УДК 510.6:519.766.2

С.Ю. Леонов

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

К-ЗНАЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ НАПРАВЛЕНИЯ

В статье рассматриваются вопросы моделирования сложных быстродействующих вычислительных систем с учетом направления и формы переключения K-значных сигналов на выходах отдельных логических элементов. Такое моделирование основано на использовании K-значного дифференциального исчисления и анализе направления изменения K-значной производной.

Ключевые слова: *моделирование, быстродействующие вычислительные системы, K-значные сигналы, K-значное дифференциальное исчисление.*

Введение

Анализ литературы и постановка задачи. Проектирование современных реальных вычислительных систем представляет собой процесс проектирования комплекса взаимосвязанных элементов, представляющих собой структурно сложную систему. При этом элементы такой системы работают на достаточно больших частотах, когда время срабатывания отдельных компонент сравнимо с периодом сигналов тактовой частоты. Для описания таких объектов уже оказывается недостаточным использование математических описаний с помощью бинарных математических моделей для стационарных состояний.

Важным в этом случае оказывается также анализ значимости влияния отдельных элементов на работоспособность всей такой системы. Анализ значимости элементов системы используется при ее проектировании, диагностике и оптимизации [1]. Одним из подходов, используемых при анализе значимости, является использование математического аппарата булевого дифференциального исчисления, позволяющего с единых методологических позиций рассмотреть существующие оценки значимости элементов системы [2 – 4]. Булева производная функции принимает единичное значение на наборах переменных $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, для которых любое изменение переменной x_i обуславливает изменение значений функции. Однако данный тип производных не учитывает направление изменений функции (с "0" на "1" или наоборот). Дальнейшее развитие булевого дифференциального исчисления получило в использовании направленных булевых производных [5]. Эти производные позволяют определить наборы переменных, которые при заданном направлении изменения i-й переменной приводят к заданному изменению значения функции.

Считается, что если аргумент и булева или K-значная производная имеют одно направление изменения (или одновременно возрастают, или одновременно убывают), то такая производная считается однонаправленной, а если аргумент и функция имеют противоположные направления изменения, то такая производная считается разнонаправленной.

С точки зрения анализа работоспособности системы направленная булева производная позволяет определить состояния системы, для которых изменение состояния i-го элемента с a на $\neg a$ обуславливает изменение состояния системы с j_1 на j_2. Отказ или восстановление i-го элемента обуславливает соответственно отказ или восстановление всей системы.

Однако для исследования работоспособности современных быстродействующих устройств необходимо учитывать не только направление изменения сигналов логических элементов, но и форму переходного процесса из одного устойчивого состояния в другое. Для такого исследования предлагается использовать не булевы, а K-значные направленные производные [6, 7].

Цель статьи: предлагается использование направленных K-значных производных при моделировании быстродействующих вычислительных систем на основе математического аппарата K-значного дифференциального исчисления.

Основная часть

K-значный вектор $x = (x_1, ..., x_m)$, т.е. вектор, компоненты которого принимают значения из множества $G = \{0, 1, 2, \ldots, K - 1\}$, и его K-значный дифференциал $dx = (dx_1, ..., dx_m)$ порождают пространство $M^m \times dM^m$ и соответствующие графы [6]. Одни ребра некоторого подобного графа соединяют вершины, в которых рассматриваемая функция имеет одинаковые значения, другие – в которых функция отличается на единицу, два, ... , K–1. В ряде случаев необходимо выделять ребра графов, удовлетворяющие определенным требованиям. Это можно сделать с помощью направленных дифференциальных операторов, которые описывают не только факт изменения, но и величину и (или) направление изменения значения функции. Эти дифференциальные операторы могут быть введены различными способами.

По аналогии с работой [3] используем K-значные дифференциальные уравнения для исследования пространства K-значных функций. Для этого поставим в соответствие каждой K-значной функции $F: M^m \to M$ функцию $f: M^m \times dM^m \to M$.

Определение 1. K-значными дифференциальными операторами $f_i(x_1, ..., x_m, dx_1, ..., dx_m)$, $i = 1, 2, ...$ называются отображения дискретного пространства K-значных функций над M^m в пространство K-значных функций над $M^m \times dM^m$.

Определение 2. Пусть $F(x_1, ..., x_m) = F(x)$ – K-значная функция m переменных, тогда полным K-значным дифференциалом d_xF этой функции называется разность

$$d_xF = F(x \langle+\rangle_K\ dx) \langle-\rangle_K\ F(x) =$$
$$= F(x_1 \langle+\rangle_K\ dx_1, ..., x_m \langle+\rangle\ dx_m) \langle-\rangle_K\ F(x_1, ..., x_m), \quad (1)$$

где $\langle+\rangle_K$, $\langle-\rangle_K$ – операции сложения и вычитания по модулю K.

Разность (1) может иметь K различных значений: 0, 1, ..., K–1. Каждому из этих значений соответствует свое дифференциальное уравнение

$$d_xF = q, \quad q = \overline{0, K-1}.$$

Каждому такому уравнению может быть поставлен в соответствие граф $g_q(F)$. Совокупность K графов $g_q(F)$ образует полный граф, где g_q – подграф содержит только ребра между вершинами, которым соответствуют значения функций, отличающиеся на q ($q = \overline{0, K-1}$). При q = 0 в пространстве M^m определяются направления или наборы переменных, которые обеспечивают постоянство функций, а при q = K – 1 – направления или наборы, которые определяют наибольшие изменения функции.

Полный K-значный дифференциал можно рассматривать и как результат последовательного изменения отдельных переменных или их групп, когда другие переменные остаются постоянными. Это приводит к понятию частного дифференциала.

Определение 3. Пусть $F(x_1, ..., x_i, x_{i+1}, ..., x_k) = F(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ – K-значная функция m переменных, $\overline{x}_1 = (x_1, \ldots, x_i)$, $\overline{x}_2 = (x_{i+1}, \ldots, x_k)$. Тогда частным K-значным дифференциалом $dF_{\overline{x}_1}$ по переменным $x_1, ..., x_i$ называется соотношение

$$dF_{\overline{x}_1} = d_xF\big|_{d\overline{x}_2 = 0},$$

где $d\overline{x}_2 = (dx_{i+1}, ..., dx_k)$.

В случае, когда i = 1, частный K-значный дифференциал назовем простым K-значным частным дифференциалом.

Можно исходить из определения полного и частного дифференциалов для K-значной функции $F_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, т.е. функции, принимающей значения из множества G, и зависящей от аргументов, также принимающих значения из множества G.

Определение 4. Направленным K-значным оператором $F^{ab}_{\overline{x}_1}(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, $\overline{x}_1 \subseteq x$, $\overline{x}_2$ = const, функции $F_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, принимающей соответственно в начальной и конечной точках значения $a, b \in M$, называется оператор, определяемый уравнением

$$F^{ab}_{\overline{x}_1}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) =$$
$$= F(\overline{x}_1 \langle+\rangle_K\ d\overline{x}_1, \overline{x}_2) \langle-\rangle_K\ F(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = b \langle-\rangle_K\ a. \quad (2)$$

Этому оператору соответствует граф, имеющий все те ребра между вершинами (точками) x и $x \langle+\rangle_K\ dx$, для которых выполняется $F(x) = a$, $F(x \langle+\rangle_K\ dx) = b$.

Пример 1. Рассмотрим функцию $F(x) = F(x_1, x_2) = x_1 \langle+\rangle_K x_2$ при M = {0, 1, 2} и a = 0, b = 2.

Построим таблицы значений для левой и правой частей уравнения

$$F(x_1 \langle+\rangle_K\ dx_1, x_2 \langle+\rangle_K\ dx_2) = b \langle-\rangle_K\ a \langle+\rangle_K\ F(x_1, x_2)$$

или уравнения

$$x_1 \langle+\rangle_K\ x_2 \langle+\rangle_K\ dx_1 \langle+\rangle_K\ dx_2 = 2 \langle+\rangle_K\ x_1 \langle+\rangle_K\ x_2.$$

$$f_1 = x_1 \langle+\rangle_K\ x_2 \langle+\rangle_K\ dx_1 \langle+\rangle_K\ dx_2$$

dx_1	dx_2									
0	0	0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	1	1	2	0	2	0	1	0	1	2
0	2	2	0	1	0	1	2	1	2	0
1	0	1	2	0	2	0	1	0	1	2
1	1	2	0	1	0	1	2	1	2	0
1	2	0	1	2	1	2	0	2	0	1
2	0	2	0	1	0	1	2	1	2	0
2	1	0	1	2	1	2	0	2	0	1
2	2	1	2	0	2	0	1	0	1	2
	x_2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
	x_1	0	0	0	1	1	1	2	2	2

$$f_2 = 2 \langle+\rangle_K\ x_1 \langle+\rangle_K\ x_2$$

dx_1	dx_2									
0	0	2	0	1	0	1	2	1	2	0
0	1	2	0	1	0	1	2	1	2	0
0	2	2	0	1	0	1	2	1	2	0
1	0	2	0	1	0	1	2	1	2	0
1	1	2	0	1	0	1	2	1	2	0
1	2	2	0	1	0	1	2	1	2	0
2	0	2	0	1	0	1	2	1	2	0
2	1	2	0	1	0	1	2	1	2	0
2	2	2	0	1	0	1	2	1	2	0
	x_2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
	x_1	0	0	0	1	1	1	2	2	2

Множество решений рассматриваемого трехзначного дифференциального уравнения, удовлетворяющего условию $F(x_1, x_2) = 0$, содержит 9 элементов, приведенных в табл. 1.

Таблица 1

Множество решений

x_1	x_2	$F(x_1, x_2)$	dx_1	dx_2	$x_1\langle+\rangle_K dx_1$	$x_1\langle+\rangle_K dx_2$
0	0	0	0	2	0	2
0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	2	0	2	0
1	2	0	0	2	1	1
1	2	0	1	1	2	0
1	2	0	2	0	0	2
2	1	0	0	2	2	0
2	1	0	1	1	0	2
2	1	0	2	0	1	1

Граф, адекватный табл. 1 и содержащий все ребра, начинающиеся в вершинах, которым соответствуют значения функций, равные нулю, и оканчивающиеся в вершинах, которым соответствуют значения функций, равные двум, приведен на рис. 1.

Введем дифференциальные уравнения, определяющие направления монотонного изменения функции $F(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = F(x_1, ..., x_i, x_{i+1}, ..., x_m)$ относительно своего подвектора $\overline{x}_1 = (x_1, ..., x_i)$.

Определение 4. K-значная функция $F(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ называется монотонно возрастающей относительно K-значного вектора $\overline{x}_1$, если одновременно выполняются условия

$$(x_1 \langle+\rangle_K dx_1, ..., x_i \langle+\rangle_K dx_i) \geq (x_1, ..., x_i), \qquad (3)$$

$$F(x_1 \langle+\rangle_K dx_1, ..., x_i \langle+\rangle_K dx_i, x_{i+1}, ..., x_m) \geq$$
$$\geq F(x_1, ..., x_i, ..., x_m), \qquad (4)$$

и монотонно убывающей, если одновременно имеют место соотношения (3) и (4):

$$F(x_1, ..., x_i, ..., x_m) \geq$$
$$F(x_1 \langle+\rangle dx_1, ..., x_i \langle+\rangle_K dx_i, x_{i+1}, ..., x_m). \qquad (5)$$

Неравенство $x_j \leq x_j \langle+\rangle_K dx_j$ может выполняться при условиях, следующих из табл. 2.

Таблица 2

Перечень условий

x_j	0	0	0	...	0	0	1	1	1	...	1	1	...	K–2	K–2	K–1
dx_j	0	1	2	...	K–2	K–1	0	1	2	...	K–3	K–2	...	K–2	K–1	K–1

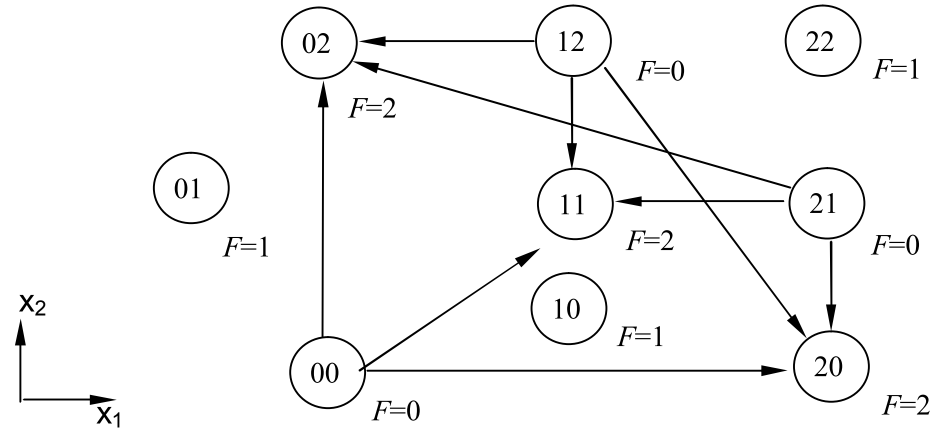

Рис. 1. Граф "решений"трехзначного дифференциального уравнения

Эти условия можно записать с помощью дифференциального уравнения:

$$x_i dx_i (x_i \langle+\rangle_K dx_i)(x_i \langle+\rangle_K dx_i \langle+\rangle 1)(x_i \langle+\rangle_K$$
$$\langle+\rangle_K dx_i \langle+\rangle_K 2) ... (x_i \langle+\rangle_K dx_i \langle+\rangle_K K–2) = 0, K \geq 3. \quad (6)$$

Первые два сомножителя x_i, dx_i обращают уравнение (6) в тождество, если в табл. 2 хотя бы один из них обращается в нуль. С помощью остальных (K−1) сомножителей учитывается, что сумма двух K-значных не равных нулю слагаемых принимает (K−1) различных значений: K, K−1, ..., 3, 2. Для того, чтобы в этих случаях уравнение с помощью соответствующего множителя обращалось в тождество $0 \equiv 0$, к сумме $x_i \oplus_K dx_i$ необходимо соответственно добавить 0, 1, 2, …, K–2, что и сделано в сомножителях с третьего по (K + 1)-й.

Условие (4) можно задать с помощью дифференциального неравенства

$$F(\overline{x}_1 \langle+\rangle_K d\overline{x}_1, \overline{x}_2) \langle-\rangle_K F(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \geq 0, \qquad (7)$$

а условие (5) – с помощью неравенства

$$F(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \langle-\rangle_K F(\overline{x}_1 \langle+\rangle_K d\overline{x}_1, \overline{x}_2) \geq 0.$$

Пример 2. Описать монотонно возрастающие переходы функции $f = x \langle+\rangle_K y \langle+\rangle_K z$ относительно x и y при K = 3.

Построим таблицу значений функций F(x, y, z) и $F(x \langle+\rangle_K dx, y \langle+\rangle_K dy, z)$ (табл. 3) . Значения функции F(x, y, z) находятся в первой строке таблицы, в остальных – значения функции $F(x \langle+\rangle_K dx, y \langle+\rangle_K dy, z) = x \langle+\rangle_K y \langle+\rangle_K z \langle+\rangle_K dx \langle+\rangle_K dy$. Условия (6) и (7) для нашего примера дают табл. 4 монотонно возрастающих переходов, которые отмечены символом "0".

Таблица 3

Значения функций

dx	dy																												
0	0	0	1	2	1	2	0	2	0	1	1	2	0	2	0	1	0	1	2	2	0	1	0	1	2	1	2	0	
0	1	1	2	0	2	0	1	0	1	2	2	0	1	0	1	2	1	2	0	0	1	2	1	2	0	2	0	1	
0	2	2	0	1	0	1	2	1	2	0	0	1	2	1	2	0	2	0	1	1	2	0	2	0	1	0	1	2	
1	0	1	2	0	2	0	1	0	1	2	2	0	1	0	1	2	1	2	0	0	1	2	1	2	0	2	0	1	
1	1	2	0	1	0	1	2	1	2	0	0	1	2	1	2	0	2	0	1	1	2	0	2	0	1	0	1	2	
1	2	0	1	2	1	2	0	2	0	1	1	2	0	2	0	1	0	1	2	2	0	1	0	1	2	1	2	0	
2	0	2	0	1	0	1	2	1	2	0	0	1	2	1	2	0	2	0	1	1	2	0	2	0	1	0	1	2	
2	1	0	1	2	1	2	0	2	0	1	1	2	0	2	0	1	0	1	2	2	0	1	0	1	2	1	2	0	
2	2	1	2	0	2	0	1	0	1	2	2	0	1	0	1	2	1	2	0	0	1	2	1	2	0	2	0	1	
		0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	z
		0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	y
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	x

Таблица 4

Таблица переходов

dx	dy																												
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	1	0	0	-	0	-	0	-	0	0	0	-	0	-	0	0	0	0	-	-	0	0	0	0	-	0	-	0	
0	2	0	-	-	-	-	0	-	0	-	-	-	0	-	0	-	0	-	-	-	0	-	0	-	-	-	-	0	
1	0	0	0	-	0	-	0	-	0	0	0	-	0	-	0	0	0	0	-	-	0	0	0	0	-	0	-	0	
1	1	0	-	-	-	-	0	-	0	-	-	-	0	-	0	-	0	-	-	-	0	-	0	-	-	-	-	0	
1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	0	0	-	-	-	-	0	-	0	-	-	-	0	-	0	-	0	-	-	-	0	-	0	0	-	-	-	0	
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	2	0	0	-	0	-	0	-	0	0	0	-	0	-	0	0	0	0	-	-	0	0	0	0	-	0	-	0	
		0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	z
		0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	y
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	x

Еще одно определение дифференциальных операторов по заданному направлению может быть связано с определением производной по направлению из классического непрерывного анализа. В непрерывном анализе направление определяется с помощью некоторой прямой или оси. В случае K-значных функций $F(x) = F(x_1, ..., x_m)$ направление может быть задано выбором компонент вектора $x = (x_1, ..., x_m)$. Если изменяется только одна из m переменных x_j, то может быть определен частный K-значный дифференциал по переменной x_j или дифференциал в направлении оси переменной x_j:

$$dF_{xj} = F(x_1, ..., x_j \langle + \rangle_K dx_j, ..., x_m) \langle - \rangle_K F(x_1, ..., x_j, ..., x_m).$$

Аналогичным образом определяется дифференциал в направлении, задаваемом некоторым подмножеством переменных $(x_k, x_v, ..., x_p) \in (x_1, ..., x_m)$:

$$dF_{(xk,xv,...,xp)} = F(x_1, ..., x_k \langle + \rangle_K dx_k, ..., x_v \langle + \rangle_K dx_v, ..., x_p \langle + \rangle_K dx_p, ..., x_m) \langle - \rangle_K F(x_1, ..., x_m).$$

Использование направленных K-значных производных может быть рассмотрено на примере диагностики, например, многоразрядного сумматора с подключенными к его контрольным точкам блокам нейронных сетей АРТ-1К. На рис. 2 приведена схема одного разряда такого сумматора, на вход которого подаются соответствующие разряды двух слагаемых и сигнал переноса предыдущего разряда. На его выходе получаем сигнал поразрядной суммы и сигнал, поступающий на вход следующего разряда сумматора. Только при наличии всех логических "единиц" на входе элемента "И" на его выходе появляется сигнал логической "единицы", а на выходе элемента "ИЛИ" происходит возрастание логического сигнала до уровня логической "единицы" при изменении хотя бы одного входного сигнала из состояния логический "нуль" в состояние логическая "единица". Выходы этих элементов поступают на входы блоков нейронных сетей АРТ-1К.

Каждый из пяти блоков нейронных сетей АРТ-1К вырабатывает на своем выходе сигнал, сигнализирующий об исправности или сбое в работе соответствующего каскада сумматора. Все выходы блоков нейронных сетей подключаются к блоку дифференциального анализа, который по совокупности изменений на своих входах формирует сигнал, на основании которого можно сделать вывод о правильности работы всего сумматора или его отдельных частей.

Выводы

Учет направления изменения сигналов при анализе работоспособности проектируемых вычислительных устройств позволяет выполнять проектирование с учетом различных параметров фронта и спада логического сигнала. Это позволяет выполнять проектирование, которое более полно отражает процессы, происходящие в реальных вычислительных устройствах.

Использование K-значного дифференциального исчисления и направленных K-значных производных позволяет выявлять всплески и провалы в информационных сигналах и сигналах синхронизации, а также другие сбойные ситуации, которые могут приводит к нарушению правильного функционирования проектируемых вычислительных устройств.

Список литературы

1. Natving B. Simulation based analysis and an application to an offshore oil and gas production system of the Natvig measures of component importance in repairable systems / B. Natving, K. Eide, J. Gasemyr // Reliability Engin & Syst. Safety. – 2009. – Vol. 94. – No. 10. – P. 1629 – 1638.

2. Moret B. Boolean Difference Techniques for Time-Sequence and Comon-Cause Analysis of Fault-Trees / B. Moret, M. Thomason // IEEE Trans. Reliability. – 1984. – Vol. R-33. – No. 5. – P. 399 – 405.

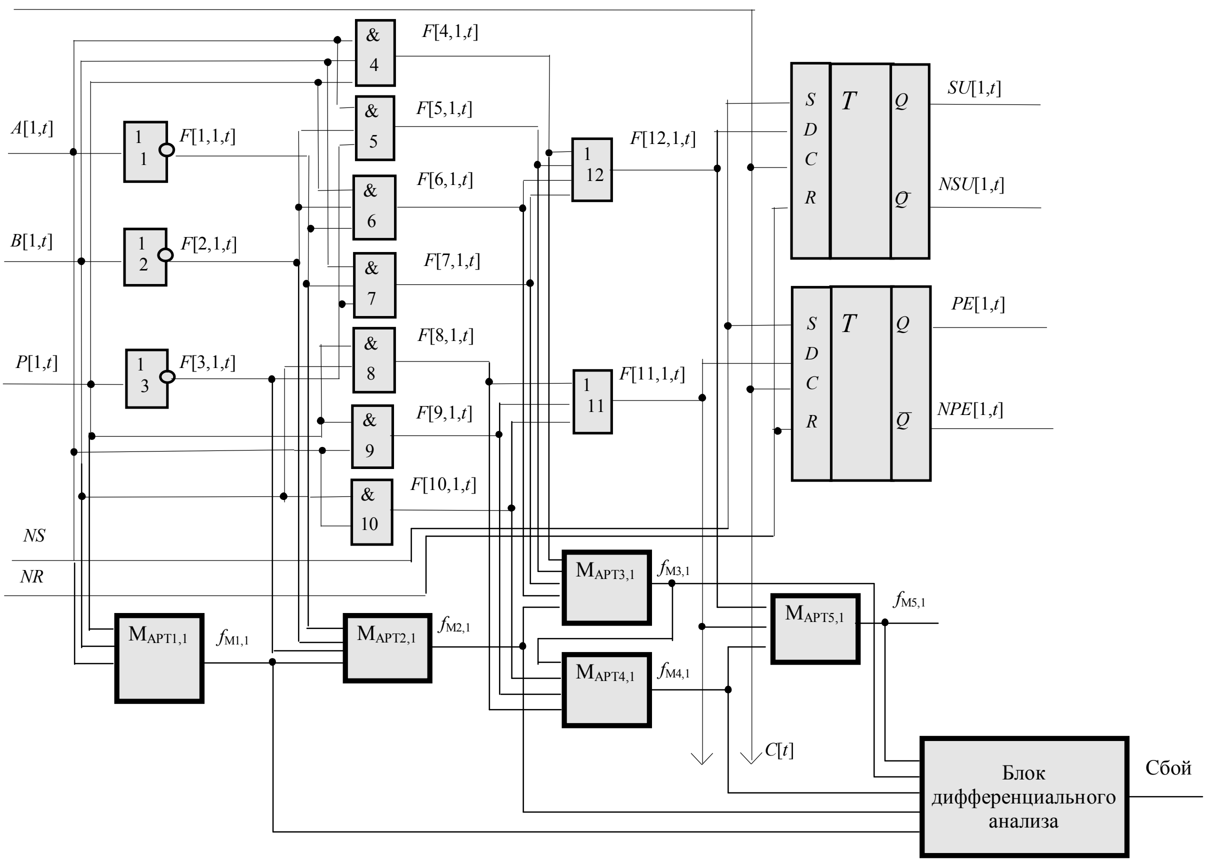

Рис. 2. Схема одного разряда многоразрядного сумматора

3. Бохманн Д. Двоичные динамические системы // Д. Бохманн, Х. Постхоф. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 400 с.

4. Бохманн Д. Логическое дифференциальное исчисление: достижения, тенденции и прилджения // Д. Бохманн, Р. Станкович, Ж. Тошич, В. Шмерко, С. Янушкевич // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 6. – С. 156 – 170.

5. Zaitseva E. Dynamic Reliability Indices for parallel, series and k-out-of-n Multi-State System / E. Zaitseva, V. Levashenko // Proc.52nd IEEE Annual Reliability. Maintainabilit. Sympos. – Nawport Beach. – USA. – 2006. – P. 253 – 259.

6. Дмитриенко В.Д. K-значное дифференциальное исчисление и моделирование цифровых устройств // В.Д. Дмитриенко, С.Ю. Леонов. – Харьков: Транспорт Украины, 1999. – 223 с.

7. Dmitrienko V.D. Research digital devices by means of modeling system on the basis of K-Value differential calculus / V.D. Dmitrienko, S.Yu. Leonov, T.V. Gladkikh // Radioelectronics & Informatics. – № 1. – 2008. – P. 63 – 69.

Поступила в редколлегию 1.03.2012

Рецензент: д-р техн. наук проф. В.Д. Дмитриенко, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

K-ЗНАЧНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД НАПРЯМКУ

С.Ю. Леонов

У статті розглядаються питання моделювання складних швидкодіючих обчислювальних систем з урахуванням напряму і форми перемикання K-значних сигналів на виходах окремих логічних елементів. Таке моделювання засноване на використанні K-значного диференційного числення і аналізі напряму зміни K-значної похідної.

Ключові слова: *моделювання, швидкодіючі обчислювальні системи, K-значні сигнали, K-значне диференційне числення.*

K-VALUE DIFFERENTIAL OPERATORS, DEPENDING ON DIRECTION

S.Yu. Leonov

In the article the questions of design the difficult fast-acting computer systems are examined taking into account direction and form of switching of K-Value signals on the exits separate logical elements. Such design is based on the use of K-Value differential calculus and analysis direction of change K-Value derivative.

Keywords*: design, fast-acting computer systems, K-Value signals, K-Value differential calculus.*