УДК 519.9
П.І.Гінайло, В.О.Оніщук
Луцький національний технічний університет

ЗАДАЧА ПРО ОПТИМАЛЬНЕ ПАРАМЕТРИЧНЕ ЗБУДЖЕННЯ ОСЦИЛЯТОРА

В роботі розглянута задача оптимального керування для гармонічного осцилятора із змінною жорсткістю. Отриманий закон, при якому енергія досягає заданої величини за мінімальний проміжок часу.

Ключові слова: *гармонічний осцилятор, змінна жорсткість.*

Розглядається рівняння гармонічного осцилятора

$$\ddot{x}+f(t)x=0$$

із змінною жорсткістю $f(t)$. Потрібно розв'язати задачу оптимального керування

$$t_1\to\inf\ \ \ddot{x}+(1-\varepsilon u)x=0\ \ x(0)=x_0,\quad \dot{x}(0)=y_0,\quad x^2(t_1)+\dot{x}^2(t_1)=1\ \ 0\le u\le 1,\quad 0<\varepsilon<1.$$

В нашому випадку жорсткість $f(t)$ може змінюватися в межах $1-\varepsilon\le f\le 1$. У не збудженому стані, коли $u=0,\quad f=1$, то енергія осцилятора заключається у відшуканні закону збудження жорсткості осцилятора, при якому його енергія досягнула б заданої величини за мінімальний час.

Зведемо нашу задачу до стандартної задачі оптимального керування, поклавши $\dot{x}=y$

$$t_1\to\inf$$

$$\dot{x}=-y,\quad \dot{y}=-(1-\varepsilon u)x\ \ (0<\varepsilon<1)\ \ x(0)=x_0,\quad \dot{x}(0)=y_0,\quad x^2(t_1)+\dot{x}^2(t_1)=1\ \ 0\le u\le 1.$$

Застосуємо принцип Понтрягіна у формі Гамільтона. Функція H має вигляд

$$H=py-q(1-\varepsilon u)x,$$

а отже, спряжена система буде мати вигляд

$$\dot{p}=(1-\varepsilon u)q,\quad \dot{q}=-p.$$

Для імпульсів p і q виконуються умови трансверсальності

$$p(t_1)=-\mu x(t_1),\quad q(t_1)=-\mu y(t_1)$$

або

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{q}+(1-\varepsilon u)q=0\\ q(t_1)=-\mu\dot{x}(t_1),\quad \dot{q}(t_1)=\mu x(t_1)\end{array}\right\}\qquad(1)$$

Бачимо, що функції $x(t)$ і $q(t)$ задовільняють одному і тому ж рівнянню. Для оптимального керування принцип максимуму дає такий вираз

$$u(t)=\begin{cases}1, & qx>0\\ 0, & qx<0,\end{cases}\qquad(2)$$

або $u(t)=\theta(qx)$, де $\theta(\lambda)$ - функція Хевісайда. Знайдемо єдиний розв'язок вказаних співвідношень. Очевидно $\mu\ne 0$ бо інакше із (1) ми отримали б $q\equiv 0$, а це означає, що $p\equiv q\equiv 0$, а це не можливо в силу принципу максимуму. Отже, можемо вважати, що $\mu=1$. Тепер можемо бачити, що $u(t_1-0)=1$, інакше енергія ε досягалась би за час менший ніж t_1 (якщо $u\equiv 0$, то енергія не змінюється). Тоді із (1) і (2) отримуємо

$$0<q(t_1)x(t_1)=-x(t_1)\dot{x}(t_1).$$

Отже, точка $(x(t_1),\dot{x}(t_1))$ лежить у другій або четвертій четвертях фазової площини. В не збудженому стані (коли $u=0$) точки $(x(t_1),\dot{x}(t_1))$ і $(q(t_1),\dot{q}(t_1))$ здійснюють рух по колах у фазовій площині, а у збудженому стані - по еліпсах $x^2+\dfrac{\dot{x}^2}{1-\varepsilon}=a$ за годинниковою стрілкою.