УДК 621.37 : 621.391

А.А. Белокуров, О.И. Вотяков, Г.Г. Писарёнок

Государственное предприятие Центральное конструкторское бюро «Протон», Харьков

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ КОРОТКИХ МНОГОЧАСТОТНЫХ СИГНАЛОВ МЕТОДАМИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Рассматривается задача определения количества и номиналов частот сложных сигналов, которая отличается от известных использованием методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Для повышения точности решения уравнений в условиях, когда анализируемый сигнал имеет малую длительность, предлагается использование преобразования взвешивания.

Ключевые слова: *многочастотные сигналы, цифровая обработка, система линейных алгебраических уравнений, метод наименьших квадратов.*

Введение

Актуальность проблемы. Развитие современных средств и систем радиосвязи во многом определяется переходом на цифровые технологии и применением сложных радиосигналов ППРЧ, OFDM (Orthogonal Frequency Division with Multiplexing) и других [1]. Анализ многочастотных сигналов сложной структуры требует для обеспечения приемлемой точности оценок высокого качества цифрового представления выборок: (2^{12} –2^{14} уровней квантования при частоте дискретизации в 2–3 раза превышающей частоту Найквиста). Это является причиной большого объема вычислительных затрат при обработке цифровых выборок и, как следствие, приводит к снижению точности обработки сигналов в реальном временном масштабе. В связи с этим, использование традиционных алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) не всегда является оправданным, так как основным недостатком этих алгоритмов является сравнительно низкое разрешение по частоте [2]. Поэтому сегодня особенно актуальной является задача создания нового поколения информационно измерительных технологий, с помощью которых можно осуществлять оперативный анализ радиоизлучений с высокой разрешающей способностью, достоверностью и точностью.

Анализ последних исследований и публикаций. В последнее время активно разрабатываются нетрадиционные методы спектрального анализа, суть которых состоит в использовании априорной информации о параметрах обрабатываемых сигналов. При этом вводятся модели, аппроксимирующие сигнал, в результате оценке подлежит конечное число параметров [2]. Например, в [3, 4] для определения списка рабочих частот сигнала при полной априорной неопределенности и решения задачи распознавания в условиях частичной неопределенности используется согласованное его разложение в ряд на интервале модуляции по гармоникам и решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В [5] предъявляются требования к длительности анализируемого сигнала, от которой зависит успешность решения СЛАУ и, как следствие, достоверность определения списка рабочих частот сигнала и решения задачи распознавания. Однако на практике эти требования не всегда удовлетворяются. В связи с этим возникает задача повышения устойчивости решения СЛАУ в этих условиях.

Целью статьи является повышение точности решения СЛАУ, используемых при обработке многочастотных сигналов, в условиях, когда анализируемый сигнал имеет малую длительность.

Основная часть

Как и в [5], рассматривается полигармонический сигнал

$$y(t)=S(t)+\xi(t), \qquad (1)$$

где $S(t)=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i\cdot\cos(2\pi f_i t)+X_{n+i}\cdot\sin(2\pi f_i t)\right)$, f_l и n – значения и общее количество частот сигнала, X_l, X_{n+i} – квадратурные амплитуды этих гармоник, $\xi(t)$ – аддитивная смесь помех канала связи и входных каскадов приемного устройства.

Анализу, как правило, подлежит конечная выборка (вектор) сигнала $\mathbf{B}=\{b_0,b_1,...,b_{N-1}\}$, где $b_k=y(t_k), k=\overline{0,N-1}$. Пусть задан эталонный сигнал в виде конечной суммы синусоидальных функций

$$z(t)=\sum_{i=1}^{n_э}\left(X_i\cdot\cos\left(2\pi f_i^э t\right)+X_{n_э+i}\cdot\sin\left(2\pi f_i^э t\right)\right).$$

В [2] для меры близости принятого и эталонного сигнала принята зависимость следующего вида

$$\delta^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[y(t_k)-\sum_{i=1}^{n_э}\left(\begin{array}{c}X_i\cdot\cos\left(2\pi f_i^э t\right)+\\+X_{n_э+i}\cdot\sin\left(2\pi f_i^э t\right)\end{array}\right)\right]^2, \qquad (2)$$

где N – количество отсчетов дискретизованного сигнала y(t). Введем далее следующие обозначения:

$$A = \left\| a_{i,j} \right\|, \quad i = 0, \ldots, (N-1), \; j = 0, \ldots, (2 \cdot n_э - 1);$$
$$a_{i,j} = \mathrm{Cos}\left[2\pi f^э{}_j \cdot t_i \right], \quad 0 \le j \le n_э - 1; \qquad (3)$$
$$a_{i,j} = \mathrm{Sin}\left[2\pi f^э{}_j \cdot t_i \right], \quad n_э \le j \le 2 \cdot n_э - 1,$$

Так как матрица A известна, задача состоит в нахождении по имеющейся единственной реализации сигнала B $\mathbf{X} = \left\{ X_1, ..., X_{n_э}, ..., X_{2n_э} \right\}$ – оценки вектора методом наименьших квадратов (МНК):

$$\hat{X} = \arg\min_{X} \left\{ (B - AX)^T (B - AX) \right\}. \qquad (4)$$

Решение (4) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) при условии, что число отсчётов сигнала не меньше удвоенного числа гармоник

$$\hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T B\,. \qquad (5)$$

Таким образом, результаты решения СЛАУ могут быть использованы для определения частотной структуры сигнала [3] либо для распознавания многочастотных сигналов [4]. При решении задачи по одному малому набору данных отсутствует возможность использования известных положений теории статистического оценивания.

Источником погрешностей в оценках параметров (5) могут быть плохая обусловленность матрицы Грама $A^T A$ и наличие в векторе исходных данных ошибок. Как показывают исследования [6], результаты оценивания в среднеквадратичном смысле не всегда воспринимаются как лучшие. Поэтому представляет интерес построение процедур, позволяющих достаточно просто реализовывать различную степень близости к истинным значениям параметров модели, в т. ч. и по субъективным оценкам качества.

Примем, как и в [5] предположение, что задано ограничение на норму вектора ошибок $\left\| \xi(t) \right\| \le R_\xi$.

В нашем случае точность решения задачи есть евклидова норма вектора ошибок оценки на одной конкретной реализации, поэтому в отличие от мер информативности классической регрессии здесь информативность понимается как характеристика потенциальных возможностей фиксированного набора данных, в частности, достижимой точности оценивания параметров на заданном фиксированном наборе данных [6].

При сделанных предположениях свойства оценок параметров определяются лишь ориентацией вектора ошибок относительно пространства столбцов матрицы Грама. В частности, если он ортогонален этому пространству, ошибка оценки отсутствует. Таким образом, улучшить точность оценок для конкретной реализации сигнала можно путем изменения ориентации вектора ошибок относительно столбцов матрицы Грама $A^T A$. Это можно сделать путем одновременного изменения матрицы A и вектора B. С точки зрения обеспечения вычислительной простоты для этого целесообразно применить линейные преобразования. В [6, 7] предлагается использовать преобразование взвешивания:

$$\tilde{B} = GB, \quad \tilde{A} = GA.$$

Рассмотрим теперь способы построения весовой матрицы. При построении этих методов используется выявленный в [6] факт близости выделяющихся (экстремальных) компонентов векторов ошибок и невязок. Опираясь на указанное свойство можно сформулировать различные критерии и с их использованием строить локально оптимальные (на шаге) процедуры преобразования. В рамках этого подхода ищется матрица $G = \mathrm{diag}(g_{1,\ldots,} g_N)$, $Q(G, \tilde{\zeta}) \to \min$ при заданных ограничениях. Идея заключается в построении оптимальных преобразований отдельно для каждого шага процесса последовательного оценивания. Одним из самых простых критериев является [6]

$$Q(G, \tilde{\zeta}) = \tilde{\zeta}^T G^2 \tilde{\zeta} \to \min_G, \qquad (6)$$

$$g_i = g_0 \Big/ \hat{\zeta}_i^2, \; g_0 = N \Big/ \sum_{i=1}^{N} \hat{\zeta}_i^{-2}, \; \sum_{i=1}^{N} g_i = N, \; i = 1, ..., N.$$

Известны более сложные критерии, которые могут изменяться на каждом шаге с учетом требований к повышению точности оценок на очередном шаге и дополнительной информации, содержащейся в искомых оценках параметров и невязках. Например, можно использовать семейства критериев вида

$$Q(\tilde{\zeta}, k) = \sum_{i=1}^{N} g_0(k) \left| \tilde{\zeta}_i \right|^{s_k},$$

где s_k, k = 1,2,3 – параметр, обеспечивающий различную степень близости оценок $\hat{X}$ к истинным параметрам $X^Э$. Основанная на указанном выше критерии трехшаговая процедура с весами

$$g_i(k) = \sum_{i=1}^{N} g_0(k) \left| \tilde{\zeta}_i \right|^{-s_i(k)}, \qquad (7)$$

где $s_i(k) = 0$ при всех k = 1,2,3,

$$i < q, \; q : \left| \tilde{\zeta}_q \right| \le \varepsilon_a > 0, \; \left| \tilde{\zeta}_1 \right| \le \left| \tilde{\zeta}_2 \right| \le \ldots \le \left| \tilde{\zeta}_q \right| \le \ldots \le \left| \tilde{\zeta}_N \right|,$$

а для остальных компонентов

$$s_i(1) = 2, \quad s_i(2) = 1, \quad s_i(3) = 0;$$

параметр g_0 определялся из условия нормировки:

$$g_0(k) = \sum_{i=1}^{N} \left| \tilde{\zeta}_i \right|^{-s_i(k)}.$$

Это означает, что матрица преобразования G изменяется от итерации к итерации так, что при определении моделей на завершающих этапах критерий оказывается менее «регуляризующим».

Эффективность этих методов проверялась путем статистического моделирования 12-ти частотного OFDM сигнала с такой информационной матрицей:

$$A = \left\| a_{i,j} \right\|, \quad i = 0, \ldots, (N-1), \ j = 0, \ldots, 11;$$

$$a_{i,j} = \mathrm{Cos}\left[2\pi(F_0 + j\Delta F)i\Delta T\right], \quad 0 \le j \le 11;$$

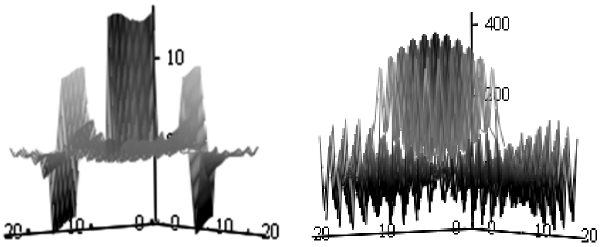
$$a_{i,j} = \mathrm{Sin}\left[2\pi(F_0 + j\Delta F)i\Delta T\right], \quad 12 \le j \le 23,$$

где $\Delta T = 9.07 \cdot 10^{-5}$с − величина интервала дискретизации; $F_0 = 699$Гц −низшая частота, $\Delta F = 200$Гц − разность между поднесущими частотами.

Ошибки измерений сигнала в цифровой выборке считались некоррелированными и распределенными по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией – σ^2.

Для анализа выбирался участок сигнала длительностью 30 дискрет. В этом случае мера диагонального преобладания $\phi(A^T A) = 14 < M - 1 = 23$. Значение меры на заданном наборе данных не позволяет сделать уверенное заключение о достижимой точности оценки [5].

На рис. 1, а показан вид исходной матрицы Грама $A^T A$, а на рис. 1, б – вид этой матрицы после преобразования (5). Видно, что обусловленность матрицы значительно улучшилась.



а б

Рис. 1. Матрица Грамма:
а – исходная; б – после первого преобразования

Анализ результатов моделирования по 100 реализациям для различных отношений сигнал/шум (отношение энергии одного бита к плотности мощности шума) показывает, что при большом отношении сигнал/шум (от 10 до 20) классический МНК обеспечивает более точные оценки лишь в 6…26% случаях. При уменьшении отношения сигнал/шум (от 10 до 2) в подавляющем большинстве случаев (от 96 до 100%) трехшаговый МНК обеспечивает более точные оценки. По сравнению с классическим МНК его точность выше в 6 раз при отношения сигнал/шум 10 и в 17 раз при отношении сигнал/шум 2.

Выводы

В статье предложен метод уточнения решения СЛАУ, используемого при идентификации многочастотных сигналов, который основан на преобразовании взвешивания информационной матрицы и вектора измерений сигнала. Результаты моделирования показали его высокую эффективность, возрастающую при уменьшении отношения сигнал/шум.

Список литературы

1. *Широкополосные беспроводные сети передачи информации / В.М. Вишневский, А.И. Ляхов, С.Л. Портной, И.В. Шахнович. – М.: Техносфера, 2005. – 592 с.*

2. *Дмитриев Е.В. Аппроксимация коротких процессов, сигналов, функций и расчет их гармонических дискретных спектров / Е.В. Дмитриев // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2007. – Т.10, № 1. – С. 6-19.*

3. *Кузниченко В.С. Определение списка рабочих частот OFDM сигналов в системах автоматического радиомониторинга в условиях априорной неопределенности / В.С. Кузниченко // Системи управління, навігації та зв'язку. – К., 2011. – Вип. 1 (17). – С. 276-278.*

4. *Кузниченко В.С. Определение списка рабочих частот OFDM сигналов в системах автоматического радиомониторинга при известном числе их классов / В.С. Кузниченко, Г.Г. Писарёнок, С.Г. Рассомахин // Системи управління навігації та зв'язку. – К., 2011. – Вип. 3 (19). – С. 262-265.*

5. *Метод определения необходимой длительности многочастотных сигналов для их анализа методами линейной алгебры / А.А. Белокуров, О.И. Вотяков, В.С. Кузниченко, Г.Г. Писарёнок // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2016. – Вип. 1 (138). – С. 6-9.*

6. *Методы компьютерной обработки изображений / Под ред. В.А. Сойфера. –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. − 784 с.*

7. *Elad M. Optimized Projections for Compressed-Sensing / M. Elad // IEEE Trans. on Signal Processing. – 2007. – Vol. 55, No. 12. – P. 5695-5702.*

Поступила в редколлегию 25.12.2015

Рецензент: д-р техн. наук доц. С.Г. Рассомахин, Национальный университет им. В.Н. Каразина, Харьков.

ПІДВІЩЕННЯ ТОЧНОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ КОРОТКИХ БАГАТОЧАСТОТНИХ СИГНАЛІВ МЕТОДАМИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

О.А. Білокуров, О.І. Вотяков, Г.Г. Писарьонок

Розглядається завдання визначення кількості і номіналів частот складних сигналів, яка відрізняється від відомих використанням методів вирішення систем лінійних рівнянь алгебри. Для підвищення точності вирішення рівнянь, використовуваних при обробці багаточастотних сигналів, в умовах, коли аналізований сигнал має малу тривалість, пропонується використання перетворення зважування.

Ключові слова: *багаточастотні сигнали, цифрова обробка, система лінійних рівнянь алгебри, метод найменших квадратів.*

INCREASE OF EXACTNESS OF PARAMETERS DETERMINATION OF SHORT MULTIFREQUENCY SIGNALS BY METHODS OF LINEAR ALGEBRA

A.A. Belokurov, O.I. Votyakov, G.G. Pisarenok

The task of determining the amount and face values of frequencies of difficult signals is examined, which differs from the methods of decision of the systems of linear algebraic equalizations known by the use. For the increase of exactness of decision of equalizations in the conditions when an analyzable signal has small duration, the use of transformation of weighing is offered.

Keywords: *multifrequency signals, digital treatment, system of linear algebraic equalizations, least-squares method.*