УДК 534.621
Б.И.Дутчак
Луцкий национальный технический университет

ВОЗДЕЙСТВИЕ ВНЕШНЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИЛЫ НА ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ

Предложен метод определения обширного класса дифференциальных уравнений параметрических колебаний, которые интегрируются в квадратурах. Показан учет действия на такую систему периодической возмущающей силы. Приведен пример расчета.

Ключевые слова: *квадратуры, дифференциальнные уравнения.*

Введение. Колебания механических систем с постоянными коэффициентами трения, инерционными и квазиупругими коэффициентами к настоящему времени исследованы подробно. Однако, если колебания поддерживаются за счет изменения хотя бы одного из этих параметров, то подобные законы движения описываются аналитически достаточно сложно. Поэтому при их исследовании всегда используются приближенные решения, которые сводятся к определению устойчивых и неустойчивых зон таких колебаний [2,3].

Качественные оценки поведения амплитуд и периодов колебаний систем с уменьшающейся массой, которые получены приближенными методами, рассмотрены в работах [1,4]. В то же время такие важные характеристики как закон колебательного движения, скорость, ускорение, которые позволили бы полностью проанализировать поведение таких систем, вообще не рассматривались.

Точные решения большого класса подобных задач можно получить путем удачной замены искомой зависимой переменной, либо путем замены независимой переменной [7], который продемонстрирован ниже.

1. Условия интегрируемости дифференциальных уравнений параметрических колебаний

Представим исходное уравнение параметрических колебаний системы в виде:

$$m(t)\frac{d^2q}{dt^2}+\mu(t)\frac{dq}{dt}+c(t)q=0, \qquad (1.1)$$

где $m(t)$ и $c(t)$ - соответственно инерционный и квазиупругий коэффициенты, а $\mu(t)$ - коэффициент, характеризующий трение системы. Определим, каким условиям должны отвечать указанные параметры, чтобы уравнение (1.1) всегда можно было проинтегрировать в квадратурах. Для этого выбираем произвольную подстановку

$$z=f(t), \qquad (1.2)$$

и назовем $f(t)$ определяющей функцией. При этом полагаем, что указанная функция $f(t)>0$, дважды дифференцируемая и $f'(t)\neq 0$.

Обозначим:

$$\frac{dz}{dt}=f'(t)=\varphi(t). \qquad (1.3)$$

Учитывая это, представляем первую производную уравнения (1.1) в виде:

$$\frac{dq}{dt}=\frac{dq}{dz}\varphi(t).$$

Аналогично находим и вторую производную:

$$\frac{d^2q}{dt^2}=\frac{d}{dz}\left[\frac{dq}{dz}\varphi(t)\right]\frac{dz}{dt}=\frac{d^2q}{dz^2}\varphi^2(t)+\frac{dq}{dz}\varphi(t)\frac{d\varphi(t)}{dz}.$$

Собирая коэффициенты при одинаковых производных, перепишем уравнение (1.1) в виде:

$$\left[m(t)\varphi^2(t)\right]\frac{d^2q}{dz^2}+\left[m(t)\varphi(t)\frac{d\varphi(t)}{dz}+\mu(t)\varphi(t)\right]\frac{dq}{dz}+c(t)q=0 \qquad (1.4)$$

Его всегда можно проинтегрировать, если коэффициенты при $q, \dfrac{dq}{dz}$ и $\dfrac{d^2q}{dz^2}$ будут постоянными величинами. Поэтому считаем, что:

$$m(t)\varphi^2(t) = C_0. \tag{1.5}$$

$$m(t)\varphi(t)\frac{d\varphi(t)}{dz} + \mu(t)\varphi(t) = C_1, \tag{1.6}$$

$$c(t) = C_2. \tag{1.7}$$

При этом вместо (1.4) получим новое уравнение, выраженное через переменную z, но уже с постоянными коэффициентами:

$$C_0\frac{d^2q}{dz^2} + C_1\frac{dq}{dz} + C_2 q = 0. \tag{1.8}$$

Соответствующее ему характеристическое уравнение, а также его корни, имеют вид:

$$C_0 r^2 + C_1 r + C_2 = 0;\ r_{1,2} = \left(-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4C_0C_2}\right)\Big/2C_0. \tag{1.9}$$

Тогда решение уравнения (1.8) принимает общеизвестную форму:

$$q = K_1 e^{r_1 z} + K_2 e^{r_2 z}. \tag{1.10}$$

При этом колебания наблюдаются, если в корнях характеристического уравнения (1.9) соблюдается неравенство:

$$C_1^2 - 4C_0C_2 < 0. \tag{1.11}$$

А если в (1.10) перейдем к исходной переменной t, то учитывая (1.2), получим искомое решение в виде

$$q = K_1 e^{r_1 f(t)} + K_2 e^{r_2 f(t)}. \tag{1.12}$$

В случае действительных корней получаем апериодическое движение.

Рассмотрим колебательное движение, когда:

$$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i. \tag{1.13}$$

Тогда закон (1.12) можно представить в форме:

$$q = ae^{\alpha f(t)}\sin\left[\beta f(t) + \gamma\right], \tag{1.14}$$

где a и γ - постоянные величины, определяемые из начальных условий обычным порядком. Отсюда вытекает, что при параметрических колебаниях в общем случае изменяются как амплитуды, так и периоды колебаний. При этом поведение последних зависит от вида определяющей функции. В частности, если ее можно представить в виде

$$f(t) = kt^n,$$

где n - целое или дробное число, то могут быть такие случаи. При $n > 1$ полупериоды (а, следовательно, и периоды) колебаний уменьшаются, при $0 < n < 1$ полупериоды колебаний увеличиваются, а при $n = 1$ получаем простейший случай свободных колебаний системы с постоянными параметрами.

Что касается амплитуд колебаний, то при $\alpha f(t) < 0$ они убывают, при $\alpha f(t) > 0$ наблюдается случай параметрического резонанса, а при $\alpha = 0$ амплитуда постоянна и равна a.

Частные случаи таких параметрических колебаний при $z = \ln(1 \pm kt)$ приведены в работах [5,6].

Определим теперь, какими должны быть переменные параметры $m(t), \mu(t)$ и $c(t)$, чтобы исходное уравнение (1.1) допускало интегрирование в квадратурах. Используя равенство (1.5) с учетом (1.3) для первой формы исходного уравнения (когда квазиупругий коэффициент постоянный), находим:

$$m(t) = \frac{C_0}{\varphi^2(t)} = \frac{C_0}{\left[f'(t)\right]^2}. \tag{1.15}$$

Находим теперь аналогичное равенство для $\mu(t)$. Для этого предварительно выразим $\dfrac{d\varphi(t)}{dz}$ через исходную переменную t:

$$\frac{d}{dz}\left[\varphi(t)\right]=\frac{d}{dz}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=\frac{f''(t)}{f'(t)}. \tag{1.16}$$

Используя равенство (1.6) с учетом (1.16) и (1.15) после преобразований получим:

$$\mu(t)=\frac{C_1}{f'(t)}-\frac{C_0 f''(t)}{\left[f'(t)\right]^3}.$$

Величина $c(t)=C_2$ нами уже определена равенством (1.7). Подставляя в (1.1) выражения для $m(t),\mu(t)$ и $c(t)$, получим:

$$\frac{C_0}{\left[f'(t)\right]^2}\frac{d^2q}{dt^2}+\left\{\frac{C_1}{f'(t)}-\frac{C_0 f''(t)}{\left[f'(t)\right]^3}\right\}\frac{dq}{dt}+C_2 q=0. \tag{1.17}$$

Здесь, как и прежде, C_0,C_1,C_2 - постоянные коэффициенты характеристического уравнения (1.9) при новой переменной z, а $f(t)$ - определяющая функция. Уравнение (1.17) в случае необходимости путем умножения на $f'(t)$ или $\left[f'(t)\right]^2$ можно представить соответственно и в двух других формах:

$$\frac{C_0}{f'(t)}\frac{d^2q}{dt^2}+\left\{C_1-\frac{C_0 f''(t)}{\left[f'(t)\right]^2}\right\}\frac{dq}{dt}+C_2 f'(t)q=0, \tag{1.18}$$

$$C_0\frac{d^2q}{dt^2}+\left\{C_1 f'(t)-\frac{C_0 f''(t)}{f'(t)}\right\}\frac{dq}{dt}+C_2\left[f'(t)\right]^2 q=0. \tag{1.19}$$

Таким образом, любая из этих трех форм исходных уравнений параметрических колебаний всегда интегрируется в квадратурах и имеет решение (1.12). Указанные формы могут быть использованы также и при проектировании подобных систем. Кроме того, бывают случаи, когда в результате эксплуатации или эксперимента необходимо получить закон колебаний подобной системы, который можно представить в форме (1.12):

$$q=K_1e^{r_1 f(t)}+K_2e^{r_2 f(t)}$$

При этом надо определить $m(t),\mu(t)$ и $c(t)$, если, например, известен коэффициент $C_0=n$ и все вышеупомянутые параметры должны быть переменными.

Для решения такой обратной задачи используем соответствующую этим условиям форму записи (1.18):

$$\frac{1}{f'(t)}\frac{d^2q}{dt^2}+\left\{\frac{C_1}{C_0}-\frac{f''(t)}{\left[f'(t)\right]^2}\right\}\frac{dq}{dt}+\frac{C_2}{C_0}f'(t)q=0.$$

Используя свойства корней характеристического уравнения, перепишем его в виде

$$\frac{1}{f'(t)}\frac{d^2q}{dt^2}+\left\{-(r_1+r_2)-\frac{f''(t)}{\left[f'(t)\right]^2}\right\}\frac{dq}{dt}+r_1r_2 f'(t)q=0.$$

Умножим теперь это уравнение на n и, сравнив его с (1.18), получим:

$$m(t)=\frac{n}{f'(t)};\qquad \mu(t)=n\left\{-(r_1+r_2)-\frac{f''(t)}{\left[f'(t)\right]^2}\right\};\qquad c(t)=nr_1r_2 f'(t).$$

Следовательно, задаваясь определяющей функцией $f(t)$, которая удовлетворяет упомянутым выше условиям, можно составить множество исходных уравнений параметрических колебаний, интегрируемых в квадратурах.

2. Учет воздействия внешней периодической силы

Из всех внешних воздействий наибольший интерес представляет случай, когда возмущающая сила будет периодической. При этом величина периода может быть не только постоянной, но и переменной. Исходное дифференциальное уравнение движения для этого случая можно представить в форме:

$$m(t)\frac{d^2q}{dt^2}+\mu(t)\frac{dq}{dt}+c(t)q=H\sin\psi(t), \tag{2.1}$$

где H - амплитуда возмущающей силы.

Будем считать, что однородное уравнение, соответствующее уравнению (2.1):

$$m(t)\frac{d^2q}{dt^2}+\mu(t)\frac{dq}{dt}+c(t)q=0$$

относится к рассмотренному выше множеству исходных уравнений параметрических колебаний, которые интегрируются в квадратурах. Т.е. применяя подстановку $z=f(t)$, мы приходим к уравнению с постоянными коэффициентами (1.8) при новой переменной z:

$$C_0\frac{d^2q}{dz^2}+C_1\frac{dq}{dz}+C_2q=0\,.$$

Рассмотрим вначале случай, когда при выполнении условия (1.11) получаем закон параметрических колебаний (1.12). Так как корни характеристического уравнения будут комплексными в виде (1.13), то решение рассматриваемого однородного уравнения можно представить в форме:

$$q_0(z)=ae^{\alpha z}\sin(\beta z+\gamma)\,. \tag{2.2}$$

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (2.1). Представляя здесь $t=\eta(z)$, запишем его в виде:

$$\frac{d^2q}{dz^2}+\frac{C_1}{C_0}\frac{dq}{dz}+\frac{C_2}{C_0}q=\frac{H}{C_0}\sin\psi(\eta(z)) \tag{2.3}$$

Интегрируя его с учетом (2.2) обычным способом, находим частное решение $q_r(z)$. Тогда общее решение уравнения (2.3) представляем в форме:

$$q(z)=q_0(z)+q_r(z).$$

Из него, используя равенство (1.2), находим общее решение $q(t)$, а затем определяем постоянные a и α из начальных условий.

В случае невыполнения условия (1.11), корни характеристического уравнения будут действительными. Тогда решение однородного уравнения будет представлено суммой двух апериодических функций:

$$q_0(z)=K_1e^{r_1z}+K_2e^{r_2z}\,.$$

Следовательно, и результирующий закон движения $q(t)$ в этом случае является наложением трех движений: одного периодического, вызванного внешней силой, и двух апериодических.

3. Пример расчета

Исследовать поведение системы, описываемой исходным уравнением:

$$4(t+1)\frac{d^2x}{dt^2}+\left(0,4\sqrt{t+1}+2\right)\frac{dx}{dt}+1{,}01x=0{,}15\sin\left(2\sqrt{t+1}\right), \tag{3.1}$$

если $C_0=1$ и при $t_0=0$; $x_0=0{,}04$ м; $\dot{x}_0=0{,}06$ м/с.

Решение. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$4\left(t+1\right)\frac{d^2x}{dt^2}+\left(0,4\sqrt{t+1}+2\right)\frac{dx}{dt}+1,01x=0\,. \qquad (3.2)$$

Здесь квазиупругий коэффициент постоянный, поэтому для исследования такой параметрической системы используем форму записи (1.17):

$$\frac{C_0}{\left[f'(t)\right]^2}\frac{d^2x}{dt^2}+\left\{\frac{C_1}{f'(t)}-\frac{C_0 f''(t)}{\left[f'(t)\right]^3}\right\}\frac{dx}{dt}+C_2x=0\,.$$

Сравнивая последнее уравнение с (3.2), сначала находим $C_2=1,01$. Остальные две величины (определяющую функцию $f(t)$ и постоянную C_1 находим из системы уравнений:

$$\begin{cases} C_0\Big/\left[f'(t)\right]^2=4\left(t+1\right) \\ C_1\big/f'(t)=0,4\sqrt{t+1} \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$C_1=0,2;\quad f(t)=\sqrt{t+1}\,.$$

При этом $\dfrac{-C_0 f''(t)}{\left[f'(t)\right]^3}=2\ \sim\ \dfrac{C_0}{\left[f'(t)\right]^2}=4\left(t+1\right)$.

Следовательно, уравнение (1.8) с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

$$\frac{d^2x}{dz^2}+0,2\frac{dx}{dz}+1,01x=0\,. \qquad (3.3)$$

Записываем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$r^2+0,2r+1,01=0;\qquad r_{1,2}=-0,1\pm i\,.$$

Поэтому решение однородного уравнения (3.3) можно представить в форме:

$$x_0\left(z\right)=ae^{-0,1z}\sin\left(z+\gamma\right), \qquad (3.4)$$

где a и γ - постоянные величины.

Выразим теперь исходное неоднородное уравнение (3.1) через переменную z

$$\frac{d^2x}{dz^2}+0,2\frac{dx}{dz}+1,01x=0,15\sin 2z\,. \qquad (3.5)$$

Учитывая (3.4), находим частное решение уравнения (3.5) в виде:

$x_r\left(z\right)=-0,0493\sin 2z-0,0066\cos 2z=0,05\sin\left(2z+3,274\right)$ (3.6)

Находим общее решение исходного уравнения (3.1), выраженное через переменную t. Учитывая (3.4) и (3.6), а также подстановку $z=\sqrt{t+1}$, получим:

$$x=ae^{-0,1\sqrt{t+1}}\sin\left(\sqrt{t+1}+\gamma\right)+0,05\sin\left(2\sqrt{t+1}+3,274\right). \qquad (3.7)$$

Для определения постоянных a и γ используем начальные условия: при $t_0=0$; $x_0=0,04$ м; $\dot{x}_0=0,06$ м/с.

Вначале из уравнения (3.7) находим закон изменения скорости системы, а затем, используя указанные начальные условия, получаем:

$$a=0,123\text{ м};\ \gamma=-0,169\text{ рад.}$$

Следовательно, искомый закон движения имеет вид:

$$x=0,123e^{-0,1\sqrt{t+1}}\sin\left(\sqrt{t+1}-0,169\right)+0,05\sin\left(2\sqrt{t+1}+3,274\right) \qquad (3.8)$$

На приведенном рисунке изображен график таких колебаний (кривая 3). Он получен наложением двух движений: затухающих параметрических колебаний (кривая 1) и колебаний с постоянной амплитудой, вызванных возмущающей силой (кривая 2).

Как следует из закона (3.8) параметрические колебания, описываемые первым слагаемым его правой части, с течением времени затухают. Поэтому данная система приходит к колебаниям с постоянной амплитудой:

$$x = 0,05\sin\left(2\sqrt{t+1}+3,274\right). \tag{3.9}$$

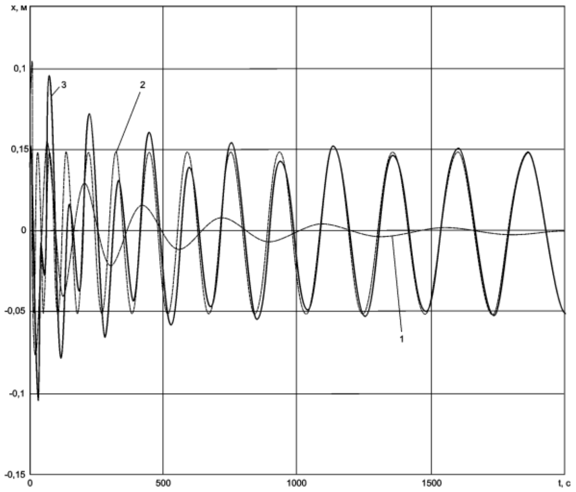

Рис.1

Отсюда находим скорость и ускорение системы:

$$\dot{x} = \frac{0,05}{\sqrt{t+1}}\cos\left(2\sqrt{t+1}+3,274\right), \tag{3.10}$$

$$\ddot{x} = -\frac{0,05}{t+1}\left[\sin\left(2\sqrt{t+1}+3,274\right)+\frac{1}{2\sqrt{t+1}}\cos\left(2\sqrt{t+1}+3,274\right)\right] \tag{3.11}$$

Следовательно, с течением времени обе эти величины убывают.

Рассмотрим теперь характер изменения полупериодов колебаний. Принимая в уравнении (3.10) $\dot{x} = 0$, находим моменты остановок для каждого номера размаха колебаний n:

$$t_n = \left(\frac{\pi n}{2} - 0,8516\right)^2 - 1.$$

При этом любой полупериод колебаний:

$$\tau_n = t_{n+1} - t_n = \frac{\pi^2 n}{2} - 0,208.$$

Таким образом система (3.1) с течением времени приходит к колебаниям, описываемым законом (3.9), с постоянной амплитудой $a = 0,05$ м. При этом полупериоды колебаний увеличиваются на $0,5\pi^2$ с, а скорость и ускорение убывают по закону (3.10) и (3.11).

1. Бессонов А.П., Сильвестров Э.Е. Нестационарные процессы в колебательной системе при изменении массы по нелинейному закону // Машиностроение. – 1968. – №5. – С.3-8.
2. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М.: Высш. шк., 1980. – 480 с.
3. Вибрации в технике. Справочник в 6 т. / Под ред. В.В.Болотина. – М.: Машиностроение, 1979. – т.1. – 352 с.
4. Каюк Я.Ф., Ахмедов А. Пространственные движения цилиндрического тела переменной массы на упругом подвесе // Прикладная механика. – 1992. - №7. – с. 62-69.
5. Кислый А.А. Свободные колебания груза переменной массы в присутствии сил вязкого трения // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1988. - №52. – с.95-98.
6. О.Кислий, Б.Дутчак, О.Гуда. Нестаціонарні коливання системи змінної маси або жорсткості // Машинознавство. – 2003. - №8(74). - С.15-19.
7. О.Кислий, Б.Дутчак, Т.Римарук Вимушені коливання механічних систем зі змінними параметрами // Машинознавство. – 2006. - №7(109). - С.38-42.