

## БИМОДАЛЬНЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ

Методом Рэля-Ритца построено общее решение системы дифференциальных уравнений собственных изгибных колебаний консольного стержня. Показано, что при наличии симметрии сечения колебания вдоль осей симметрии являются нормальными. Построено и проанализировано уравнение траектории свободного конца стержня.

**Ключевые слова:** консольный стержень, обобщённые координаты, уравнение колебаний, частотное уравнение, фигуры Лиссажу.

### Введение

Дальнейшее совершенствование технологий высокоточной механической обработки делает актуальным исследование колебаний обрабатывающего инструмента (резцы, фрезы) [1]. Моделирование колебаний резца сводится к исследованию колебаний консольного стержня. Представляет интерес определение траектории свободного конца консоли с учётом возможности движения в двух независимых направлениях.

### Материалы и методика исследований

В работе с использованием сочетания метода Рэля-Ритца и приближений, принимаемых в сопротивлении материалов, решается задача о бимодальных собственных колебаниях консольного стержня.

**Теория и анализ полученных результатов.** Пусть однородный призматический стержень массой  $m$  и длиной  $\ell$  закреплён консольно (рис. 1).

Форму поперечного сечения пока будем считать до известной степени произвольной. На рис. 1 сечение изображено в форме прямоугольника лишь в иллюстративных целях. Модуль Юнга материала обозначим через  $E$ . Ограничимся рассмотрением изгибных собственных колебаний.

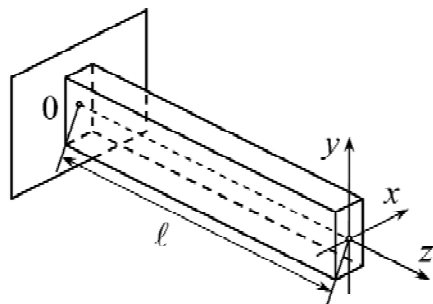


Рис. 1. Консольный стержень

Вычислим кинетическую энергию стержня. Пусть  $f(z)$  – функция прогиба. Будем считать, что в точке  $z = 0$  стержня выполнена жёсткая заделка, а точка  $z = \ell$  стержня свободна. Тогда имеет смысл принять граничные условия в следующем виде [2]:  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$ ,  $f''(\ell) = 0$ ,  $f'''(\ell) = 0$ . Таким условиям удовлетворяет, например, функция

$$f(z) = \frac{z^2}{2\ell} - \frac{z^3}{3\ell^2} + \frac{z^4}{12\ell^3}.$$

При вычислении кинетической энергии стержня будем считать, что в случае малых колебаний смещением точек вдоль оси  $Oz$  можно пренебречь. Тогда уравнения движения центра тяжести поперечного сечения, расположенного в точке с координатой  $z$ , следует принять в виде

$$\begin{cases} x(z, t) = f(z) \cdot q_1(t); \\ y(z, t) = f(z) \cdot q_2(t). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  – две обобщённые координаты (их количество соответствует принимаемому нами количеству степеней свободы рассматриваемой колебательной системы). Пространственный фактор  $f(z)$  в этих двух соотношениях мы не различаем, поскольку изгибы в горизонтальной плоскости  $xOz$  и в вертикальной плоскости  $yOz$  происходят одинаково (с точностью до масштабирующего коэффициента, который можно считать отнесённым к множителям  $q_1$ ,  $q_2$ ).

Выделим дифференциально малый элемент длины  $dz$  стержня, расположенный в точке с координатой  $z$ . Поскольку стержень однороден, то масса этого элемента  $dm = \frac{m}{\ell} dz$ . В момент времени  $t$  компоненты векто-

ра скорости этого элемента вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$  равны  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  (точка означает производную по времени). Квадрат скорости

$$v^2 = (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = [f(z)]^2 \cdot [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2].$$

Элементарная кинетическая энергия

$$dT = \frac{(dm)v^2}{2} = \frac{m[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2]}{2\ell} \cdot [f(z)]^2 dz.$$

Суммируя энергии по всем элементам длины, получаем:

$$T = \frac{a}{2} \cdot [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2].$$

Здесь обозначено

$$a = \frac{m}{\ell} \cdot \int_0^\ell [f(z)]^2 dz.$$

Вычислим потенциальную энергию упругой деформации стержня, считая, что имеются только нормальные напряжения. Предположим пока, что изгиб стержня обусловлен действием момента  $M_x$ , поворачивающего поперечное сечение вокруг оси  $Ox$  (рис. 2, слева). Нейтральная линия стержня при этом оказывается плоской кривой в плоскости  $yOz$ .

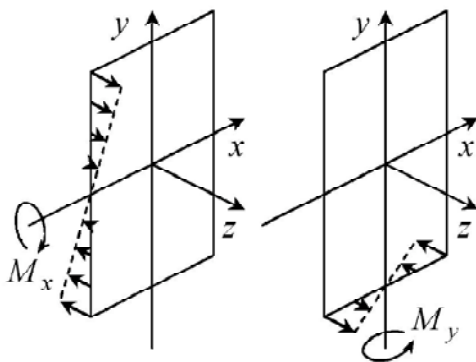


Рис. 2. Распределение нормальных напряжений в поперечном сечении

В поперечном сечении возникает нормальное напряжение  $\sigma_1$ , линейно распределённое по ординате  $y$  (и независимое от абсциссы  $x$ ). Закон этого распределения имеет вид [3]:

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{I_x} \cdot \eta.$$

Здесь  $I_x$  – осевой момент инерции сечения относительно оси  $Ox$ . Выражая отношение  $\frac{M_x}{I_x}$  из известного [3] уравнения чистого изгиба балки  $y'' = \frac{M_x}{EI_x}$  (здесь

вторая производная взята по продольной координате  $z$ ), получаем:

$$\sigma_1 = Ey'' \cdot \eta = Ef''(z)q_2(t) \cdot \eta.$$

Предположим теперь, что изгиб стержня обусловлен действием момента  $M_y$ , поворачивающего поперечное сечение вокруг оси  $Oy$  (рис. 2, справа). Нейтральная линия стержня при этом оказывается плоской кривой в плоскости  $xOz$ . В поперечном сечении возникает нормальное напряжение  $\sigma_2$ , линейно распределённое по абсциссе  $x$  (и независимое от ординаты  $y$ ). Закон этого распределения имеет вид:

$$\sigma_2 = \frac{M_y}{I_y} \cdot \xi.$$

Здесь  $I_y$  – осевой момент инерции сечения относительно оси  $Oy$ . Аналогично получаем

$$\sigma_2 = Ef''(z)q_1(t) \cdot \xi.$$

При описании распределения напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  по площади поперечного сечения мы для указания на конкретную точку сечения используем упорядоченную пару чисел  $(\xi, \eta)$ . Это координаты, отмеряемые по осям  $Ox$  и  $Oy$ . Координаты  $(x, y)$  отмеряются по тем же осям, но используются для описания смещения центра тяжести сечения из равновесного положения.

Предположим теперь, что оба момента,  $M_x$  и  $M_y$ , действуют одновременно. Подразумевая линейность закона Гука, можно использовать принцип суперпозиции. Общее нормальное напряжение при совместном действии двух силовых факторов возникает в результате наложения двух независимых вкладов  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . При этом достаточно построить обычную алгебраическую сумму, поскольку силы, фактически действующие на произвольный элемент  $dS = d\xi d\eta$  площади поперечного сечения, являются векторами, направленными вдоль одной и той же оси – оси  $Oz$ . Тогда

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = Ef''(z)[\xi q_1(t) + \eta q_2(t)].$$

Напряжённое состояние материала стержня, следовательно, можно рассматривать как одноосное, но неоднородное. Поэтому для вычисления локального значения объёмной плотности потенциальной энергии упругой деформации в точке  $(\xi, \eta, z)$  примем выражение  $w = \frac{\sigma^2}{2E}$ . Тогда полное значение этой энергии составляет

$$\Pi = \iiint w dV = \iiint \frac{\sigma^2}{2E} dz dS.$$

С использованием (2) получаем:

$$\Pi = \frac{E}{2} \int_0^{\ell} [f''(z)]^2 dz \left( q_1^2 I_y + 2q_1 q_2 J_{xy} + q_2^2 I_x \right).$$

Здесь согласно [4] обозначено:

$$I_y = \iint \xi^2 dS, \quad I_x = \iint \eta^2 dS, \quad J_{xy} = \iint \xi \eta dS.$$

Последний интеграл есть центробежный момент инерции сечения относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$  [4]. Обозначим также

$$c_{11} = EI_y \int_0^{\ell} [f''(z)]^2 dz, \quad c_{22} = EI_x \int_0^{\ell} [f''(z)]^2 dz, \\ c_{12} = c_{21} = EJ_{xy} \int_0^{\ell} [f''(z)]^2 dz.$$

Коэффициенты  $c_{ik}$  образуют симметричную матрицу квазиупругих констант. Окончательно:

$$\Pi = \frac{1}{2} \left( c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2 \right).$$

Легко показать, что эта квадратичная форма является положительно определённой. Следовательно, точка  $(q_1, q_2) = (0, 0)$  является положением устойчивого равновесия, а рассматриваемая система и в самом деле обладает колебательными свойствами.

Составим систему уравнений Лагранжа для консервативной механической системы [5]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2.$$

Используя выражения для кинетической и потенциальной энергий системы, получаем:

$$\begin{cases} a\ddot{q}_1 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0; \\ a\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Получили систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Ниже к этой системе будут присовокуплены начальные условия в виде четырёх значений  $q_1(0)$ ,  $\dot{q}_1(0)$ ,  $q_2(0)$ ,  $\dot{q}_2(0)$ , необходимые для построения частных решений.

Общее решение системы (3) ищем в виде  $q_j(t) = A_j \sin(\omega t + \varphi)$ . Подставляя эти выражения в систему (3), получаем:

$$\begin{pmatrix} c_{11} - a\omega^2 & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} - a\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Т. к. эта система однородна, то для существования нетривиальных решений её матрица должна быть вырожденной. Отсюда имеем частотное уравнение:

$$(a\omega^2 - c_{11})(a\omega^2 - c_{22}) - c_{12}^2 = 0.$$

Его решения

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{c_{11} + c_{22} \pm \sqrt{(c_{11} - c_{22})^2 + 4c_{12}^2}}{2a}. \quad (5)$$

Получили спектр собственных частот. С использованием этих частот получаем общее решение системы (3) в виде:

$$\begin{cases} q_1(t) = A_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2); \\ q_2(t) = A_{21} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22} \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \end{cases}$$

Начиная с этого момента, амплитуды  $A_{ji}$  мы должны сопровождать двумя индексами. Первый индекс совпадает с номером  $j$  координаты  $q_j$ , а второй указывает, на какой частоте происходит колебание с этой амплитудой. Как видим, режим колебаний в общем случае оказывается бигармоническим.

При  $\omega = \omega_1$  или  $\omega = \omega_2$  система (4) оказывается вырожденной. Следовательно, между амплитудами  $A_{ji}$  должна существовать линейная зависимость. Найдём её.

Рассмотрим один частный случай, когда колебания являются гармоническими и происходят на частоте  $\omega_1$ . Частное решение

$$\begin{cases} q_1(t) = A_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1); \\ q_2(t) = A_{21} \sin(\omega_1 t + \varphi_1). \end{cases}$$

Из системы (4) получаем  $A_{21} = \kappa_{21} A_{11}$ , причём

$$\kappa_{21} = \frac{a\omega_1^2 - c_{11}}{c_{12}}.$$

Рассмотрим другой частный случай, когда колебания являются гармоническими и происходят на частоте  $\omega_2$ . Частное решение

$$\begin{cases} q_1(t) = A_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2); \\ q_2(t) = A_{22} \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \end{cases}$$

Из системы (4) получаем  $A_{22} = \kappa_{22} A_{12}$ , причём

$$\kappa_{22} = \frac{a\omega_2^2 - c_{11}}{c_{12}}.$$

Коэффициенты  $\kappa_{21}$ ,  $\kappa_{22}$  являются коэффициентами формы, т. к. они определяют собственные формы

колебаний в рассматриваемой системе. Эти коэффициенты имеют простой смысл. Пусть начальные условия таковы, что обе обобщённые координаты,  $q_1$  и  $q_2$ , колеблются по гармоническому закону с частотой  $\omega_1$ . Тогда в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия отклонение второй координаты будет в  $\kappa_{21}$  раз больше отклонения первой. Именно это и определяет форму (т. е. конфигурацию) системы. Роль коэффициента  $\kappa_{22}$  аналогична, но при осуществлении гармонических колебаний с частотой  $\omega_2$ .

С использованием коэффициентов формы общее решение системы (3) можно представить в виде

$$\begin{cases} q_1 = A_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2); \\ q_2 = \kappa_{21} A_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \kappa_{22} A_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \end{cases}$$

Теперь это решение содержит четыре неопределённых коэффициента:  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ . Их можно найти с использованием четырёх начальных условий (начальное значение и начальная скорость каждой обобщённой координаты).

Рассмотрим различные частные решения. При практических расчётах мы можем иметь дело с поперечными сечениями различных геометрий. Если поперечное сечение имеет хотя бы одну ось симметрии (далее мы рассмотрим только такие случаи), то эта ось является главной осью [4]. Центробежный момент инерции  $J_{xy}$  относительно главных осей равен нулю [4]. Для нас это означает, что  $c_{12} = 0$ . Тогда система (3) принимает вид

$$\begin{cases} a\ddot{q}_1 + c_{11}q_1 = 0; \\ a\ddot{q}_2 + c_{22}q_2 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Решение этой системы очевидно:

$$\begin{cases} q_1(t) = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t; \\ q_2(t) = C \cos \omega_2 t + D \sin \omega_2 t. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь  $\omega_1 = \sqrt{\frac{c_{11}}{a}}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{\frac{c_{22}}{a}}$ . Именно такой спектр собственных частот мы и получили бы из (5) при условии  $c_{12} = 0$ . В этом случае координаты  $q_1$ ,  $q_2$  становятся главными (нормальными). Каждая из них независимо совершает гармоническое колебание на своей собственной частоте.

Рассмотрим теперь два случая.

В первом случае будем считать, что частоты равны:  $\omega_2 = \omega_1$ . Это возможно, если  $c_{22} = c_{11}$ , т.е. если  $I_x = I_y$ . Такое равенство имеет место, например, для круглых и квадратных сечений.

Рассмотрим движение свободного конца стержня в плоскости  $z = \ell$ . Пусть в момент времени  $t = 0$  свободному концу стержня придали координаты  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  и свободно отпустили. Согласно (1) имеем:

$$\begin{cases} x_0 = f(\ell) \cdot q_1(0); \\ y_0 = f(\ell) \cdot q_2(0). \end{cases}$$

Тогда начальные условия сформулируем в виде (два последних соотношения соответствуют отсутствию начальной скорости):

$$\begin{cases} q_1(0) = \frac{x_0}{f(\ell)}; \\ q_2(0) = \frac{y_0}{f(\ell)}; \\ \dot{q}_1(0) = 0; \\ \dot{q}_2(0) = 0. \end{cases}$$

Подставляя сюда уравнения (7), находим:  $B = D = 0$ ,

$A = \frac{x_0}{f(\ell)}$ ,  $C = \frac{y_0}{f(\ell)}$ . Тогда частное решение принимает вид

$$\begin{cases} q_1(t) = \frac{x_0}{f(\ell)} \cos \omega_1 t; \\ q_2(t) = \frac{y_0}{f(\ell)} \cos \omega_1 t. \end{cases}$$

Окончательно, уравнения движения свободного конца

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos \omega_1 t; \\ y(t) = y_0 \cos \omega_1 t. \end{cases}$$

Исключая отсюда  $t$ , получаем уравнение траектории движения свободного конца стержня:  $\frac{y}{y_0} = \frac{x}{x_0}$ .

Таким образом, в этом случае свободный конец стержня возвращается назад по прямой, проходящей через начало координат.

Во втором случае будем считать, что частоты различны:  $\omega_2 \neq \omega_1$ . Это возможно, например, для прямоугольных сечений с различными сторонами. Повторяя все рассуждения о начальных условиях, получаем

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos \omega_1 t; \\ y(t) = y_0 \cos \omega_2 t. \end{cases} \quad (8)$$

Эта система также задаёт уравнение траектории движения  $y = y(x)$  (в параметрическом виде). Форма (8) оказывается удобной для численного построения фигуры Лиссажу [6], каковой фигурой теперь и будет яв-

ляться траектория движения. Напомним, фигура Лиссажу может оказаться самопересекающейся незамкнутой кривой, если частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  несоизмеримы. Поэтому представляет интерес вычислить отношение этих частот. Имеем:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{c_{11}}{c_{22}}} = \sqrt{\frac{I_y}{I_x}}.$$

Если эта величина окажется рациональным числом, то частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соизмеримы. Тогда фигура Лиссажу окажется самоналагающейся периодически повторяющейся. Общий период колебаний  $x(t)$  и  $y(t)$  может быть найден как наименьшее общее кратное периодов  $T_1 = 2\pi/\omega_1$  и  $T_2 = 2\pi/\omega_2$ . Если же отношение  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  – иррациональное число, то частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  несоизмеримы. Общий период не существует вовсе, а траектория незамкнута.

#### Выводы

В работе методом Рэлея-Ритца построено общее решение системы дифференциальных уравнений, описывающих собственные изгибные колебания консоль-

ного призматического стержня. Показано, что при наличии симметрии сечения стержня колебания вдоль осей симметрии являются нормальными колебаниями. Построено уравнение траектории свободного конца стержня и установлено, что его график – фигура Лиссажу. Вычислено отношение собственных частот (рациональность которого определяет замкнутость траектории), в зависимости от геометрических параметров сечения.

#### Список литературы

1. Altintas Y. Manufacturing automation : metal cutting mechanics, machine tool vibrations, and CNC design / Yusuf Altintas. – Cambridge : Cambridge University Press, 2012. – 382 p.
2. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний / Пановко Я. Г. – М. : Наука, 1971. – 240 с.
3. Сопrotивление материалов / [Писаренко Г. С., Агарев В. А., Квитка А. Л. и др.]. – [4-е изд.]. – К. : Вища шк., 1979. – 696 с.
4. Геометрические характеристики плоских сечений [Эл. ресурс]. – Режим доступа : [www.soprotmat.ru/geom.htm](http://www.soprotmat.ru/geom.htm).
5. Савельев И. В. Основы теоретической физики / Савельев И. В. – М. : Наука, 1991. – 496 с.
6. Анпилогов Д. И. Введение в теорию колебаний / Анпилогов Д. И., Снижко Н. В. : Пальмариум, 2014. – 172 с.

Одержано 07.04.2015

#### Анпілогов Д.І. Бімодальні згинальні коливання консольного стрижня

*Методом Релея-Рітца побудовано загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь власних згинальних коливань консольного стрижня. Показано, що за наявності симетрії перетину коливання уздовж осей симетрії є нормальними. Побудовано та проаналізовано рівняння траєкторії вільного кінця стрижня.*

**Ключові слова:** консольний стрижень, узагальнені координати, рівняння коливань, частотне рівняння, фігури Лиссажу.

#### Anpilogov D. Bimodal flexural vibrations of a cantilever beam

*The general solution of the system of differential equations of natural flexural oscillations of a cantilever beam is received by Rayleigh-Ritz method. It is shown that if symmetry of the cross section is presence then oscillations along the axes are normal. The trajectory equation of the free end of the beam is constructed and analyzed.*

**Key words:** cantilever beam, generalized coordinates, equation of oscillations, frequency equation, Lissajous figures.