УДК 681.3.042

И.Н. Федотова-Пивень

Черкасский государственный технологический университет, Черкассы

АНАЛИЗ РЕКУРРЕНТНЫХ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

В статье метод производящих функций применен для классификации рекуррентных систем счисления с одинаковыми правилами одновременного сложения до 5 чисел включительно. С помощью производящих функций вычислена общая формула n-го члена каждой числовой последовательности. Показано, что одним и тем же производящим функциям могут соответствовать различные рекуррентные соотношения при одних и тех же начальных значениях.

Ключевые слова: *многооперандное сложение, производящие функции, рекуррентная система счисления, избыточность, одновременное сложение.*

Вступление

Постановка проблемы. Повышение быстродействия арифметических устройств, обрабатывающих большие массивы чисел большой разрядности, является важной задачей цифровой электроники. Арифметические сумматоры служат основными архитектурными блоками для вычисления всех остальных арифметических операций, увеличение их быстродействия может дать значительный эффект ускорения для общего процесса вычислений [1]. Линейные избыточные рекуррентные системы счисления (ЛИРССЧ) могут обладать простыми правилами одновременного многооперандного сложения (МС) [2], что может быть использовано в разработке новых быстродействующих многооперандных сумматоров. Поэтому развитие методов анализа имеющихся ЛИРССЧ для поиска новых практически важных систем счисления является актуальной задачей.

Анализ предыдущих исследований и публикаций. Пусть дана последовательность $\{a_n\}$: $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

Как известно [3], производящая функция (ПФ) последовательности $\{a_n\}$ определяется как степенной ряд:

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} a_mx^m. \quad (1)$$

Операции с бесконечными рядами, какими являются ПФ, предоставляют собой мощный метод работы с последовательностями чисел [4]. ПФ позволяют кратко описывать сложные последовательности и выполнять операции над последовательностями с помощью простой алгебры [4]. ПФ известны для большинства специальных функций, которые широко используются в комбинаторном анализе [5], статистике, математической физике [6] для получения рекуррентных соотношений, различных тождеств, вычисления интегралов и т.д.

Однако метод ПФ не применялся для анализа ЛИРССЧ, полученных в работах [7] и [2]. В системах счисления из работы [7] возможно одновременное сложение нескольких $k \subset (2;\ 3;\ 4;\ 5)$ слагаемых по таким правилам:

$$\begin{cases} 0 + 0 = 0, \\ B_n + 0 = B_n, \\ 2B_n = B_{n+1} + B_{n-2}, \\ 3B_n = B_{n+2} + B_{n-2}, \\ 4B_n = B_{n+2} + B_n + B_{n-2}, \\ 5B_n = B_{n+2} + B_{n+1} + B_{n-1} + B_{n-4}. \end{cases} \quad (2)$$

В ЛИРССЧ из работы [2] возможно одновременное многооперандное сложение десятков слагаемых по указанным в [2] правилам. Сложение в ЛИРССЧ [2], образованной на основе рекуррентного соотношения (РС) вида

$$B_n = B_{n-1} + 3B_{n-3} + 2B_{n-4}. \quad (3)$$

с алфавитом {0, 1} и начальными значениями (НЗ) 1 1 1 1 2 4 8 (B_0=1, B_1=1, B_2=1, B_3=1, B_4=2, B_5=4, B_6=8; $n \geq 4$) происходит одновременно по всем операндам и поочередно по их разрядам.

Целью данного исследования является проведение методом производящих функций сравнительного анализа линейных избыточных рекуррентных систем счисления из работ [2, 7].

Изложение основного материала

Рассмотрим метод получения ПФ g(x) на примере последовательности B(n), заданной РС (3).

Имеем

$$g(x) = 1 + 1x + 1x^2 + 1x^3 + 2x^4 + 4x^5 + 8x^6 + \sum_{n=7}^{\infty} B_nx^n.$$

Обозначим

$$f(x) = \\ = 1 + 1x + 1x^2 + 1x^3 + 2x^4 + 4x^5 + 8x^6. \quad (4)$$

Тогда

$$g(x) = f(x) + \sum_{n=7}^{\infty} B_n x^n. \quad (5)$$

Подставим (3) в (5):

$$g(x) = f(x) + \sum_{n=7}^{\infty} (B_{n-1} + 3B_{n-3} + 2B_{n-4})x^n.$$

$$g(x) = f(x) +$$

$$+\sum_{n=7}^{\infty} B_{n-1}x^n + \sum_{n=7}^{\infty} 3B_{n-3}x^n + \sum_{n=7}^{\infty} 2B_{n-4}x^n.$$

Преобразуем g(x) к виду:

$$g(x) = f(x) + x\sum_{n=7}^{\infty} B_{n-1}x^{n-1} +$$

$$+3x^3\sum_{n=7}^{\infty} B_{n-3}x^{n-3} + 2x^4\sum_{n=7}^{\infty} B_{n-4}x^{n-4}.$$

Из свойств степенных рядов имеем:

$$g(x) = f(x) + x\sum_{m=6}^{\infty} B_m x^m +$$

$$+3x^3\sum_{m=4}^{\infty} B_m x^m + 2x^4\sum_{m=3}^{\infty} B_m x^m.$$

Преобразуем g(x) к виду:

$$g(x) = f(x) + x\sum_{m=0}^{\infty} B_m x^m - x\sum_{m=0}^{5} B_m x^m +$$

$$+3x^3\sum_{m=0}^{\infty} B_m x^m - 3x^3\sum_{m=0}^{3} B_m x^m +$$

$$+2x^4\sum_{m=0}^{\infty} B_m x^m - 2x^4\sum_{m=0}^{2} B_m x^m.$$

Найдем в этом выражении конечные суммы:

$$-x\sum_{m=0}^{5} B_m x^m = -xB_5x^5 - xB_4x^4 -$$

$$-xB_3x^3 - xB_2x^2 - xB_1x^1 - xB_0x^0.$$

$$-3x^3\sum_{m=0}^{3} B_m x^m =$$

$$= -3x^3B_3x^3 - 3x^3B_2x^2 - 3x^3B_1x^1 - 3x^3B_0x^0.$$

$$-2x^4\sum_{m=0}^{2} B_m x^m = -2x^4B_2x^2 - 2x^4B_1x^1 - 2x^4B_0x^0.$$

Подстановка в эти конечные суммы начальных значений

$B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 = 1$, $B_3 = 1$, $B_4 = 2$, $B_5 = 4$

дает:

$$-x\sum_{m=0}^{5} B_m x^m = -4x^6 - 2x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x.$$

$$-3x^3\sum_{m=0}^{3} B_m x^m = -3x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 3x^3.$$

$$-2x^4\sum_{m=0}^{2} B_m x^m = -2x^6 - 2x^5 - 2x^4.$$

Подставим эти конечные суммы в g(x) и получим:

$$g(x) = f(x) + \left(x + 3x^3 + 2x^4\right)\sum_{m=0}^{\infty} B_m x^m -$$

$$-9x^6 - 7x^5 - 6x^4 - 4x^3 - x^2 - x.$$

Подстановка в последнее выражение для g(x) выражения для f(x) из (4) дает:

$$g(x) = \left(x + 3x^3 + 2x^4\right)g(x) -$$

$$-x^6 - 3x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 1$$

или

$$g(x) = \frac{x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 1}{2x^4 + 3x^3 + x - 1} =$$

$$= \frac{(x^3 + 2x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + x + 1)}{(1 - 2x)(x^3 + 2x^2 + x + 1)}.$$

Тогда

$$g(x) = \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{2x - 1}.$$

Найдем формулу n-го члена последовательности по ее ПФ. Имеем

$$g(x) = \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{2x - 1} =$$

$$= \frac{1}{8}\left(4x^2 + 6x + 7 + \frac{1}{1 - 2x}\right).$$

Используем известное разложение в ряд

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ [4, с. 356]}.$$

При $z = 2x$ это разложение имеет вид

$$\frac{1}{1 - 2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n.$$

Имеем

$$g(x) = \frac{1}{8}(4x^2 + 6x + 7 + 1 + 2x + 2^2x^2 +$$

$$+2^3x^3 + \cdots + 2^n x^n + \cdots).$$

Отсюда следует

$$g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 2^2x^5 + \cdots$$

$$+\frac{2^n}{8}x^n + \cdots.$$

Коэффициент при x^n в последнем разложении в степенной ряд равен $\frac{2^n}{8}$.

Аналогично находятся ПФ и формулы n-го члена последовательности для рекуррентных СЧ из табл. 1.

Таблица 1

Системы счисления с одновременным сложением до 5 слагаемых включительно по правилам (1) и соответствующие системам счисления производящие функции

№ п/п	Рекуррентное соотношение начальными значениями (НЗ)	Производящая функция g(x)	Формула n-го члена последовательности
1	$B_n = 2B_{n-2} + B_{n-4} + B_{n-5}$ НЗ : 1 1 1 1 2 3 5;	$\frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 + x - 1}$	$\frac{(\sqrt{5}+3)\left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{\sqrt{5}+5} + \frac{(\sqrt{5}-3)\left(-\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)^n}{\sqrt{5}-5}$
2	$B_n = B_{n-2} + 3B_{n-3} - B_{n-5}$ НЗ : 1 1 1 1 2 3 5;		
3	$B_n = B_{n-2} + 3B_{n-4} + 2B_{n-5}$ НЗ : 1 1 1 1 2 3 5;	Совпадает с формулой 1, 2-й ПФ.	Совпадает с формулой n-го члена последовательности 1, 2-го РС.
4	$B_n = B_{n-2} + 3B_{n-3} - B_{n-5}$ НЗ : 1 1 1 2 3 5 8;	$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 1}$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^n$
5	$B_n = B_{n-1} + 3B_{n-4} - B_{n-6}$ НЗ : 1 1 1 2 3 5 8;		
6	$B_n = B_{n-2} + 3B_{n-4} + 2B_{n-5}$ НЗ : 1 1 1 2 3 5 8;	Совпадает с формулой 4, 5-й ПФ.	Совпадает с формулой n-го члена последовательности 4, 5- го РС.
7	$B_n = B_{n-1} + 3B_{n-5} + 2B_{n-6}$ НЗ : 1 1 1 2 3 5 8;		
8	$B_n = 2B_{n-1} - 2B_{n-4} + B_{n-6}$ НЗ : 1 1 1 2 3 5 8	Совпадает с формулой 4, 5-й ПФ.	Совпадает с формулой n-го члена последовательности 4, 5- го РС.
9	$B_n = 2B_{n-2} + 2B_{n-4} - B_{n-6}$ НЗ : 1 1 1 2 3 5 8	Совпадает с формулой 4, 5-й ПФ.	Совпадает с формулой n-го члена последовательности 4, 5- го РС.
10	$B_n = 2B_{n-2} + B_{n-4} + B_{n-5}$ НЗ : 1 1 1 2 3 5 8;	Совпадает с формулой 4, 5-й ПФ.	Совпадает с формулой n-го члена последовательности 4, 5- го РС.
11	$B_n = 2B_{n-3} + 3B_{n-4} + B_{n-5}$ НЗ : 1 1 1 2 3 5 8;	Совпадает с формулой 4, 5-й ПФ.	Совпадает с формулой n-го члена последовательности 4, 5- го РС.
12	$B_n = 2B_{n-1} - B_{n-2} + B_{n-4}$ НЗ : 1 1 1 2 4 6 10;	$\frac{-x^4 + x^2 - 1}{x^2 + x - 1}$	$2 \cdot \left(\frac{(\sqrt{5}+3)\left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{\sqrt{5}+5} + \frac{(\sqrt{5}-3)\left(-\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)^n}{\sqrt{5}-5} \right)$
13	$B_n = 2B_{n-2} + B_{n-4} + B_{n-5}$ НЗ : 1 1 2 2 4 6 10;	$\frac{x^3 - 1}{x^2 + x - 1}$	Совпадает с формулой n-го члена последовательности 12- го РС.
14	$B_n = B_{n-2} + 3B_{n-3} - B_{n-5}$ НЗ : 1 1 2 2 4 6 10;	Совпадает с формулой 13-й ПФ.	Совпадает с формулой n-го члена последовательности 12- го РС.
15	$B_n = B_{n-2} + 3B_{n-4} + 2B_{n-5}$ НЗ : 1 1 2 2 4 6 10;	Совпадает с формулой 13-й ПФ.	Совпадает с формулой n-го члена последовательности 12- го РС.
16	$B_n = 2B_{n-3} + 3B_{n-4} + B_{n-5}$ НЗ :1 1 2 2 4 6 10;	Совпадает с формулой 13-й ПФ.	Совпадает с формулой n-го члена последовательности 12- го РС.
17	$B_n = 2B_{n-1} - B_{n-2} + B_{n-4}$ НЗ : 1 1 2 3 3 6 9;	$\frac{2x^4 - 1}{x^2 + x - 1}$	$6\left(-\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}+1)\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}-1)\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^n \right)$

Из табл. 1 следует, что РС с НЗ можно разбить на 5 групп с одинаковой формулой n-го члена последовательности и одинаковой ПФ: 1) 1-3 РС с НЗ 1 1 1 1 2 3 5; 2) 4-11 РС с НЗ 1 1 1 2 3 5 8; 3) 12-е РС с НЗ 1 1 1 2 4 6 10; 4) 13-16 РС с НЗ 1 1 2 2 4 6 10; 5) 17-е РС с НЗ 1 1 2 3 3 6 9. Это означает, что каждой такой группе соответствует своя числовая последовательность.

Также ПФ можно использовать для сравнения рядов [3, с.279].

Например, из сравнения формул n-го члена последовательности табл. 1 становится очевидным, что 12 - 16-е РС с НЗ 1 1 2 2 4 6 10 генерируют последовательность, которая является умноженной на 2 последовательностью, генерируемой 1, 2-м или 3-м РС с НЗ 1 1 1 1 2 3 5 начиная с 3-го члена (первые две единицы НЗ в этих РС не используются, т.к. $n \leq 5$, а генерация начинается с 8-го члена последовательности). При этом 1-е РС полностью совпадает с 13-м, а 2-е РС полностью совпадает с 14-м.

Из табл. 1 также видно, что для одной и той же последовательности чисел, генерируемой различными РС с одним и тем же набором НЗ, производящие функции, полученные из этих РС с НЗ, также равны.

Выводы

Проведенные исследования показывают, что:

1) производящие функции позволяют классифицировать рекуррентные системы счисления с одинаковыми правилами одновременного сложения до 5 чисел включительно;

2) одним и тем же производящим функциям могут соответствовать различные рекуррентные соотношения при одних и тех же начальных значениях;

3) производящие функции позволяют вычислить общую формулу n-го члена последовательности. Сравнение формул n-х членов последовательностей с учетом начальных значений позволяет легко определить зависимые между собой последовательности.

Список литературы

1. Анисимов А.В. Сложение без единиц переноса / А.В. Анисимов // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 2. – С. 3-16.

2. Федотова-Пивень И.Н. Программное моделирование совмещенного во времени сложения двадцати целых положительных чисел в избыточной рекуррентной системе счисления третьего порядка / И.Н. Федотова-Пивень, О.Б. Пивень // Вісник НТУУ «КПІ». Іінформатика, управління та обчислювальна техніка: Зб. наук. пр. – К.: Век+, – 2013. – № 58. – С.131-137.

3. Dobrushkin V.A. Methods in Algorithmic Analysis. CRC Press, Taylor & Francis Ltd., United States, 2009, 824 p., ISBN 13: 9781420068290.

4. Грэхем Р. Конкретная математика. Основание информатики / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. – М.: Мир, 1998. – 522 с.

5. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ / К.А. Рыбников. –. М. МГУ, 1972. – 344 с.

6. Elna B. McBride. Obtaining generating functions. (Springer tracts in Natural Philosophy, vol. 21). Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971. – 100 p.

7. Федотова-Півень І.М. Нові надлишкові рекурентні системи числення 3-го порядку з одночасним додаванням 5-ти і менше доданків / І.М. Федотова-Півень // Проблеми інформатизації. Науково-техн. семінар. Збірка тез доповідей. 15-16 березня 2011 р., Черкаси, Україна-Черкаси: ЧДТУ, вип. 1(6). – 2011. – С. 21-22.

Поступила в редколлегию 27.02.2015

Рецензент: д-р техн. наук проф. В.Н. Рудницкий, Черкасский государственный технологический университет, Черкассы

АНАЛІЗ РЕКУРЕНТНИХ СИСТЕМ ЧИСЛЕННЯ З ДОПОМОГОЮ ГЕНЕРУЮЧИХ ФУНКЦІЙ

І.М. Федотова-Півень

У статті метод генеруючих функцій застосовано для класифікації рекурентних систем числення з однаковими правилами одночасного додавання до 5 чисел включно. З допомогою генеруючих функцій обчислено загальну формулу n-го члена кожної числової послідовності. Показано, що одним и тим же генеруючим функціям можуть відповідати різні рекурентні співвідношення при одних і тих же початкових значеннях.

Ключові слова: *багатооперандне додавання, рекурентна система числення, генеруючі функції, налишковість, одночасне додавання.*

ANALYSIS OF RECURRENT NUMBER SYSTEMS USING GENERATING FUNCTIONS

I.M. Fedotova-Piven

In this paper the method of generating functions used for classification of recurrent number systems with the same rules of simultaneous addition up to 5 numbers inclusive. With the help of generating functions computed general formula n-th term of each numerical sequence. It is shown that the same generating functions may correspond to various recurrence relations with the same initial values.

Keywords: *multi-operand addition, generating functions, recurrent number system, redundancy, simultaneous addition.*