УДК 629.78

І.А. Кухарський

Військова частина А0515, Київ

РОЗВ'ЯЗАННЯ БАЛІСТИЧНИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВІ ЗМІЩЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Пропонується неявна обчислювальна схема інтегрування диференційних рівнянь балістичного руху космічного апарату на основі зміщених диференціальних перетворень з використанням ступеневих функцій. Запропонована схема враховує особливості диференційних рівнянь балістичного руху космічного апарату, що дозволяє ефективно використовувати її на практиці.

Ключові слова: *балістичний рух, космічні апарати, диференціальні перетворення.*

Вступ

Загальна постановка проблеми і аналіз літератури. Одним з перспективних підходів для розв'язку балістичних задач для космічних апаратів (КА) є метод диференціальних перетворень [1]. Використання даного методу дозволяє розробляти обчислювальні схеми інтегрування які, у порівнянні з традиційними для задач балістики числовими методами Адамса та Рунге-Кутта, мають покращені обчислювальні характеристики [1].

Аналіз останніх досліджень. Зміщені диференціальні перетворення є найсучаснішим, і тому ще недостатньо розповсюдженим, видом диференціальних перетворень [1]. Однією з останніх розробок щодо їх застосування, для рішення практичних задач є використання при операції відновлення, замість відрізку ряду Тейлора, ступеневих функцій із заданими коефіцієнтами [2]. Такий підхід дозволяє досягти значного зменшення похибки апроксимації (нев'язкі) результуючого обчислювального алгоритму на дійсному розв'язку диференційного рівняння і, відповідно, отримати покращені обчислювальні характеристики результуючої обчислювальної схеми [2]. Але у відомій літературі не наведено досліджень щодо застосування даного підходу до розв'язку балістичних задач.

Формулювання мети статті. До специфіки зміщених диференційних перетворень відноситься процедура визначення параметрів руху КА при реалізації припасовування (перехід з поточного вузла обчислювальної сітки у наступний вузол) [1, 4]. При складній правій частині рівняння балістичного руху КА таке визначення можливо провести тільки шляхом розв'язання нелінійного рівняння. Таким чином, виникає завдання розрахунку у наступній точці початкового наближення значень параметрів руху КА та вибору ітераційного методу розв'язку нелінійних рівнянь для остаточного визначення цих параметрів. Обгрунтований вибір ітераційного методу можливий тільки якщо врахувати математичні особливості балістичного руху КА.

Виходячи із вищевикладеного, **метою** статті є отримання обчислювального алгоритму інтегрування диференціальних рівнянь балістичного руху КА зміщеними диференціальними перетвореннями на основі ступеневих функцій, які враховують математичні особливості цих рівнянь.

Викладення основного матеріалу

Диференційне рівняння руху космічного апарату має вигляд [3]:

$$\frac{dq}{dt} = f(q, t), \text{ при } q_0 = q(t_0), \qquad (1)$$

де q – вектор параметрів балістичного руху КА; f – безперервна і безперервно-диференційована за w вектор-функція; t – незалежна змінна, за якою проводиться інтегрування; q_0 – вектор початкових умов балістичного руху КА; t_0 – початкове значення незалежної змінної.

Диференціально-тейлорівськи перетворення – це функціональні перетворення вигляду [4]:

$$Z(k)_{t^*} = \frac{H^k}{k!} \frac{d^k[z(t)]}{dt^k}\bigg|_{t^*}, \qquad (2)$$

$$z(t) = \sum_{k=0}^{k_{max}} \frac{t - t^*}{H} Z(k), \qquad (3)$$

де $Z(k)$ – диференціальний спектр, набір дискрет чи зображення $z(t)$; k – цілочисловий аргумент (номер дискрети) диференціального спектру, $k = 0, 1, \ldots$; t^* – значення аргументу, при якому визначається диференціальний спектр; H – відрізок аргументу t, на якому розглядається функція $z(t)$ і який не може перевищувати значення радіуса збіжності ряду Тейлора для $z(t)$ у точці t^*; k_{max} – максимальний номер дискрети, що приймає участь у відновленні. Вираз (2) визначає пряме перетворення, а (3) обернене. Множину значень $Z(k)$ прийнято називати Т-спектром, а значення функції $Z(k)$ при конкретних значеннях аргументу k – дискретами Т-спектра [4].

Обчислювальна схема інтегрування диференційних рівнянь балістичного руху КА зміщеними диференціальними перетвореннями записується як [1]:

$$w_t = (t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots), \quad H_n = t_{n+1} - t_n, \tag{4}$$

$$Q_n(0) = Q(0)_{t_n} = q_n, \quad T_n(k) = \begin{cases} t_n, \text{ при } k = 0 \\ H_n, \text{ при } k = 1 \\ 0, \text{ при } k \ge 1 \end{cases}, \tag{5}$$

$$Q_n(k+1) = \frac{H_n}{k+1} F[Q_n(k), T_n(k)], \tag{6}$$

для $k = 0, \ldots, k_{max} - 1$

$$Q_{n+1}(k+1) = \frac{H_n}{k+1} F[Q_{n+1}(k), T_n(k)], \tag{7}$$

для $k = 0, \ldots, k_{max} - 1$

$$q_{n+1,(s=0)} = \sum_{k=0}^{k_{max}} Q_n(k), \tag{8}$$

$$q_{n+1,(s+1)} = \sum_{k=0}^{k_{max}} \left(\frac{1}{2}\right)^k Q_n(k) - \sum_{k=1}^{k_{max}} \left(-\frac{1}{2}\right)^k Q_{n+1,(s)}(k), \tag{9}$$

де w_t – обчислювальна сітка за незалежною змінною t, на якій проводиться ітераційний числовий розв'язок (1); H_n – крок обчислювальної сітки w_t; $T_n(k)$ – диференціальний спектр незалежної змінної t; $Q_n(k)$ – прямий диференціальний спектр вектора параметрів руху КА; $Q_{n+1}(k)$ – зміщений диференціальний спектр вектора параметрів руху КА; $F[Q_{n,n+1}(k), T_{n,n+1}(k)]$ – переведена в область зображень права частина (1); s – індекс за методом простої ітерації.

Формули (4) – (9) дозволяють отримати значення вектора параметрів балістичного руху КА – q у будь-який необхідній точці w_t, починаючи з початкового значення q_0. У (9) для розв'язку нелінійного рівняння при проведенні припасовування, використаний метод простої ітерації [1, 4], для якого початкове наближення розраховується за явною диференціалдьно-тейлорівською схемою (8). Причому, можливість його використання щодо результуючої збіжності визначається виходячи з умови:

$$\left| -\frac{H_n}{2} \frac{\partial f(q^*_{n+1}, t_{n+1})}{\partial q_{n+1}} + \sum_{k=2}^{k_{max}} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{H_n^k}{k!} \frac{\partial^k f(q^*_{n+1}, t_{n+1})}{\partial q_{n+1} \partial t^{k-1}} \right| < 1, \tag{10}$$

де q^*_{n+1} – корінь рівняння (9).

Запишемо на сітці w_t обчислювальну схему інтегрування диференційних рівнянь балістичного руху КА зміщеними диференціальними перетвореннями на основі ступеневих функцій [1, 2]:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k Q_{n+1}(k) = \sum_{k=0}^{r} b_k Q_n(k) \tag{11}$$

де a_k, b_k – коефіцієнти які визначаються у вигляді

$$a_k = (-1)^k \frac{(r+m-k)!}{(r+m)!} \frac{m!}{(m-k)!}, \text{ при } k = 0, \cdots, m,$$

$$b_k = \frac{(r+m-k)!}{(r+m)!} \frac{r!}{(r-k)!}, \text{ при } k = 0, \cdots, r;$$

m, r – максимальні номери дискрети, що враховуються при відновленні в основному і зміщеному Т-спектрах відповідно. У [2] для реалізації (11) щодо рішення нелінійного рівняння пропонується використовувати залежність

$$\left(y_{n+1,(i+1)} - y_{n+1(i)}\right) \sum_{k=0}^{m_1} a_k \, \delta Q_{n+1,(i)}(k) = \sum_{k=0}^{r} b_k Q_n(k) - \sum_{k=0}^{m} a_k Q_{n+1,(i)}(k) \tag{12}$$

де i – індекс, для проведення ітерацій; m_1 – максимальний номер Т-дискрети, що враховується в Т-спектрі матриці Якобі; $\delta Q_{n+1}(k) = \dfrac{\partial Q_{n+1}(k)}{\partial q_{n+1}}$ – Т-спектр матриці Якобі.

Безпосереднє використання (12) до розв'язку (11) вимагає завдання значення m_1; при $m_1 = m$ – метод Ньютона; при $m_1 < m$ – квазіньютоніський метод; при $m_1 = 0$ метод простої ітерації (с точки зору методичної простоти розробки обчислювальної схеми є найкращім варіантом). Реалізація наведеного, буде мати такі особливості:

по-перше, чим більше задається значення m_1, тим більшою буде результуюча обчислювальна складність обчислювальної схеми інтегрування (1), таким чином необхідно зменшувати m_1;

по-друге, зміна m_1 буде впливати на збіжність результуючої обчислювальної схеми, таким чином зменшення даного параметру може бути не можливою.

Виходячи із зазначеного проведемо визначимо умови збіжності саме методу простої ітерації. Для цього покладемо в (12) $m_1 = 0$, яке з врахуванням того, що $a_k = 1$ запишеться у вигляді

$$q_{n+1,(i+1)} = q_{n+1(i)} + \sum_{k=0}^{r} b_k Q_n(k) - Q_{n+1,(i)}(0) - \sum_{k=1}^{m} a_k Q_{n+1,(i)}(k).$$

З врахуванням прямого перетворення (2);

$$q_{n+1,(i+1)} = \sum_{k=0}^{r} b_k Q_n(k) - \sum_{k=1}^{m} a_k \frac{H_n^k}{k!} Q_{n+1,(i)}(k). \tag{13}$$

Залежність (13) буде збігатися, якщо із необхідною точністю визначене початкове наближення $q_{n+1,(0)}$ та виконується умова [4]:

$$\left| \frac{\partial}{\partial q_{n+1}} \left[\sum_{k=0}^{r} b_k Q_n(k) - \sum_{k=1}^{m} a_k \frac{H_n^k}{k!} Q_{n+1,(i)}(k) \right]_{q^*_{n+1}} \right| < 1;$$

$$\left|\frac{\partial^k f\left(q_{n+1,(i)}, t_{n+1}\right)}{\partial q_{n+1}} + \sum_{k=1}^{m} a_k \frac{H_n^k}{k!} \frac{\partial^k f\left(q_{n+1,(i)}, t_{n+1}\right)}{\partial q_{n+1} \partial t^{k-1}}\right| < 1. \quad (14)$$

Залежність (14) подібна до залежності, що визначає умови збіжності для традиційного, широко апробованого у практиці балістичних розрахунків методу Адамса 7-го порядку [3] та перевіреної у [1] обчислювальної схеми на основі зміщених диференціальних перетворень. При чому можливість використання у перерахованих обчислювальних схемах, саме методу простої ітерації, спирається на математичні особливості балістичного руху КА, тобто математичні особливості (1). Виходячи із зазначеного, можна стверджувати, що (14) буде виконуватися.

Таким чином, для розв'язання балістичних задач у постановці (1) обчислювальна схема інтегрування зміщеними диференціальними перетвореннями на основі ступеневих функцій:

$$w_t = \left(t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots\right), H_n = t_{n+1} - t_n; \quad (15)$$

$$Q_n(0) = Q(0)_{t_n} = q_n, \; T_n(k) = \begin{cases} t_n, \text{при } k = 0 \\ H_n, \text{при } k = 1 \\ 0, \text{при } k \ge 1 \end{cases}; \quad (16)$$

$$Q_n(k+1) = \frac{H_n}{k+1} F\left[Q_n(k), T_n(k)\right], \quad \text{для } k = 0, \ldots, k_{max} - 1; \quad (17)$$

$$Q_{n+1}(k+1) = \frac{H_n}{k+1} F\left[Q_{n+1}(k), T_n(k)\right], \quad \text{для } k = 0, \ldots, k_{max} - 1; \quad (18)$$

$$a_k = (-1)^k \frac{(r+m-k)!}{(r+m)!} \frac{m!}{(m-k)!}, \text{ при } k = 0, \cdots, m; \quad (19)$$

$$b_k = \frac{(r+m-k)!}{(r+m)!} \frac{r!}{(r-k)!}, \text{ при } k = 0, \cdots, r; \quad (20)$$

$$q_{n+1,(s=0)} = \sum_{k=0}^{k_{max}} Q_n(k); \quad (21)$$

$$q_{n+1,(s+1)} = \sum_{k=0}^{r} b_k Q_n(k) - \sum_{k=1}^{m} a_k \frac{H_n^k}{k!} Q_{n+1,(s)}(k); \quad (22)$$

Формули (15) – (22) дозволяють отримати значення вектора параметрів балістичного руху КА – q у будь-який необхідній точці w_t, починаючи з початкового значення q_0. При чому в залежності (22) враховані математичні особливості балістичного руху КА, що дало змогу для реалізації неявної обчислювальної схеми застосувати метод простої ітерації.

Було проведено моделювання прогнозування збуреного балістичного руху КА з врахуванням моделі гравітаційного поля Землі 8×8 та статичної атмосфери. В якості диференційних рівнянь руху КА (1) розглядались системи, записані в гринвіцький прямокутній системі координат. Подана обчислювальна схема дала задовільну точність під час використання двох ітерацій за s.

Висновки

У статті наведено формули, які складають обчислювальну схему інтегрування диференційних рівнянь балістичного руху КА на основі зміщених диференціальних перетворень з використанням ступеневих функцій. У наведеній схемі враховано математичні особливості диференційних рівнянь балістичного руху КА, що дозволило довести можливість використання методу простої ітерації для розв'язання нелінійного рівняння "неявної" обчислювальної схеми.

Список літератури

1. *Ковбасюк С.В. Застосування зміщених диференціальних перетворень для розв'язку балістичних задач / С.В Ковбасюк, М.Ю. Ракушев // Вісник ЖДТУ. Технічні науки. – Житомир: ЖДТУ, 2006. – № 39 (4). – С. 127 – 132.*
2. *Ракушев М.Ю. Варіант неявної схеми числового інтегрування на основі зміщених диференціальних перетворень / М.Ю. Ракушев // Вісник НАУ. – К.: НАУ, 2011. – № 4 (49). С. 175-181.*
3. *Мамон В.А. Баллистическое обеспечение космических польотов / В.А. Мамон, В.И. Половников, С.К. Следзинский. – Л.: ВИКК им. Можайского А.Ф., 1990. – 224 с.*
4. *Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов/ Г.Е. Пухов. – К.: Наукова думка, 1986. – 159 с.*
5. *Самарский А.А. Численные методы: Учеб. пос. / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука. 1989. – 432 с.*

Поступила в редколлегию 5.04.2013

Рецензент: д-р техн. наук проф. В.Д. Карлов, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

РЕШЕНИЕ БАЛЛИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ СМЕЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

И.А. Кухарский

Предлагается неявная вычислительная схема интегрирования дифференциальных уравнений баллистического движения космического аппарата на основе смещенных дифференциальных преобразований с использованием степенных функций. Предложенная схема учитывает особенности дифференциальных уравнений баллистического движения космического аппарата, что позволяет эффективно использовать ее на практике.

Ключевые слова: *баллистическое движение, космические аппараты, дифференциальные преобразования.*

DECISION OF BALLISTIC TASKS ON BASIS OF THE DISPLACED DIFFERENTIAL TRANSFORMATIONS

I.A. Kuharsky

The non-obvious calculable chart integration of differential equalizations of ballistic motion space vehicle is offered on the basis of the displaced differential transformations using sedate functions. The offered chart takes into account the features of differential equalizations of ballistic motion of space vehicle, that allows effectively to use it in practice.

Keywords: *ballistic motion, space vehicles, differential transformations.*