5. Использование титановых порошков в методах 3D печати изделий / А. А. Джуган, В. Е. Ольшанецкий, А. В. Овчинников и др. // Новые материалы и технологии в металлургии и машиностроении. – 2016. – № 2. – С. 77–81.
6. Глотка О. А. Аналіз вітчизняних жароміцних порошків на нікелевій основі, які застосовуються в адитивних технологіях / О. А. Глотка, О. В. Овчинников // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2016. – № 2. – С. 39–42.

Одержано 28.11.2017

© **Канд. техн. наук В. М. Плескач**

Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье

Pleskach V. Modern technologies in powder metallurgy. Achievements and prospects

ОБ ОЦЕНКЕ НАДЕЖНОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПЛАНОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

В работе [1] автором была предпринята попытка улучшить подход для ряда практических случаев (например исследований в области металлургии и материаловедения) к созданию и оценке полнофакторных и дробных матриц планирования экспериментов (прежде всего для случаев ненасыщенных планов типа 2^3 и 2^{3-1}).

Использование же насыщенных матриц, когда число линейных уравнений, заданных в кодовом масштабе, равняется числу переменных, в качестве которых выступают коэффициенты этих уравнений, при стандартном планировании получают оценочные результаты которые, независимо от выбора центров планов, практически не содержат полезной информации. В то же время попытки использования композиционных надстроек из-за смешения полей распределения угловых коэффициентов и факторов влияния, отличающихся от стандартных единичных значений, приводит к результатам, не отвечающих принципу ротатабельности [2]. Это делает бессмысленным оценку ошибок расчетных значений функции отклика при их одинаковых отклонениях относительно центра ортогонального плана (из-за сильного отличия результатов таких оценок).

Полностью насыщенные матрицы ортогональных планов обязательно включают различные комбинации факторов у смешанных эффектах их совместного влияния, что приводит к уравнениям вида:

$$y_i = b_0 + b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + b_3x_{3i} + b_{12}x_{1i}x_{2i} + b_{13}x_{1i}x_{3i} + b_{21}x_{2i}x_{3i} + b_{123}x_{1i}x_{2i}x_{3i}\,, \tag{1}$$

в которых, кроме вышеуказанных недостатков, невозможно корректно оценивать эффективность отдельных смешанных оценок касательно конкретных влияний, определяющих их факторов.

В случае ненасыщенных планов ортогональных моделей в отсутствии учета смешанных эффектов полезно использовать коэффициенты множественной корреляции R, сопровождая их определением эмпирической ковариации (относительного корреляционного момента) согласно формулы, приведенной в работе [1, 3].

$$\mathrm{Cov}\,(x_{1(2)},y) = \frac{\sum_i^n x_{i1(2)}y_i}{n-1} \quad \text{при} \quad \sum_i^n (x_{1(2)i} - \bar{x}_{1(2)}) = 0\,. \tag{2}$$

Поскольку ковариация устанавливает глубину корреляционной связи, то для достижения приемлемого результата факторы влияния должны иметь единоразрядные значения [1]. Далее полезно привести корректный вывод формулы для оценки R, используя для упрощения техники вывода только двух угловых коэффициентов b_1 и b_2 в дискретном векторном поле их значений при заданных нормированных характеристиках (+1, -1) факторов влияния.

Как следует из схемы для плоского векторного поля (рис. 1), имеем 4 пары кодовых единиц ортогонального плана 2^2. В случае же объемного векторного поля (ортогональный план 2^3) имеем 8 троек единичных факторов (полный факторный эксперимент). То есть, полнота заполнения факторного пространства в виде сферы с координатными точками (полюсами) на ее поверхности в этих случаях отвечает двум симплексам (в первом – в виде вписанного в сферу тетрагонального тетраэдра с элементами симметрии ($\bar{4}2m$), а во втором – полносимметричного гексаэдра ($m3m$)). Для простейшего случая 4-х линейных уравнений соответствующие составляющие в виде векторов $\bar{r}_{1(2)}$ определяют множественный коэффициент корреляции как корень из суммы их квадратов, то есть $R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$, где

$$r_1 = \frac{\sum_i^n x_{1i} y_i}{\sqrt{\sum_i^n x_{1i}^2 \left(\sum_i^n y_i^2 - n\overline{y}^2 \right)}}, \quad r_2 = \frac{\sum_1^n x_{2i} y_i}{\sqrt{\sum_1^n x_{2i}^2 \left(\sum_1^n y_i^2 - n\overline{y}^2 \right)}}. \tag{3}$$

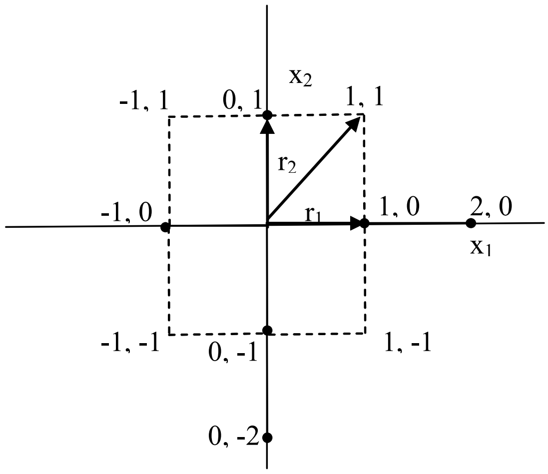

Рис. 1. Схема для плоского векторного поля составляющих (r_1 и r_2) коэффициентов множественной корреляции R

Приведенные соотношения имеют по сравнению со стандартными выражениями несколько упрощенный вид из-за отсутствия в них средних значений варьируемых факторов, так как они в этих выражениях в сумме отклонений от выбранной средней точки равняются нулю.

Поскольку в выражениях (3) числители дробей можно заменить значениями угловых коэффициентов ($b_1 = \frac{\sum_i^n x_{1i} y_i}{n}$ и $b_2 = \frac{\sum_i^n x_{2i} y_i}{n}$) линейных уравнений типа $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$, формула для R приобретает вид:

$$R = \sqrt{\frac{n^2 b_1^2}{n(\sum_i^n y_i^2 - n\overline{y}^2)} + \frac{n^2 b_2^2}{n(\sum_i^n y_i^2 - n\overline{y}^2)}} = \sqrt{\frac{n(b_1^2 + b_2^2)}{\sum_i^n y_i^2 - n\overline{y}^2}}. \tag{4}$$

Здесь суммы квадратов нормированных факторов влияния в зменателях дробей соотетствуют числу используемых уравнений (n).

Обобщая (4) на линейный трехмерный вариант, получаем выражение:

$$R = \sqrt{\frac{n(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}{\sum_i^n y_i^2 - n\overline{y}^2}}. \tag{5}$$

Легко убедиться (в качестве проверки конкретным расчетом и при использовании аналитики), что выражение (4) соответствует коэффициенту корреляции для двух наборов значений (экспериментальных и расчетных) функций отклика

$$r_{\text{эксп./расч.}} = \frac{\sum_i^n y_i^{\text{расч.}} y_i^{\text{эксп.}} - n\overline{y}_i^{\text{расч.}} \overline{y}_i^{\text{эксп.}}}{\sqrt{(\sum_i^n y_{i.\text{расч}}^2 - n\overline{\text{y}}_{\text{расч}}^2)(\sum_i^n y_{i.\text{эксп}}^2 - n\overline{\text{y}}_{\text{эксп}}^2)}}. \tag{6}$$

Для этого примем, что $y_{эi} = y_{1i}$, а $y_{расч.i} = y_{2i}$, а также $\overline{y_2} = b_0 + b_1\overline{x_1} + b_2\overline{x_2} = b_0$, поскольку для нашего случая $\overline{x_1} = \sum_i^n x_{1i} = 0$, $\overline{x_2} = \sum_i^n x_{2i} = 0$, $\sum_i^n x_{1i}^2 = \sum_i^n x_{2i}^2 = n$.

Тогда при условии, что $\sum_i^n y_{1i} = \sum_i^n y_{2i}$, получим

$$r_{\text{эксп./расч.}} = \frac{\sum_i^n y_{1i}(y_{2i} - \bar{y}_2)}{\sqrt{(\sum_i^n y_{1i}^2 - n\bar{y}_1^2)\sum_i^n y_{2i}^2}} = \sqrt{\frac{[\sum_i^n y_{1i}(y_{2i} - \bar{y}_2)]^2}{(\sum_i^n y_{1i}^2 - n\bar{y}_1^2)\sum_i^n y_{2i}^2}} = \sqrt{\frac{\sum_i^n y_{1i}^2(b_i^2 x_{1i}^2 + b_1 b_2 x_{1i} x_{2i} + b_2^2 x_{2i}^2)}{(\sum_i^n y_{1i}^2 - n\bar{y}_1^2)\sum_i^n y_{2i}^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{nb_1^2 \sum_i^n y_{1i}^2 + nb_2^2 \sum_i^n y_{1i}^2}{(\sum_i^n y_{1i}^2 - n\bar{y}_1^2)\sum_i^n y_{2i}^2}} = \sqrt{\frac{n(b_1^2 + b_2^2)}{\sum_i^n (y_i^2 - n\bar{y}^2)}}$$

. (В последнем выражении y_{1i} заменен на y_i).

Итак, если при реализации плана 2^3 получим соответствующее уравнение в кодовом масштабе с коэффициентом множественной корреляции R не менее 0,7 (при этом критический коэффициент корреляции (R^2) составит величину порядка 0,5) , то в ряде случаев часто это является приемлемым результатом. Этот коэффициент можно попытаться улучшить путем увеличения факторного пространства за счет учета одного из трех смешанных эффектов влияния ($b_{12}x_{1i}x_{2i}$, $b_{13}x_{1i}$ и $b_{23}x_{2i}x_{3i}$) и выбрать из трех оценок наилучший вариант (в смысле наибольшего значения R). При этом весьма желательно дать физическое объяснение причин преобладания «эффекта кооперации» факторов положительного влияния на улучшение расчетного значения функции отклика над «эффектом конкуренции» между обоими факторами в действующей паре, когда один из них несколько ослабляет положительное влияние другого.

Теперь остановимся на оценке среднеквадратической ошибки коэффициентов уравнения регрессии, заданного в кодовом масштабе, поскольку, как было отмечено в работе [1], использование эмпирических распределений, имитирующих закон Гаусса (распределение Стьюдента, Фишера и др.) из-за ограниченного числа испытаний, мало эффективно.

Состоятельный вариант равнозначных среднеквадратичных ошибок угловых коэффициентов b_j ($b_j = b_0, b_1, b_2, \dots b_k$), удовлетворяющее принципу ротатабельности, можно записать в виде следующего начального выражения:

$$(\Delta y^2) = \frac{\sum_i^n (y_i^{\text{эксп.}} - \bar{y}_i^{\text{эксп.}})^2}{n} \cong \frac{\sum_i^n (y_i - \bar{y}_i)^2}{n} = \frac{\sum_i^n (\Delta b_0)^2}{n} + \frac{(\Delta b_1)^2 \sum_i^n x_{1i}^2}{n} + \frac{(\Delta b_2)^2 \sum_i^n x_{2i}^2}{n} + \dots ,$$

где j изменяется от нулевого значения до величины k.

Поскольку везде $\sum_i^n (x_i)^2 = n$, то, с учетом того, что $\Delta b_j = \Delta b_0 = \Delta b_1 = \Delta b_2 = \dots$, и $\Delta b_j = b_j - B_j$ (B_j – истинные значения коэффициентов нормированного уравнения регрессии), получаем выражение:

$$\frac{\sum_i^n (y_i - \bar{y}_i)^2}{n} \approx \sum_i^n \Delta b_j^2 \approx \Delta b_j^2 \cdot (k+1),$$ откуда имеем

$$(\Delta b_j) \approx \pm \sqrt{\frac{\sum_i^n (y_i - \bar{y})^2}{n(k+1)}}, \qquad (7)$$

где k – число угловых коэффициентов данного уравнения.

Список литературы

1. Ольшанецкий В. Е. О физических подходах к математическому моделированию функциональных связей / В. Е. Ольшанецкий // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2003. – № 1. – С. 80–86.
2. Налимов В. В. Теория эксперимента / В. В. Налимов – М. : Наука, 1971. – 208 с.
3. Сквайрс Дж. Практическая физика / Дж. Сквайрс. – М. : Мир, 1971 – 246 с.

Одержано 10.12.2017

© **Д-р техн. наук В. Е. Ольшанецкий**

Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье

Ol'shanetskii V. On the evaluation of the reliability of orthogonal plans in the modeling of functional dependencies