

## ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЇ ПЛИТИ У ВИПАДКУ ПОВНОГО ТА ІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТІВ НА МЕЖІ ЗАКРІПЛЕННЯ

*Розглядається деформація навантаженої стійки у вигляді прямокутного паралелепіпеда в умовах плоского деформованого стану. На нижній межі, вздовж якої стійка спряжена з абсолютно жорстким півпростором, розглянуто два типи умов: повний та ідеальний контакт. Проводиться аналіз впливу умов закріплення на розподіл напружень.*

**Ключові слова:** стійка, умови закріплення, повний контакт, ідеальний контакт, плоска деформація.

### Вступ

Дослідження конструкцій, елементами яких є прямокутні плити, є актуальним науковим напрямком. Задача визначення напружень, які виникають у твердому тілі, на яке тисне інше тверде тіло, відноситься до класу контактних задач теорії пружності [1], при цьому міцність тіла залежить від умов його закріплення.

У світі постійно зростають темпи промислового та аграрного виробництва, тому все більш актуально стає необхідність перевезення великої кількості важких вантажів на залізничних платформах, у кузовах вантажних машин, на палубах трансатлантичних лайнерів та у багажних відділеннях літаків. При перевезенні вантажів їх потрібно закріплювати. Існує багато способів закріплення, описаних, наприклад, у [2]. Безпека транспортування вантажів та їх схоронність суттєво залежать від правильності розміщення та закріплення вантажу. Недостатнє закріплення вантажу на транспортному засобі може призвести до його пошкодження, втрати або виникненню аварійної ситуації у зв'язку із зміщенням погано закріпленого вантажу [3, 4]. Таким чином, транспортування ненадійно закріпленого вантажу дорогами загального користування небезпечно для інших учасників дорожнього руху. У зв'язку з чим представлене дослідження є актуальним.

Метою цієї роботи є розробка математичної моделі процесу деформування стійки в найпростішому випадку статичної пружної плоскої деформації та проведення чисельних досліджень на основі побудованої моделі.

Отримано точний розв'язок задачі у вигляді рядів Фур'є, коефіцієнти яких є функціями від вертикальної координати. Приведено чисельні приклади, які ілюструють вплив межових умов на розподіл напружень у плиті. Подібні задачі для випадку параболічного штампу докладно розв'язані в [5].

### Постановка задачі

Розглянемо випадок, коли вантаж розміщується на спеціальних стійках і фіксується. Стійки закріплюються

таким чином, щоб виключити їх рух як абсолютно твердого тіла, але ж основа стійки може бути або механічно зчеплена з платформою, або довільно стояти на платформі таким чином, щоб виключити горизонтальні рухи. З точки зору механіки мова йде про повний (зчеплення) або ідеальний (проковзування) контакти.

В якості моделі стійки будемо розглядати прямокутний паралелепіпед скінченної довжини, вісь якого паралельна осі  $Oz$  і який знаходиться в умовах плоскої деформації. Якщо візьмемо один з перетинів  $z = \text{const}$ , то матимемо задачу про вигін смуги, що займає область  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq y \leq h$  (рис. 1). На верхню межу смуги тисне гладкий абсолютно жорсткий штамп, який переміщується вертикально. Оскільки ми розглядаємо статичну задачу, то будемо вважати, що в кінцевому положенні рівняння лінії, яку описує нижня межа штампу відомо і має вигляд  $y = f(x)$ ,  $x \in [0, l]$  (рис. 2), значить, виконується умова

$$v(x, h) = f(x) - h. \quad (1)$$

Визначимо тепер межові умови, які відповідатимуть двом видам закріплення стійки, що аналізуються. Гладкість штампу означає, що на верхній межі смуги дотичні напруження нульові:

$$\tau_{xy}(x, h) = 0. \quad (2)$$

За аналогією з [6] вважаємо, що бокові сторони смуги зчеплені з тонкими листами – діафрагмами, що дозволяють точкам смуги, які з ними зчеплені, вільно переміщуватися в горизонтальному напрямку і не дозволяють переміщуватися у вертикальному напрямку. Математичний запис описаних умов має вигляд

$$v(0, y) = 0, v(l, y) = 0. \quad (3)$$

У випадку зчеплення будемо вважати, що нижня межа смуги (при  $y = 0$ ) спаяна з абсолютно жорсткою

основою. Це означає, що вертикальні та горизонтальні переміщення точок смуги, які лежать на цій межі, дорівнюють нулю, тобто

$$u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = 0. \quad (4)$$

Для випадку ідеального контакту вертикальні переміщення та дотичні напруження точок смуги, що лежать на нижній межі, дорівнюють нулю:

$$v(x,0) = 0, \quad \tau_{xy}(x,0) = 0. \quad (5)$$

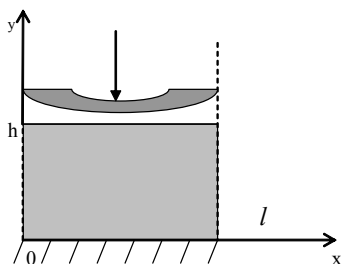


Рис. 1.

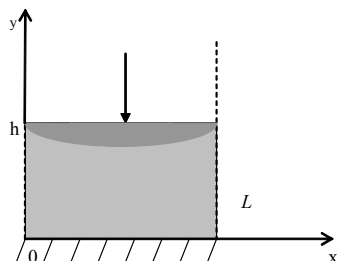


Рис. 2.

Таким чином, нам потрібно знайти функції, які задовольняють системі рівнянь Ламе і межовим умовам (1)–(4) для випадку зчеплення та межовим умовам (1)–(3), (5) у випадку ідеального контакту. Зауважимо, що оскільки  $\sigma_x(0, y) = 0$ , то при такій деформації нормальні напруження на бокових діафрагмах будуть дорівнювати нулю.

### Метод розв'язання

Оскільки функція  $v(x, y)$  задовольняє однорідним межовим умовам (1)–(3), то будемо її шукати у вигляді тригонометричного ряду за синусами як і в [5]:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(y) \sin(\alpha k x). \quad (6)$$

Тут  $\alpha = \pi/l$ .

У цьому випадку розклади функції  $u(x, y)$ ,  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$ ,  $\tau_{xy}(x, y)$  у тригонометричні ряди матимуть вигляд:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(y) \cos(\alpha k x), \quad \sigma_x = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(y) \sin(\alpha k x),$$

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(y) \cos(\alpha k x), \quad \sigma_x = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(y) \sin(\alpha k x). \quad (7)$$

Встановимо тепер зв'язок між функціями  $V_k, U_k, S_k, M_k$  та  $T_k$ . Для цього підставимо розклади (6) та (7) в кожне з рівнянь системи Ламе [1]. Отримаємо такі розклади:

$$V_k = (A_k + yB_k)ch(\alpha ky) + (C_k + yD_k)sh(\alpha ky),$$

$$U_k = 2 \left( \frac{(1-\nu)}{\alpha k} B_k + \nu C_k + \nu y D_k \right) ch(\alpha ky) + 2 \left( \frac{(1-\nu)}{\alpha k} D_k + \nu A_k + \nu y B_k \right) sh(\alpha ky),$$

$$S_k = -2\mu \left( (3-2\nu) B_k + \alpha k C_k + \alpha ky D_k \right) ch(\alpha ky) + \left( (3-2\nu) D_k + \alpha k A_k + \alpha ky B_k \right) sh(\alpha ky),$$

$$M_k = 2 \left( \alpha k A_k + \alpha ky B_k + (1-2\nu) D_k \right) sh(\alpha ky) + \left( \alpha k C_k + \alpha ky D_k + (1-2\nu) B_k \right) ch(\alpha ky),$$

$$T_k = \mu \left[ \begin{aligned} & (A_k(1+2\nu)\alpha k + 2D_k)ch(\alpha ky) + \\ & B_k \alpha k(1+2\nu)y \cdot ch(\alpha ky) + \\ & (C_k(1+2\nu)\alpha k + 2B_k)sh(\alpha ky) + \\ & D_k \alpha k(1+2\nu)y \cdot sh(\alpha ky) \end{aligned} \right]. \quad (8)$$

Тут  $A_k, B_k, C_k, D_k$  – довільні константи.

Із межових умов (1)–(4) або (1)–(3), (5) із врахуванням розкладів (6), (7) та виразів (8) матимемо системи лінійних рівнянь відносно невідомих  $A_k, B_k, C_k$  та  $D_k$ . Розв'язок відповідної системи для випадку зчеплення має вигляд:

$$\begin{cases} A_k = 0, \\ B_k = \nu \alpha k \Omega (2ch(\alpha kh) + \alpha kh(1+2\nu)sh(\alpha kh)), \\ C_k = -\Omega (2(1-\nu)ch(\alpha kh) + \alpha kh(1+\nu-2\nu^2)sh(\alpha kh)), \\ D_k = \Omega (\alpha kh\nu(1+2\nu)ch(\alpha kh) - (1-\nu-2\nu^2)sh(\alpha kh)), \end{cases} \quad (9)$$

де позначено  $\Omega = \delta_k / [2\nu \alpha kh - (1-\nu)sh(2\alpha kh)]$ .

Аналогічно знайдено розв'язок системи у випадку ідеального контакту:

$$\begin{cases} A_k = 0, \\ B_k = -\alpha k \Psi (1+2\nu), \\ C_k = \Psi (2 + \alpha kh(1+2\nu)cth(\alpha kh)), \\ D_k = 0, \end{cases} \quad (10)$$

тут позначено  $\Psi = \delta_k / 2sh(\alpha kh)$ .

Підставивши знайдені коефіцієнти (9) або (10) в ряди (6), (7) для нормальних напружень  $\sigma_x, \sigma_y$  та дотичних напружень  $\tau_{xy}$  матимемо шукані розв'язки вказаних функцій у тригонометричні ряди. Отриманні результати застосуємо для аналізу впливу умов закріплення на нижній межі плити на розподіл у ній нормальних та дотичних напружень.

**Результати чисельного моделювання**

Наведемо результати чисельного моделювання деформації плити штампом у випадках, коли на нижній межі виконуються умови зчеплення та ідеального контакту. Візьмемо  $l = \pi$ ,  $h = 1$ ,  $\nu = 0,25$ . Напруження будемо відносити до модуля зсуву  $\mu$ .

Будемо вважати, що поверхня штампу представляє собою одну хвилю синусоїди, тобто рівняння верхньої межі смуги після деформації буде мати вигляд

$$f(x) = h - p \sin x, \quad (11)$$

де  $p$  – достатньо мале додатне число, яке має розмірність довжини і характеризує вигін поверхні штампу.

У цьому випадку вертикальні переміщення точок смуги описуються формулою:

$$v(x, h) = f(x) - h = -p \sin x. \quad (12)$$

Розкладемо функцію (12) у ряд Фур'є і отримаємо рівність:

$$-p \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \sin kx.$$

В силу однозначності розвинення функції в ряд Фур'є матимемо, що лише один із коефіцієнтів  $\delta_k$  відмінний від нуля, а це означає, що для отримання точного розв'язку нам достатньо в рядах (6), (7) утримати лише перші доданки.

Отримаємо явні розклади функцій переміщень та напружень окремо для кожного з випадків:

1) Повний контакт. З формул (9) для отримаємо чисельні значення констант:

$$A_1 = 0, B_1 = 0,546p, C_1 = -1,638p, D_1 = -0,07p.$$

З урахуванням цього наведемо вирази для напружень та переміщень у випадку зчеплення:

$$\begin{aligned} u &= p(-0,035y \cdot chy + (-0,105 + 0,273y)shy)\cos x, \\ v &= p(0,546y \cdot chy + (-1,638 - 0,07y)shy)\sin x, \\ \sigma_x &= -\mu p((-1,092 + 0,035y)chy + (0,245 - 0,243y) \cdot shy)\sin x, \\ \sigma_y &= -\mu p((-3,276 - 0,175y)chy + (-0,105 + 1,365y) \cdot shy)\sin x, \\ \tau_{xy} &= \mu p((-0,14 + 0,819y) \cdot chy + (-1,365 + 0,105y)shy)\cos x. \end{aligned} \quad (13)$$

Зауважимо, що в рамках заданої точності виконуються відповідні межові умови та рівняння теорії пружності.

2) Ідеальний контакт. З формул (10) отримаємо наступні чисельні значення констант:

$$A_1 = 0, B_1 = -0,638p, C_1 = 1,689p, D_1 = 0.$$

Вирази для напружень та переміщень у випадку проковзування приймають вид:

$$\begin{aligned} u &= p(0,113 \cdot chy + 0,319yshy)\cos x, \\ v &= p(0,638y \cdot chy - 1,689shy)\sin x, \\ \sigma_x &= \mu p(1,389chy + 0,319y \cdot shy)\sin x, \\ \sigma_y &= -\mu p(3,265chy - 1,595y \cdot shy)\sin x, \\ \tau_{xy} &= -\mu p(0,957y \cdot chy + 1,257shy)\cos x. \end{aligned} \quad (14)$$

Для цього випадку також можна безпосередньо переконатися, що в рамках заданої точності виконуються відповідні межові умови та рівняння теорії пружності.

Далі наведемо результати чисельних розрахунків для двох видів межових умов: випадку зчеплення (13) та випадку ідеального контакту (14).

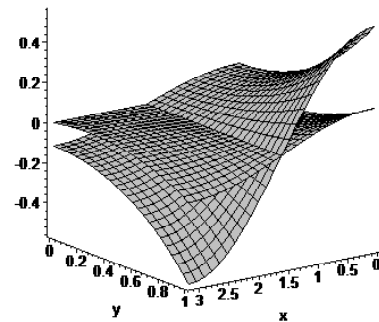


Рис. 3. Переміщення  $u(x, y)/p$

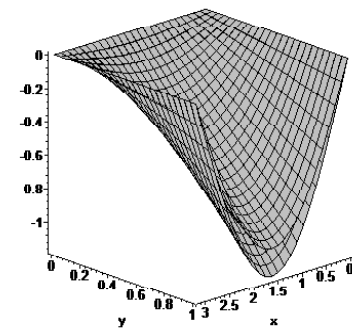


Рис. 4. Переміщення  $v(x, y)/p$

На рис. 3–4 зображено типові графіки функцій горизонтальних та вертикальних переміщень точок плити для двох типів межових умов при значенні товщини  $h = 1$ .

Аналіз графіків 3–6 показав, що вертикальні переміщення  $\frac{v(x, y)}{p}$  практично не залежать від виду межових умов; горизонтальні переміщення  $\frac{u(x, y)}{p}$  для

$x \in (0; \pi/2)$  більші для випадку ідеального контакту, а для  $x \in (\pi/2; \pi)$  більші для випадку зчеплення; в точці  $x = \pi/2$  графіки переміщень перетинаються. Нормальні напруження  $\frac{\sigma_x(x, y)}{\mu p}$  для ідеального контакту

більші ніж у випадку зчеплення, а нормальні напруження  $\frac{\sigma_y(x, y)}{\mu p}$  для ідеального контакту менші, ніж для ви-

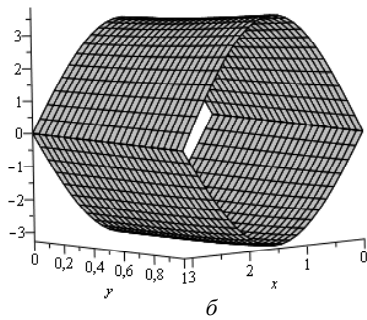
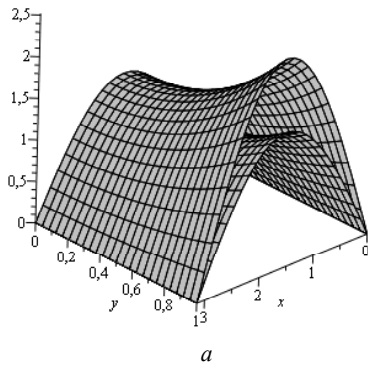


Рис. 5. Нормальні напруження:  $a - \frac{\sigma_x(x, y)}{\text{МПа}}$ ,  $b - \frac{\sigma_y(x, y)}{\text{МПа}}$

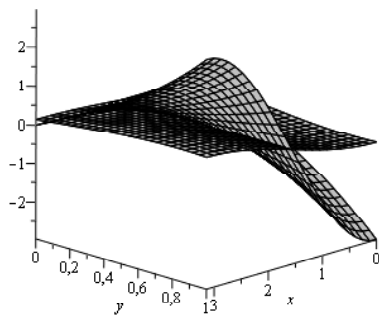


Рис. 6. Дотичні напруження  $\frac{\tau_{xy}(x, y)}{\text{МПа}}$

падку зчеплення. Дотичні напруження в смугі у випадку ідеального контакту незначно відрізняються від нуля, а у випадку зчеплення відбувається значний перерозподіл дотичних навантажень. Як можна побачити, межові умови на нижній межі найбільш сильно впливають на перерозподіл дотичних навантажень у плиті.

### Штефан Т.А. Численне моделювання деформації плити в разі повного та ідеального контактів на границі закріплення

*Рассматривается деформация нагруженной стойки в виде прямоугольного параллелепипеда в условиях плоского деформированного состояния. На нижней границе, вдоль которой стойка сопряжена с абсолютно жестким полупространством, рассмотрены два типа условий: полный и идеальный контакт. Проводится анализ влияния условий закрепления на распределение напряжений.*

**Ключевые слова:** стойка, условия закрепления, полный контакт, идеальный контакт, плоская деформация.

### Shtefan T. Numerical modeling of the deformation plate in case of complete and perfect contact at the border consolidation

*We consider the deformation of the loaded rack in the form of direct parallelepiped in terms of plane strain state. At the lower boundary, along which the stable coupled with rigid half-space, considered two types of conditions: a complete and perfect contact are considered. The analysis of the effects of consolidation on the stress distribution.*

**Key words:** front, fixing condition, complete contact, perfect contact, elastic deformation.

## Висновки

У даній роботі наведена математична постановка задачі про плоску деформацію однорідної невагомої ізотропної пружної смуги, яка знаходиться під тиском зі сторони абсолютно жорсткого штамп. Розв'язано статичну задачу методом розкладу функцій переміщень та навантажень в тригонометричні ряди. Отримано точний розв'язок задачі у вигляді рядів Фур'є, коефіцієнти яких є функціями від вертикальної координати.

Розглянуто два типи межових умов на межах, які не контактують зі штампом, а саме умови зчеплення та умови ідеального контакту. Для обох задач отримані розрахункові формули та проведено детальний чисельний аналіз.

## Список літератури

1. Ворovich И. И. Механика контактных взаимодействий / Ворovich И. И., Александров В. М. – М. : Физматлит, 2001. – 670 с.
2. Егоров С. А. Совершенствование методики расчета элементов крепления в статически неопределимых схемах закрепления единичного груза / Егоров С. А., Гребенюк, Л. А., Хорунжин, С. Ю. // Известия ТРАССИБА. – Омский государственный университет путей сообщения (Омск) : Вып. № 4. – 2011. – С. 87–94.
3. Калитвенцев А. Ю. Совершенствование методов размещения и крепления грузов на автомобильном транспорте / Калитвенцев А. Ю. // Актуальные проблемы эксплуатации АТС. Матер. междунар. научн.-практич. конф. – Владимир, 20–22 ноября 2007. – С. 64–67.
4. «Правила безопасного размещения и крепления грузов в кузове автомобильного транспортного средства», Респ. Беларусь, утв. 10 октября 2005 г., Постановление № 58.
5. Величко О. В. Вплив геометричних і пружних характеристик плити на положення зон можливої пластичної деформації / О. В. Величко, Т. О. Штефан // Вісник ХНУ. Секція МІА. – Харків. – 2013. – № 1063. – С. 51–56.
6. Власов В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – Москва : ГИФМЛ, 1960. – 490 с.

Одержано 01.10.2014