УДК 539.3

Канд. техн. наук Ю. В. Мастиновский

Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье

ТЕРМОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В ПОЛОМ КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ

Рассматривается цилиндрический слой упругого изотропного материала, находящегося под действием нестационарных нагрузок: нормального напряжения и объемного термоудара. Получено численно-аналитическое решение плоской задачи термоупругости, основанное на использовании термоупругого потенциала перемещений и разложения в ряд Фурье. Коэффициенты Фурье определяются численно с применением метода характеристик.

Ключевые слова: *цилиндрический слой, термоупругие волны, напряжения, метод характеристик.*

Введение

Последствия температурных напряжений следует учитывать при решении многих инженерных задач, например, при разработке и эксплуатации ГТД, ядерных реакторов и др. [1–3]. Реакции различных материалов на механические воздействия ударного типа очень разнообразны и часто качественно и количественно отличаются от их реакций при статических нагрузках. Изучение термоупругого деформирования материалов при нестационарных силовых и тепловых воздействиях тесно связано с разработкой математических моделей их поведения [4, 5].

Имеющиеся в литературе аналитические решения динамических термоупругих задач получены обычно для полубесконечных и бесконечных тел и тел со сферической и цилиндрической симметрией. Классическим методом решения таких задач являются интегральные преобразования [3]. К недостаткам этого метода можно отнести сложности нахождения оригинала по изображению и необходимость заново проводить преобразования при изменении вида нагрузки. Трудности использования интегральных преобразований возрастают при расчетах элементов конструкций конечных размеров в случае распределенных нагрузок, приложенных к ограниченной части поверхности, и если рассматриваются сложные законы изменения внешней нагрузки по времени.

Известные в литературе аналитические решения динамических термоупругих задач настолько громоздки, что без численных расчетов невозможно провести качественный анализ напряженно-деформированного состояния конструкции.

Цель данной работы состоит в разработке упрощенной математической модели и методики расчета для использования в инженерной практике, позволяющих проводить исследования рассматриваемой конструкции при различных значениях геометрических и механических параметров, а также видов нагружения.

Постановка задачи

Рассмотрим в полярных координатах (r,φ) полый круговой цилиндр изотропного материала, ограниченный цилиндрическими поверхностями $r=a$ и $r=b$ ($a<b$). К поверхности слоя $r=a$ внезапно прикладывается нормальное сжимающее напряжение $\sigma_r=-P_0H(t)$ интенсивности P_0 и одновременно производится объемный термоудар $T=T_0H(t)$. Здесь $H(t)$ – единичная функция Хевисайда или иная функция, определяющая закон изменения нагрузки в зависимости от времени t. Считаем, что поверхность слоя $r=b$ свободна от напряжений. В результате совместного воздействия нагрузок в цилиндрическом слое будут распространяться волны напряжений и смещений.

Математическая модель и методика расчета

Используя термоупругий потенциал ψ [6], позволяющий определить перемещения для плоской деформации в полярных координатах, уравнение движения запишем в виде

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\beta T, \qquad (1)$$

где $\beta=\alpha(3\lambda+2\mu)/(\lambda+2\mu)=\alpha(1+\nu)/(1-\nu)$,

α – коэффициент линейного расширения; λ, μ – параметры Ляме;

ν – коэффициент Пуассона;

$c^2=(\lambda+2\mu)/\rho$ – квадрат скорости распространения радиальной волны,

ρ – плотность материала; t – время.

Радиальная и окружная компоненты перемещения в полярных координатах имеют вид

$$U=\frac{\partial\psi}{\partial r},\ V=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}. \qquad (2)$$

С использованием закона Дюамеля-Неймана выражение для напряжения σ_r определяется так:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\nu}{r}\left(U + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) - \alpha(1+\nu)T\right). \quad (3)$$

Уравнение (1) будем решать при таких начальных и граничных условиях:

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \qquad \text{при} \qquad t = 0,$$

$$\sigma_r = -P_0 H(t) \qquad \text{при} \qquad r = a,$$

$$\sigma_r = 0 \qquad \text{при} \qquad r = b. \quad (4)$$

Температуру принимаем в виде

$$T = T_0 H(t).$$

В более общем случае распределение температуры несимметрично относительно оси, но не зависит от осевой координаты.

Разложим температуру и термоупругий потенциал в ряды Фурье по косинусам:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(r,t)\cos n\varphi, \quad \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(r,t)\cos n\varphi. \quad (5)$$

Уравнение (1) для определения ψ_n примет вид

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}\psi_n - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2} = \beta T_n. \quad (6)$$

Вводя безразмерные величины

$$\left\{\tilde{r}, \tilde{U}, \tilde{V}\right\} = \frac{1}{b}\{r, U, V\}, \qquad \tilde{t} = \frac{ct}{b}$$

и опуская в дальнейшем для простоты записи верхний знак «~», запишем (6) так:

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial r^2} + R_n = \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2}, \quad (7)$$

где

$$R_n = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}\psi_n - \beta T_n, \quad n = 0,1,2,\ldots. \quad (8)$$

Предположим, что заданные законы давлений на поверхностях цилиндрического слоя также разложены в ряд по формуле

$$\sigma_r = \rho c^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(t)\cos n\varphi. \quad (9)$$

Решения уравнений (7) находим при помощи метода характеристик [7, 8]. Уравнения характеристик и соотношения на них имеют вид:

$$dr = \pm dt, \qquad d\left(\frac{\partial \psi_n}{\partial t}\right) = \pm d\left(\frac{\partial \psi_n}{\partial r}\right) + R_n\, dt \quad .(10)$$

Для проведения расчетов область между прямыми $r = r_1 = a/b$, $r = 1$ и $r = t + r_1$ покрывается сеткой характеристик (рис. 1):

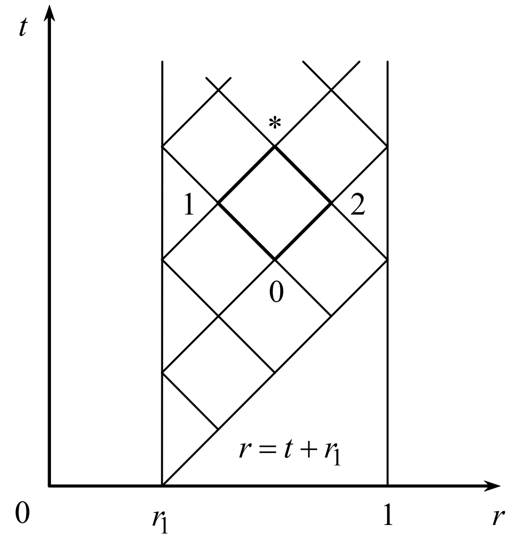

Рис. 1.

Для расчета коэффициентов ψ_n используются формулы

$$\psi_n^* = \psi_n^0 + 2\Delta t \cdot \psi_{nt}^0,$$

где $\psi_{nt}^0 = \dfrac{\partial \psi_n^0}{\partial t}$.

Значения коэффициентов во внутренних узлах сеточной области вычисляются по формулам:

$$\psi_{nt}^* = \frac{1}{2}\left(\psi_{nt}^2 + \psi_{nt}^1 + \psi_{nr}^2 - \psi_{nr}^1 + \left(R_n^2 + R_n^1\right)\Delta t\right),$$

$$\psi_{nr}^* = \frac{1}{2}\left(\psi_{nt}^2 - \psi_{nt}^1 + \psi_{nr}^2 + \psi_{nr}^1 + \left(R_n^2 - R_n^1\right)\Delta t\right).$$

Значения выражений R_n находим по формулам (8).

При расчете значений коэффициентов в точках, лежащих на границах области, исключаются из рассмотрения узлы сетки, лежащие на характеристиках, выходящих из сеточной области. Определив по данной расчетной схеме все значения коэффициентов ψ_n и их производных ψ_{nt} и ψ_{nr}, можно вычислить коэффициенты напряжений σ_n и сами напряжения по формуле (9).

Результаты расчетов и обсуждения

Для проверки работы вычислительной схемы были сделаны расчеты для случая, когда на внутренней границе цилиндрического слоя действует только нормальное напряжение, т. е.

$$\sigma_n(t) = (\lambda + 2\mu)t, \qquad \text{а} \qquad T_n = 0;$$

$r_1 = 0{,}8$; $\Delta t = 0{,}01$ – шаг по времени;

$\nu = 0{,}3$ – коэффициент Пуассона.

Полученные результаты хорошо согласуются с известными, полученными другими методами [3, 4].

Выводы

Предложенная модель и методика расчета рассматриваемой конструкции позволяют проводить численные эксперименты по выявлению областей, наиболее расположенных к повреждениям, в результате действия на нее нестационарного давления и объемного термоудара. Задание других граничных условий не требует изменений расчетной схемы для внутренних узлов сетки. Проведение численных экспериментов, сравнение различных теорий и зависимостей дают возможность не только понять качественную картину распространения термоупругих волн, но и получить обоснованные рекомендации по практическому использованию конструкций данного вида.

Список литературы

1. Партон В. З. Методы математической теории упругости / В. З. Партон, П. И. Перлин // М. : Наука. главн. ред. физ.-матем. лит. – 1981. – 588 с.
2. Беляев Н. М. Методы теории теплопроводности. В 2-х частях / Н. М. Беляев, А. А. Рядно // Ч. 1. – М. : Высш. школа. – 1982. – 237 с.
3. Коваленко А. Д. Термоупругость / А. Д. Коваленко // К. : Вища школа – 1975. – 216 с.
4. Bala Kiran. A Review of Two-Temperature Thermoelasticity / Kiran Bala // International Journal of Modern Engineering Research (IJMER), Vol. 2, Issue 6. – 2012. – P. 4224–4227.
5. Шамровский А. Д. Термоупругие волны и скорость их распространения в динамической задаче взаимосвязанной термоупругости / А. Д. Шамровский, Г. В. Меркотян // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. Выпуск № 7 (53), Том 5. – 2011. – С. 41–45.
6. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука. – 1975. – 576 с.
7. Chou P.C. A Unified Approach One-Dimensional Elastic Waves by the Method of Characteristics / P. C. Chou, R. W. Mortimer // Journal of Applied Mechanics, Vol. 34, № 3. –1967. – P. 745–750.
8. Сагамонян А. Я. Волны напряжений в сплошных средах / А. Я. Сагамонян // М. : Изд-во МГУ. – 1985. – 416 с.

Одержано 03.04.2015

Мастиновський Ю.В. Термопружні хвилі в порожнистому циліндрі

Розглядається циліндричний шар пружного ізотропного матеріалу, який перебуває під дією нестаціонарних навантажень: нормального навантаження і об'ємного термоудару. Отримано чисельно-аналітичний розв'язок плоскої задачі термопружності з використанням термопружного потенціалу переміщень та розкладанні в ряд Фур'є. Коефіцієнти Фур'є визначаються чисельно з використанням методу характеристик.

Ключові слова: *циліндричний шар, термопружні хвилі, напруження, метод характеристик.*

Mastinovsky Yu. Thermo-elastic waves in hollow cylinder

Cylindrical layer of elastic isotropic material under non-stationary loads-normal stress and volumetric thermal shock – is being considered. Numerical analytical solution of plane thermo-elastic problem is based on thermo-elastic displacement potential and development in Fourier series. Fourier coefficients being defined numerically by characteristics method have been obtained.

Key words*: cylindrical layer, thermo-elastic waves, stresses, method of characteristics.*