III МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В МЕТАЛУРГІЇ ТА МАШИНОБУДУВАННІ

УДК 531; 539.3

Канд. техн. наук Ю. А. Лымаренко

Запорожская государственная инженерная академия, г. Запорожье

ОПРЕДЕЛЕНИЕ БАЗОВЫХ ВАРИАНТОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДИСКРЕТНОГО ЭЛЕМЕНТА

При построении дискретных моделей сплошной упругой среды отдельной проблемой является определение упругих характеристик используемой модели. Предложена методика поиска такого базиса в пространстве векторов перемещений пространственного дискретного элемента, который позволит в дальнейшем, решая обратные задачи в континуальной и дискретной постановках и сопоставляя получаемые результаты, находить искомые жесткости.

Ключевые слова: *сплошная упругая среда, пространственный дискретный элемент, перемещения, базис, симметризация и антисимметризация векторов.*

Введение

В серии работ [1–3] был предложен дискретный подход к решению задач механики деформируемого твердого тела, предполагающий использование дискретной модели сплошной упругой среды и проведение расчетов по этой модели с помощью метода последовательных перемещений [4]. Были рассмотрены модели для плоских статических задач теории упругости. Для оценки адекватности моделей использовалось сравнение результатов, получаемых с помощью теории упругости и на основе дискретных моделей. Максимальной близости результатов, а в угловых точках модели – полного совпадения, удалось достичь в том случае, когда жесткости упругих связей дискретной брали модели, зависящие от вида деформирования элемента. В этом случае упругие связи в дискретной модели принято было рассматривать не как физические объекты, а как некоторые абстракции, с помощью которых моделируются упругие характеристики сплошной среды.

Проводя аналогию с плоской моделью можно предположить, что и в пространственном случае для обеспечения максимальной адекватности нужно также брать модели жесткости упругих связей, зависящие от характера деформирования дискретного элемента. В связи с этим возникает необходимость среди всех возможных вариантов деформирования выделить базовые, для которых и будут в дальнейшем рассчитываться жесткости упругих связей. В настоящей работе изложена методика, позволяющая выполнить эту задачу на основе процесса симметризации.

Симметризация и антисимметризация вектора перемещений дискретного элемента

Рассмотрим дискретный элемент в форме куба (рис. 1). Перемещения вершин элемента в направлении координатных осей, сонаправленных ребрам параллелепипеда, обозначим через u_i, v_i, w_i, $i=\overline{1,\,8}$. Тогда перемещение всего элемента будет задаваться вектором в двадцатичетырехмерном пространстве:

$$\mathbf{U}=\left(u_1,\,v_1,\,w_1,\,u_2,\,v_2,\,w_2,\,\ldots,\,u_8,\,v_8,\,w_8\right). \quad (1)$$

Рис. 1. Перемещения вершин дискретного элемента

Элементы этого вектора представляют собой коэффициенты в разложении вектора $\mathbf{U}$ по базисным векторам:

$$\mathbf{x}_1=(1,\,0,\,\ldots,\,0),$$
$$\mathbf{x}_2=(0,\,1,\,\ldots,\,0),$$
$$\ldots$$
$$\mathbf{x}_{24}=(0,\,0,\,\ldots,\,1), \quad (2)$$

© Ю. А. Лымаренко, 2016

каждый, из которых соответствует перемещению одной из вершин элемента в одном из трех взаимно перпендикулярных направлений.

Вместо системы векторов (2) построим новый базис, каждый элемент которого будет отвечать за один из базовых вариантов деформирования дискретного элемента. Для построения базиса будем использовать операцию симметризации векторов перемещений. Сопутствующие преобразования для большей наглядности будем иллюстрировать графически.

Рассмотрим три плоскости симметрии: 1–2 – плоскость, проходящая перпендикулярно стороне 1–2 через ее середину; 1–4; 1–5 – аналогично.

Вначале выполняем симметризацию S и антисимметризацию A относительно плоскости 1–2 (рис. 2). Под симметризацией здесь и далее подразумевается операция нахождения полусуммы двух векторов, под антисимметризацией – полуразности этих векторов. Так, например, $u_1^s = (u_1 + u_2)/2$, $u_1^a = (u_1 - u_2)/2$ и т. д. При этом, чтобы не загромождать изображения, на рисунке 2 (и на всех последующих) верхние индексы «s» и «a», обозначающие соответственно результат выполнения операций симметризации и антисимметризации, опущены.

Затем для каждого из полученных случаев выполняем симметризацию S и антисимметризацию A относительно плоскости 1–4, получая уже четыре случая: SS, SA, AS, AA (рис. 3).

Далее для каждого из полученных случаев выполняем симметризацию S и антисимметризацию A относительно плоскости 1–5, получая восемь случаев: SSS, SSA, SAS, SAA, ASS, ASA, AAS, AAA (рис. 4).

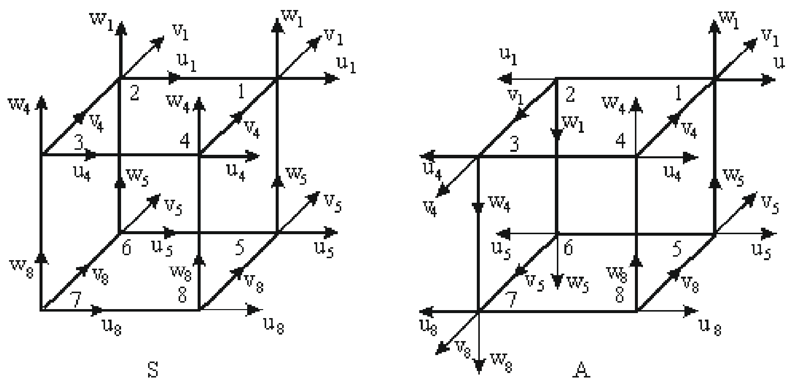

Рис. 2. Первый этап симметризации перемещений: относительно плоскости 1–2

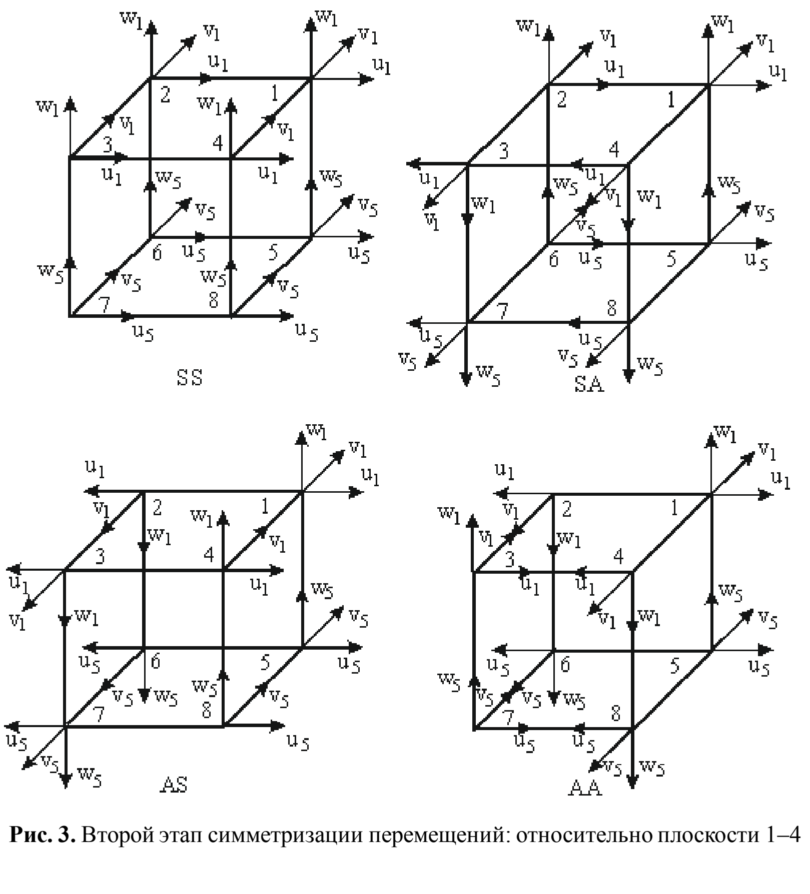

Рис. 3. Второй этап симметризации перемещений: относительно плоскости 1–4

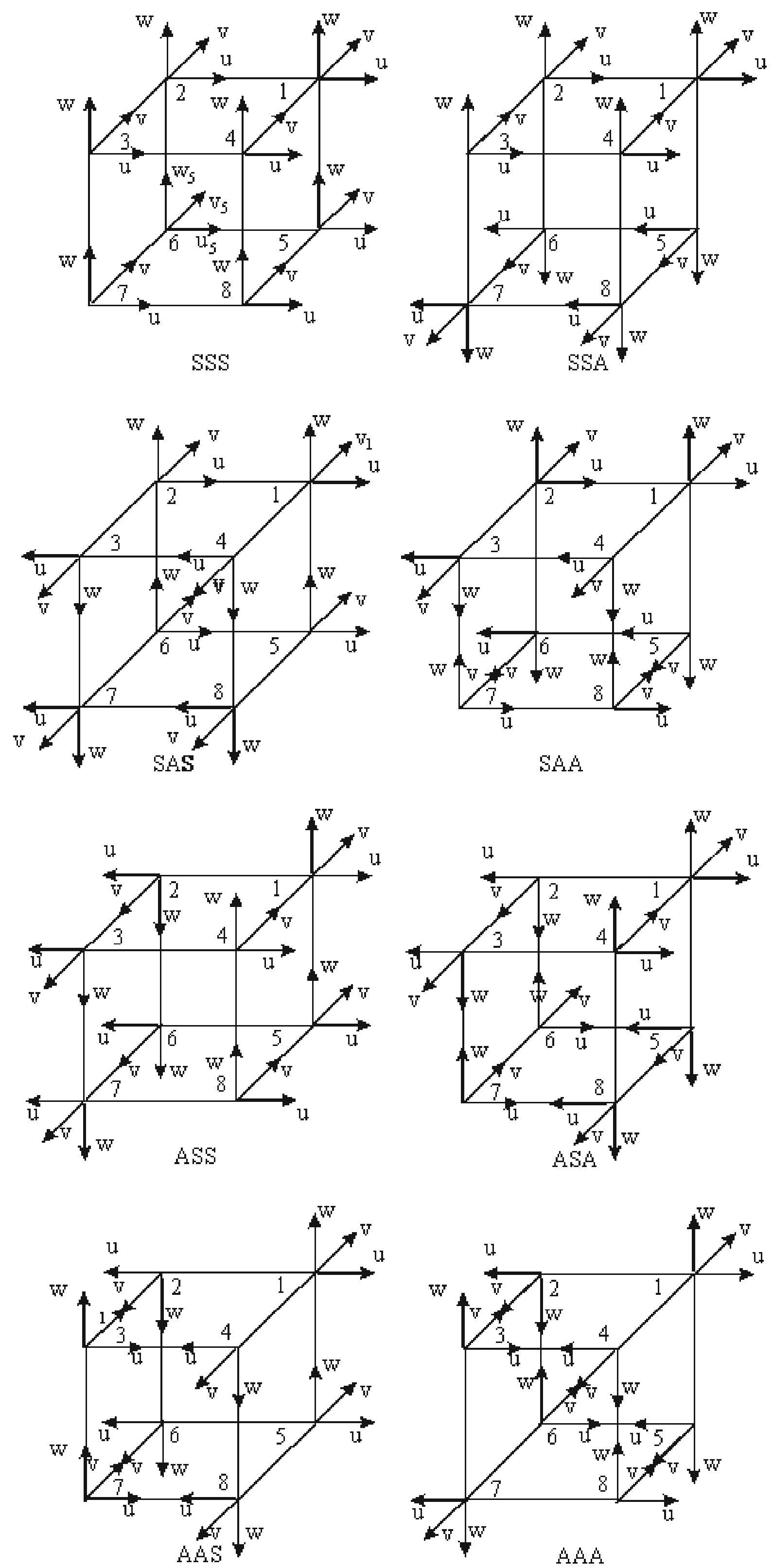

Рис. 4.Третий этап симметризации перемещений: относительно плоскости 1–5

В каждом из построенных восьми случаев выделяем варианты, содержащие только ненулевые значения u, только ненулевые значения v и только ненулевые значения w, получая в итоге 24 окончательных результата, представленных на рисунке 5.

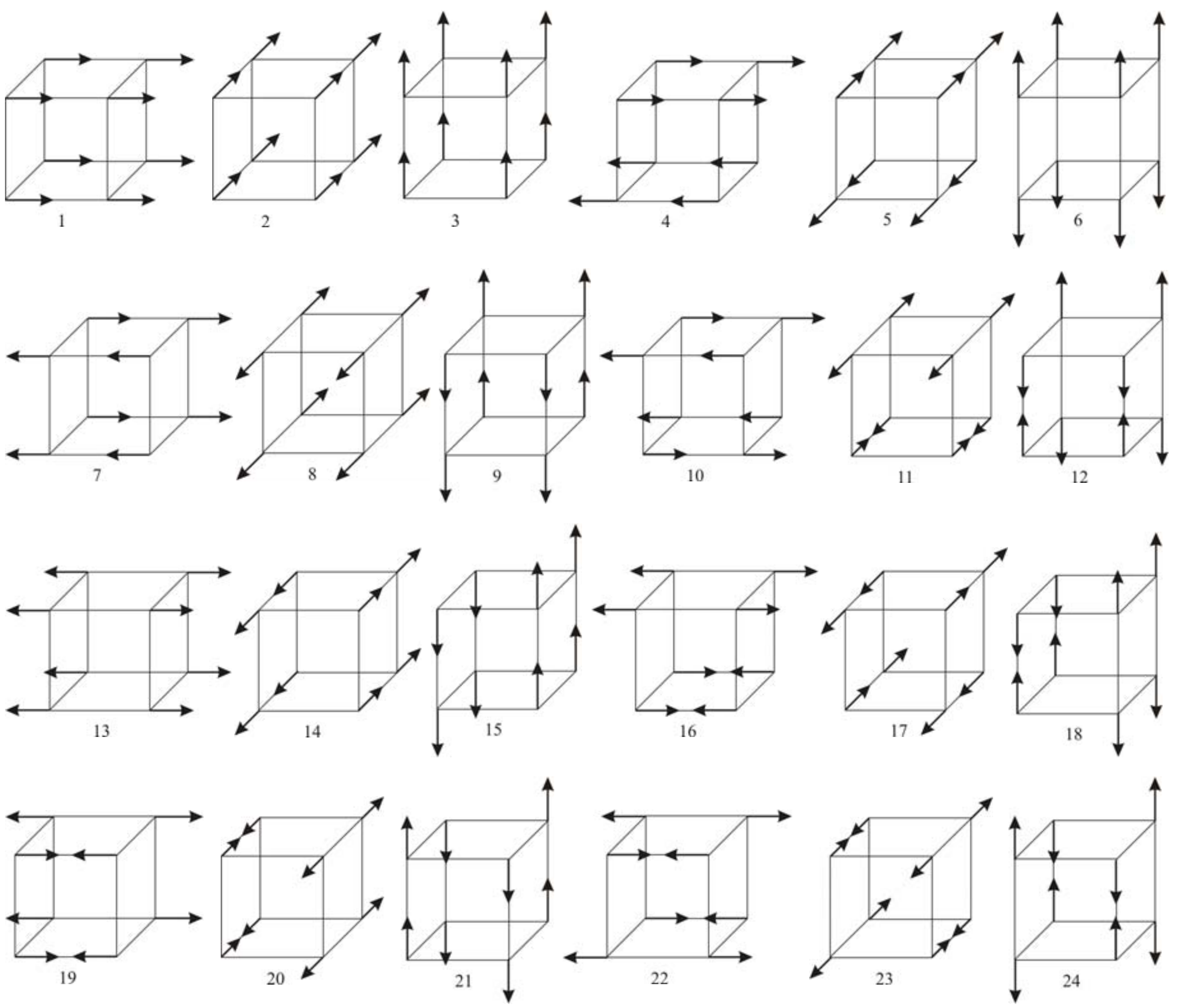

Рис. 5. Геометрическая иллюстрация новых базисных

С помощью рисунка 5 легко записать координаты базисных векторов. Так, для первых векторов из каждой тройки будем иметь:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}_1 &= (1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0),\\
\mathbf{y}_4 &= (1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0),\\
\mathbf{y}_7 &= (1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0),\\
\mathbf{y}_{10} &= (1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0),\\
\mathbf{y}_{13} &= (1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0),\\
\mathbf{y}_{16} &= (1,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0),\\
\mathbf{y}_{19} &= (1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0),\\
\mathbf{y}_{22} &= (1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,-1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0).
\end{aligned}
$$

Координаты остальных двух векторов из каждой тройки могут быть получены последовательным смещением координат приведенных векторов на одну и две позиции соответственно.

В отличие от базисных векторов (2) новые базисные вектора имеют наглядный физический смысл. Каждый из этих векторов отвечает за один из базовых вариантов деформирования пространственного дискретного элемента:

$\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_3$ – поступательные перемещения;

$\mathbf{y}_6$, $\mathbf{y}_8$, $\mathbf{y}_{13}$ – растяжения-сжатия;

$\mathbf{y}_{11}$, $\mathbf{y}_{12}$, $\mathbf{y}_{16}$, $\mathbf{y}_{18}$, $\mathbf{y}_{19}$, $\mathbf{y}_{20}$ – изгибы;

$\mathbf{y}_{10}$, $\mathbf{y}_{17}$, $\mathbf{y}_{21}$ – кручения;

$\mathbf{y}_{22}$, $\mathbf{y}_{23}$, $\mathbf{y}_{24}$ – самоуравновешенные деформации;

$\mathbf{y}_{4}$, $\mathbf{y}_{15}$, $\mathbf{y}_{5}$, $\mathbf{y}_{9}$, $\mathbf{y}_{7}$, $\mathbf{y}_{14}$ – попарно комбинация сдвига и поворота.

Из последней шестерки векторов можно с помощью линейной комбинации в явном виде выделить:

$\mathbf{y}_4+\mathbf{y}_{15}$, $\mathbf{y}_5+\mathbf{y}_9$, $\mathbf{y}_7+\mathbf{y}_{14}$ – сдвиги;

$\mathbf{y}_{15}-\mathbf{y}_4$, $\mathbf{y}_9-\mathbf{y}_5$, $\mathbf{y}_{14}-\mathbf{y}_7$ – повороты.

Представим вектор (1) в виде разложения по новым базисным векторам:

$$\mathbf{U}=\sum_{i=1}^{24} s_i \mathbf{y}_i . \qquad (3)$$

Обратим внимание на то, что вектора $\mathbf{y}_i$ являются взаимно ортогональными:

$$\mathbf{y_i}\cdot\mathbf{y_j}=0 \ \left(i,\ j=1,\ ...,\ 24;\ i\neq j\right).$$

Это позволяет находить коэффициенты разложения (3) следующим образом:

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{y_i}=s_i\mathbf{y_i}\cdot\mathbf{y_i} .$$

Следовательно,

$$s_i=\frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{y_i}}{\mathbf{y_i}\cdot\mathbf{y_i}} \quad \left(i=1,...,24\right).$$

Выводы

Использование операции симметризации вектора перемещений позволило выделить базовые варианты деформирования дискретного элемента, имеющие наглядный физический смысл. В дальнейшем, для определения упругих характеристик дискретной модели достаточно будет решить задачи в континуальной и дискретной постановках в пределах каждой из выделенных категорий и сопоставить получаемые результаты. Кроме того, использование разложения вектора $\mathbf{U}$ по базисным векторам (3) упростит расчет напряженно-деформированного состояния конструкций на основе пространственной дискретной модели с помощью метода последовательных перемещений [4].

Список литературы

1. Шамровский А. Д. Решение плоских статических задач механики деформируемого твердого тела при помощи дискретных моделей, получаемых на основе экспериментальных данных / А. Д. Шамровский, Ю. А. Лымаренко, Д. Н. Колесник // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Зб. наук. праць. – Дніпропетровськ : Ліра. – 2011. – Вип. 17. – С. 274–288.
2. Шамровський О. Д. Дискретна модель плоского елементу скінченних розмірів для ортотропного середовища / О. Д. Шамровський, Т. О. Міняйло // Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – Дніпропетровськ : Ліра, 2012. – Вип. 13. – С. 428–436.
3. Шамровский А. Д. Напряжения в деформированном дискретном элементе / А. Д. Шамровский, Д. Н. Колесник // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. Серия «Прикладная механіка». – 2013. – Вып. 3/7 (63). – С. 12–15.
4. Шамровский А. Д. Усовершенствованный метод последовательных перемещений для расчета пространственных стержневых конструкций / А. Д. Шамровский, Т. А. Миняйло, Д. Н. Колесник // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2012. – № 1. – С. 83–86.

Одержано 20.10.2016

Лимаренко Ю.О. Визначення базових варіантів деформування просторового дискретного елемента

При побудові дискретних моделей суцільного пружного середовища окремою проблемою є визначення пружних характеристик використовуваної моделі. Запропоновано методику пошуку такого базису в просторі векторів переміщень просторового дискретного елемента, що дозволить надалі, розв’язуючи зворотні задачі в континуальній і дискретній постановках і зіставляючи одержувані результати, знаходити шукані жорсткості.

Ключові слова: *суцільне пружне середовище, просторовий дискретний елемент, переміщення, базис, симетризація і антисиметризація векторів.*

Lymarenko Yu. Defining a basic types of spatial discrete element deformations

Construction a discrete models of continuous elastic medium involves a problem of model elastic characteristics determination. Technique of finding a basis in the space of displacement vectors of spatial discrete element is proposed. Obtained basis will enable in future to evaluate the sought stiffnesses by comparing a results of solving an inverse problems in discrete and continues formulations.

Key words: *continuous elastic medium, the spatial discrete element, displacement, basis, symmetrization and antisymmetrization vectors.*