

УДК 533.6.011

В.О.Ліщина

Луцький інститут розвитку людини Університету «Україна»

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЛІСОВИХ ПОЖЕЖ

У роботі досліджуються питання розповсюдження вогню при лісових пожежах. З метою запобігання розповсюдження низинних лісових пожеж виконується математичне моделювання процесів розповсюдження лісових пожеж у режимі виникнення пожежі та у режимі розвинутої лісової пожежі. Запропоновано алгоритм розв'язання одновимірної крайової задачі із рухомими межами, відомої як задача типу Стефана.

Ключові слова: одновимірна крайова задача, математичне моделювання.

Постановка проблеми. Задача визначення фронту лісової пожежі тісно пов'язана із проблемою гасіння лісової пожежі. Математичне моделювання процесів розповсюдження лісової пожежі дозволяє запобігти коштовних натурних експериментів, пов'язаних із вирішенням задач прогнозування розповсюдження вогню.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Процес розповсюдження лісової пожежі може бути досліджений шляхом аналізу контуру пожежі у кожний момент часу як лінії на площині. Ця лінія може задаватися у неявному вигляді $\varphi(x, y, t) = 0$ або у явному вигляді, наприклад, $y = f(x, t)$.

Якщо визначити кромку пожежі як ізотерму $T_* = T(x, y, z_i, t)$, $i = 1, 2$, що відповідає температурі горіння шару, для опису лінії контуру досить мати рівняння балансу для палива ($T_* = T_g \approx 1200K$ – характерна температура, що дорівнює температурі горіння; $z_1 = h_1$ для низинної пожежі, $z_2 = h_3$ для верхової пожежі; h_1 – висота надґрунтового покриву). Процес горіння легкозаймистих матеріалів описується відомим конвективно-дифузійним рівнянням [1]:

$$\chi_m \left(\frac{\partial T_m}{\partial t} + v_m \text{grad} T_m \right) = \text{div} (\lambda_m (1 - \gamma) \text{grad} T_m) - Q_{ms} + Q_{mp} + Q_{vn} \quad (1)$$

де $\chi_m = c_{pm} \rho_m \beta_m$; λ_m – теплопровідність палива; $\mathbf{v}_m(x, y, t)$ – вектор швидкості розповсюдження вогню.

1. Визначення контуру пожежі на основі рівняння переносу.

Для пожеж, розміри яких у плані набагато більші за ширину зони горіння, величиною теплопровідності твердого палива λ_m можна знехтувати. Тоді рівняння (1) стає рівнянням гіперболічного типу:

$$\chi_m \left(\frac{\partial T_m}{\partial t} + v_m \text{grad} T_m \right) = Q_{mp} - Q_{ms} + Q_{vn}. \quad (2)$$

Виходячи із фізичного змісту процесу горіння початкові умови для рівняння (2) розглядаються у вигляді:

$$T_m(x, y, 0) = \begin{cases} T_p, & (x, y) \in B_0, \\ T_0, & (x, y) \notin B_0, \end{cases}$$

де T_p – температура горіння шару; B_0 – задана область на площині (x, y) , межа якої C являє собою кромку пожежі у початковий момент часу.

Крім того, мають бути задані усі значення параметрів, необхідних для обчислення вектора швидкості розповсюдження вогню. Ця величина визначається за допомогою моделі швидкості розповсюдження пожежі, [2].

Ізотерму можна переписати як:

$$T_* - T(x, y, z_i, t) = \varphi(x, y, t) = 0 \quad \text{або} \quad y = F(x, t). \quad (3)$$

Вочевидь, контур лісової пожежі (3) можна розглядати як лінію рівня на площині (x, y) у різні моменти часу або як поверхню у просторі (x, y, t) . Користуючись поняттям швидкості переміщення N довільної поверхні і вважаючи, що $N = v_n$, де v_n – нормальна швидкість розповсюдження лісової пожежі, отримаємо диференціальне рівняння першого порядку для визначення контуру лісової пожежі

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_n |\text{grad } \varphi| = 0 \quad (4)$$

тобто рівняння Гамільтона—Якобі. Початкова умова:

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y).$$

Якщо контур пожежі описується у явному вигляді:

$$y = f(x, t), \quad \varphi(x, y, t) = f(x, t) - y, \quad \frac{\partial y}{\partial t} + v_n \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = 0. \quad (5)$$

Це рівняння відповідає обходу контуру у від'ємному напрямку. Початкова умова

$$y(x, 0) = f(x, 0) = f_0(x).$$

Позначимо $z = \partial y / \partial x$. Маємо таке рівняння:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[v_n \sqrt{1 + z^2} \right] \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left[v_n \sqrt{1 + z^2} \right].$$

Рівняння сімейства характеристик має вигляд:

$$\frac{dx(\omega)}{dt} = F(\omega); \quad F(\omega) = v_0 \left(-\frac{\partial \xi_n}{\partial \omega} + \xi_n \cos \omega \right), \quad 0 \leq \omega \leq \pi \quad (6)$$

Тут ξ_n – індикатриса нормальної швидкості.

Уздовж цієї прямої, що проходить через точку $x = r_0 \cos \omega$, зберігається стале значення $z = z_0(\omega)$, тобто контур розширюється так, що кут нахилу дотичної до контуру вздовж характеристики залишається сталим і дорівнює значенню на початковому контурі.

Із (6) випливає, що координати x, y контуру, які відповідають параметру ω у момент t , мають вигляд:

$$x(\omega, t) = r_0 \cos \omega + v_0 t \left(-\frac{\partial \xi_n}{\partial \omega} \sin \omega + \xi_n \cos \omega \right); \quad (7)$$

$$y(\omega, t) = r_0 \sin \omega + v_0 t \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial \omega} \cos \omega + \xi_n \sin \omega \right). \quad (8)$$

Зв'язок між індикатрисами нормальної і радіальної швидкості:

$$\xi_r(\omega) = \xi_n(\omega) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \xi_n(\omega)}{\partial \xi_n(\omega)} \right)^2} \quad (9)$$

Формули (7), (8) дозволяють розраховувати контури пожеж для будь-яких індикатрис.

Рівняння для розрахунку контурів на основі індикатрис радіальної швидкості набувають вигляду:

$$\begin{cases} x(\omega, t) = (r_0 + v_0 t \xi_r(\omega)) \cos \omega, \\ y(\omega, t) = (r_0 + v_0 t \xi_r(\omega)) \sin \omega. \end{cases} \quad (10)$$

Отже, за визначеної $\xi_n(\omega)$ або $\xi_r(\omega)$. У [3] запропоновано індикатрису нормальної швидкості у вигляді:

$$\xi_n(\alpha) = a + b \cos^k \alpha, \quad a + b = 1, \quad a > b, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Для $k = 3$ вирази (7), (8) набувають вигляду:

$$x(\omega, t) = \left[r_0 + v_0 t (3b \sin^2 \omega + a + b \cos \omega) \right] \cos^2 \omega; \quad (11)$$

$$y(\omega, t) = \left[r_0 + v_0 t (a - 2b \cos^2 \omega) \right] \sin \omega. \quad (12)$$

Параметр a , який залежить від швидкості вітру, визначають на основі експериментальних даних, наприклад, для $\omega \leq 3 \text{ м/с}$ $a = 0,785\omega - 0,106\omega^2$.

Контур розвинутої лісової пожежі можна визначити шляхом розв'язання загальної системи рівнянь. Замість цієї складної системи, з якої визначаються тривимірні поля температур, швидкостей та концентрацій компонентів, можна використовувати простішу систему, яку отримують осередненням за висотою шару рослинності. У результаті отримують простішу систему, яка визначає двовимірні поля осереднених швидкостей, температур і концентрацій компонентів у різні моменти часу.

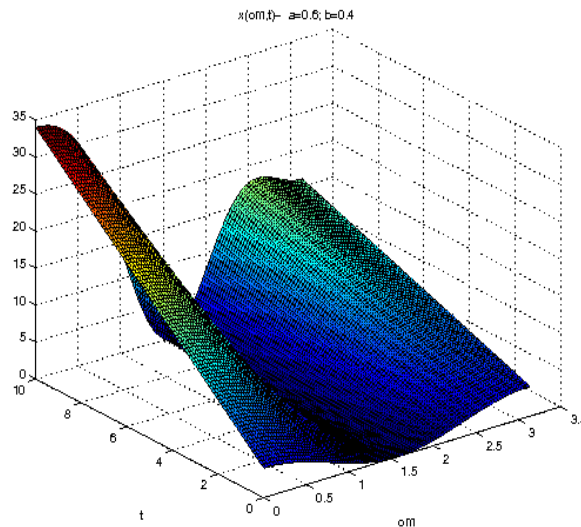


Рис. 1. Графік функції $x(\omega, t)$

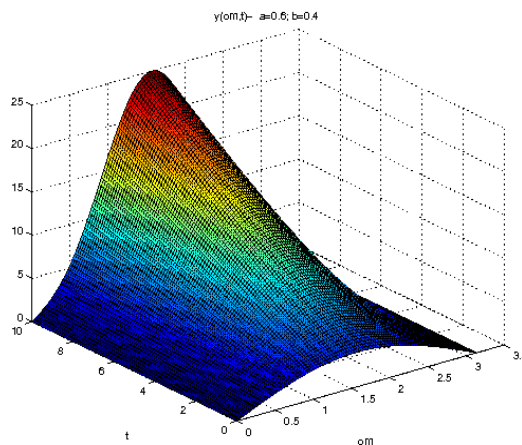


Рис. 2. Графік функції $y(\omega, t)$

2. Визначення контуру розвинутої лісової пожежі.

Нехай ширина фронту пожежі Δ є мала порівняно із характерним розміром осередку пожежі, а φ_0 – початковий контур Γ_0 осередку пожежі.

Розіб'ємо цей контур на елементарні відрізки в околі точок $M_{i0} \in \Gamma_0$ і запровадимо нерухому систему координат із центрами у точках M_{i0} . Для визначення контуру лісової пожежі запишемо систему рівнянь:

$$\Sigma_{1j} \frac{\partial T_{1j}}{\partial t} + \chi_1 \frac{\partial T_{1j}}{\partial x_j} = \lambda_{1j} \frac{\partial^2 T_{1j}}{\partial x_j^2} + \frac{\alpha_{v1}}{h} (T_{1j} - T_\infty), \quad x_j < x_{*j}; \quad (13)$$

$$\Sigma_{2j} \frac{\partial T_{2j}}{\partial t} + \chi_2 \frac{\partial T_{2j}}{\partial x_j} = \lambda_{2j} \frac{\partial^2 T_{2j}}{\partial x_j^2} + \frac{\alpha_{v2}}{h} (T_{2j} - T_\infty), \quad x_j > x_{*j}, \quad (14)$$

де $\chi_k = \rho_{5k} \varphi_{5k} c_{p5} v_{\infty k}$; $\Sigma_{kj} = \sum_{i=1}^5 (\rho_i \varphi_i c_{pi})_{kj}$, $k=1, 2$.

Початкова умова $T_j|_{t=0} = T_{jn}$. Межові умови:

$$\lambda_{2j} \frac{\partial T_{1j}}{\partial x_j} \Big|_{x_j=x_{*j}} + q \frac{dx_{*j}}{dt} = \lambda_{1j} \frac{\partial T_{2j}}{\partial x_j} \Big|_{x_j=x_{*j}}; \quad T|_{x_j=x_{*j}} = T_*; T|_{x_j \rightarrow \infty} = T_\infty. \quad (15)$$

Тут $T_{jn} = T_*$ на контурі Γ_0 , а поза контуру $T_{jn} = T_\infty$; x_{*j} – координати фронту лісової пожежі, що вираховуються від точок M_{j0} по нормалі до контуру Γ_0 .

Задача (13)–(15) – крайова задача із рухомими межами. Це – відома задача типу Стефана, розв'язання якої дозволяє знайти $x_{*j}(t)$ у будь-який момент часу. Контур Γ визначаємо шляхом інтерполяції $x_{*j}(t)$. Оскільки $\omega_j = \partial x_{*j} / \partial t$, контур Γ можна визначити із сумісного розв'язання задачі Стефана і рівняння (4).

Виконано аналіз відомих методів розв'язання крайових задач із рухомими межами (задач типу Стефана). Можна вважати майже завершеними методи розв'язання одновимірних задач типу Стефана. Цим задачам присвячено досить велику кількість наукових праць. Майже – тому, що за винятком чисельних методів розв'язання такого типу задач, аналітичні розв'язання зводяться до заміни типу $\beta = f(\sqrt{t})$, [4], що далеко не завжди відповідає дійсному стану справ. Що стосується розв'язання двох і тривимірних задач типу Стефана, особливо для нелінійних крайових задач із рухомими межами, для вирішення цих задач також, в основному, пропонується така сама заміна змінних за всіма просторовими змінними. Отже, актуальною є розробка ефективного методу розв'язання крайових задач із рухомими межами.

Приведемо рівняння (13), (14) заміною змінних $T_{1j} = e^{\chi_1/(2\lambda_1)x} u_{1j}$; $T_{2j} = e^{\chi_2/(2\lambda_2)x} u_{2j}$ до самосполученого вигляду:

$$\frac{\chi_{01}}{\lambda_1} \frac{\partial u_{1j}}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial x^2} + d_1 u_{1j} - \frac{\alpha_{v1}}{h \lambda_1} e^{-\chi_1/(2\lambda_1)x} T_\infty; \quad (16)$$

$$\frac{\chi_{02}}{\lambda_2} \frac{\partial u_{2j}}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_{2j}}{\partial x^2} + d_2 u_{2j} - \frac{\alpha_{v2}}{h \lambda_2} e^{-\chi_2/(2\lambda_2)x} T_\infty, \quad (17)$$

$$\chi_{0k} = \sum_{i=1}^5 \rho_i \varphi_i c_{pi}; \quad \chi_k = \rho_{5k} \varphi_{5k} c_{p5} v_{\infty k}; \quad d_k = \frac{\alpha_{vk}}{h \lambda_k} + \left(\frac{\chi_k}{2\lambda_k} \right)^2.$$

Межові умови для рівняння (16) оберемо у вигляді:
у центрі (умовному) розповсюдження вогню –

$$\left[\frac{\partial u_{1j}}{\partial x} + e u_{1j} \right]_{x=0} = T_g; \quad u_{1j}|_{x=x^*} = e^{-\chi_1/(2\lambda_1)x^*} T_*.$$

Тут позначено: T_g – температура горіння ЛЗМ; $e = q + \chi_1 / 2\lambda_1$.

Розв'язання крайової задачі із застосуванням методу інтегральних перетворень отримано у вигляді:

$$T_{1j}(x, t) = e^{-\chi_1/(2\lambda_1)x} \sum_{k=1}^N X_k(x) [A1_k + A2_k e^{-a_k t}]; \quad (18)$$

$$X_k(x) = \frac{1}{\|X_k(x)\|} \left[\sin \beta_k x - \frac{\beta_k}{d_1} \cos \beta_k x \right];$$

$$A1_k = (F_k + R_k) / a_k; \quad A2_k = T_0 g x_k - A1_k; \quad a_k = \beta_k^2 \lambda_1 / \chi_1;$$

$$F_k = \frac{\alpha_{V1}}{h \chi_1} \frac{T_*}{\|X_k(x)\|} g x_k; \quad R_k = \frac{\lambda_1}{\chi_1} \frac{1}{\|X_k(x)\|} \left[e^{-\chi_1 / (2\lambda_1) x^*} T_* \beta_k \left(\cos \beta_k x^* + \frac{\beta_k}{d_1} \sin \beta_k x^* \right) + \frac{\beta_k}{d_1} T_g \right];$$

$$g x_k = \int_0^{x^*} e^{-\chi_1 / (2\lambda_1) x} X_k(x) dx.$$

Розв'язання рівняння (17) із межовими умовами:

$$u_{2j} \Big|_{x=x^*} = e^{-\chi_2 / (2\lambda_2) x^*} T_*; \quad u_{2j} \Big|_{x \rightarrow \infty} = T_\infty$$

Підставимо отримані розв'язки в умову (15). Маємо:

$$\left\{ \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[e^{-c_2 x} \sum_{k=1}^N X2_k(x) (A3_k + A4_k e^{-a_k t}) \right] - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} \left[e^{-c_1 x} \sum_{k=1}^N X1_k(x) (A1_k + A2_k e^{-a_k t}) \right] \right\} \Big|_{x=x^*} = q \frac{dx^*}{dt}$$

Це рівняння за фіксованих значень x^* у лівій його частині шляхом інтегрування дає вираз для $(x^*)^{(m)}(t)$. Далі будемо ітераційний алгоритм для фіксованих значень $t = t^{(m)}$, повторюємо обчислення для нових значень $(x^*)^{(m)}(t^{(m)})$.

1. Доррер Г.А. Математические модели динамики лесных пожаров.—М.: Лесн. пром-сть, 1979.—161 с.
2. Гришин А.М. Математические модели лесных пожаров. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1981.—277 с.
3. Зеленський К.Х., Ліщина В.О., Ваврук Є.Я. Математичне моделювання низинних лісових пожеж. // Вісник Національного університету «Львівська політехніка» «Комп'ютерні науки та інформаційні технології» №638, Л.: 2009р., – с. 95-98.
4. Федоткин И.М., Бурляй И.Ю., Рюмшин Н.А. Математическое моделирование технологических процессов: Тепловые процессы, плавление, замораживание, теплопроводность, регулярный режим. – К.: Техніка, 2004.—388 с.