где D_{k-1} – оценка D_u; $H_{ГМ}$ – матрица, образованная частными производными $\delta D/\delta\eta$; R_D – ковариационная матрица шумов измерений D_u или весовая матрица, используемая для обработки неравноточных измерений. Составляющие вектора скорости центра масс в ГЦ СК оцениваются по измерениям доплеровских сдвигов несущих частот сигналов НКА, вызываемых относительным движением АБА и НКА. Таким образом, рассчитанные выражения (9)–(14) формируют математическую модель спутниковой навигационной системы.

Разработка *модели комплексирования АП СРНС и БИНС*. Выходная информация каналов поступает в БЦУ ВК, реализующий навигационный фильтр (НФ), который на основе формирования разностей решает задачу фильтрации погрешностей одного ИВК на фоне погрешностей другого ИВК. В задачи НФ входят: оценки погрешностей и источников погрешностей измерений; прогнозирование значений этих оценок; компенсация погрешностей и оценка навигационных параметров.

Предположим, что наблюдаемый процесс $z(q,\ t)$ является результатом нелинейного преобразования параметров состояния $q(t)$ при шуме $\eta(t)$:

$$z(q,\ t) = h(q,\ k_z, \eta, t); \qquad (15)$$

$$z(q,\ t) \in \Omega_{zэ} \subset \Omega_z;\ \ k_z \in \Omega_k;\ \ \eta = \eta(t) \in \Omega_{\eta э} \subset \Omega_\eta,$$

где h(…) – известная функция указанных аргументов; k_z – вектор конструктивных параметров наблюдателя размерности $\dim(k_z) = n_{kz}$; η(t) – случайная функция с известными статистическими характеристиками; $\Omega_{Zэ}$, $\Omega_{\eta э}$ – эксплуатационные области наблюдений и возмущений; Ω_z, Ω_η – области наблюдений и возмущений.

Начальные условия управляемых АБА определяются соотношением:

$$q(t_0) = q_0,\ q_0 \in \Omega_{q_0}, \qquad (16)$$

где Ω_{q_0} – области возможных начальных состояний объектов управления.

Предположим, что все погрешности и источники погрешностей измерений БИНС и АП СРНС объединены в общий вектор ξ, для которого известно разностное векторно-матричное уравнение:

$$\xi[nT] = F[nT]\xi[(n-1)T] + \eta[nT], \qquad (17)$$

где F[nT] – переходная (фундаментальная) матрица соответствующего дифференциального уравнения; η[nT] – вектор белых шумов. Запись [nT] обозначает соответствие переменных и матриц дискретному моменту времени nT. Положим, что все погрешности имеют гауссовский характер и имеют нулевое математическое ожидание.

Измерения БИНС $z_1(q,\ t)$ запишем в виде:

$$z_1(q,\ nT) = z_1^0(q,\ nT) + M_1[nT]\xi_1[nT], \qquad (18)$$

где $M_1[nT]$ – соответствующая матрица.

Измерения АП СРНС запишем в виде:

$$z_2(q,\ nT) = F\left(z_2^0[q,\ nT]\right) + M_2[nT]\xi_2[nT] + \eta_2[nT], \quad (19)$$

где $M_2[nT]$ – соответствующая матрица.

Задача оптимальной оценки q[nT] рассматривается как задача оценки погрешностей $\xi[nT]$ по измерениям $z_1(q,\ nT)$, $z_2(q,\ nT)$ в дискретные моменты времени nT (n = 1, 2, …, n_k).

Наилучшая в смысле максимума апостериорной плотности вероятностей оценка погрешностей получается на основе алгоритмов нелинейной оптимальной последовательной фильтрации 1-го порядка:

$$\hat{\xi}_k = \hat{\xi}_{k/(k-1)} + G_k\left(z_{2k} - z_{2k/(k-1)}\right);$$

$$\hat{\xi}_{k/(k-1)} = F_k\,\hat{\xi}_{k-1};\quad P_{k/(k-1)} = F_k P_{(k-1)} F_k^T + Q_k;$$

$$G_k = P_{k/(k-1)} H_k^T \left(H_k P_{k/(k-1)} H_k^T + R_k\right)^{-1};$$

$$P_k = P_{k/(k-1)} - G_k H_k P_{k/(k-1)};$$

$$H_k = \left.\frac{\partial h_k}{\partial \xi_k}\right|_{\xi_k = \xi_{k/(k-1)}};$$

$$h_k = F\left(z_1 - M_{1k}\xi_k\right) + M_{2k}\xi_k;$$

$$\hat{z}_{2k/(k-1)} = F\left(z_1 - M_{1k}\,\hat{\xi}_{k/(k-1)}\right) + M_{2k}\,\hat{\xi}_{k/(k-1)}.$$

Прогнозирование на время (n+1)T оценок погрешностей в НФ на основе моделей погрешностей, которые определяют точность прогнозирования оценок погрешностей, а с ней и точность определения навигационных параметров, осуществляется на основе линейного соотношения:

$$\hat{\xi}_{k+1} = F\left([n+1)T,\ nT\right)\hat{\xi}_k. \quad (20)$$

Коррекция показаний НФ осуществляется на основе соотношения:

$$\hat{q}[(n+1)T] = q[(n+1)T] - M_1[(n+1)T]\ \hat{\xi}[(n+1)T]. \quad (21)$$

Точность прогноза характеризуется ковариационной матрицей:

$$P\left\{\left[(n+1)T\right]/\left[nT\right]\right\} = F\left\{(n+1)T,\ nT\right\}P_k \times \times F\left\{(n+1)T,\ nT\right\}^T + Q\left\{(n+1)T,\ nT\right\}. \quad (22)$$

Таким образом, полученные соотношения (15) – (22) составляют модель комплексирования АП СРНС и БИНС.

Выводы

В статье разработаны математические модели БИНС и АП СРНС, модель их комплексирования. Предложенные математические модели являются основой для дальнейшего усовершенствования метода коррекции матрицы ориентации в инерциально-спутниковой навигационной системе аэробаллистических аппаратов. В качестве основы для проведения контроля и коррекции матрицы ориентации в полёте предлагается использовать методы инвариантного контроля и коррекции и векторного согласования. Суть метода векторного согласования заключается в согласовании вычисленных по сигналам БИНС значений проекций вектора действительной скорости и радиус-вектора на оси Св СК с соответствующими значениями проекций этих же векторов на оси НС СК, но вычисленными по сигналам от АП СРНС.

Список литературы

1. Основы теории систем управления высокоточных ракетных комплексов Сухопутных войск / Б.Г. Гурский, М.А. Лющанов, Э.П. Спирин / Под ред. В.Л. Солунина. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 328 с.

2. Системы управления летательными аппаратами (баллистическими ракетами и их головными частями) / Г.Н. Разорёнов, Э.А. Бахрамов, Ю.Ф. Титов / Под ред. Г.Н. Разорёнова. – М.: Машиностроение, 2003. – 584 с.

3. Соловьев Ю.А. Системы спутниковой навигации / Ю.А. Соловьев. – М.: Эко-Трендз, 2000. – 310 с.

4. Глобальная спутниковая радионавигационная система ГЛОНАСС / Под ред. В.Н. Харисова, А.И. Перова, В.А. Болдина. – М.: ИПРЖР, 1998. – 256 с.

5. Липкин И.А. Спутниковые навигационные системы / И.А. Липкин. – М.: Вузовская книга, 2001. – 278 с.

Поступила в редколлегию 3.04.2013

Рецензент: д-р техн. наук проф. А.М. Сотников, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ БЕЗПЛАТФОРМЕННОЇ ІНЕРЦІЙНОЇ НАВІГАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ І АПАРАТУРИ СПОЖИВАЧА СУПУТНИКОВОЇ НАВІГАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ АЕРОБАЛІСТИЧНОГО АПАРАТУ

С.М. Власик, С.В. Герасимов, О.О. Журавльов

Розроблені математичні моделі безплатформенної інерційної навігаційної системи і апаратури споживача супутникової радіонавігаційної системи, модель комплексування навігаційної системи і апаратури споживача. Зроблені пропозиції по використанню математичних моделей як основи для подальшого вдосконалення методу корекції матриці орієнтації в інерційно-супутниковій навігаційній системі аеробалістичних апаратів.

Ключові слова: *аеробалістичний апарат, навігаційна система, математична модель.*

MATHEMATICAL MODEL OF INERCIAL NAVIGATIONAL SYSTEMS WITHOUT A PLATFORM AND APPARATUS OF USER OF SATELLITE NAVIGATIONAL OF AEROBALLISTIC VEHICLE

S.N. Vlasik, S.V. Gerasimov, A.A. Zhuravlev

The mathematical models of inertial navigational systems without a platform and apparatus of user of the satellite radio navigational system, model of complex of navigational and apparatus of user, are developed. done suggestion on the use of mathematical models as basis for further perfection of method of correction of matrix of orientation in the inertial satellite of aero ballistic vehicles.

Keywords: *aero ballistic vehicle, navigational, mathematical model.*